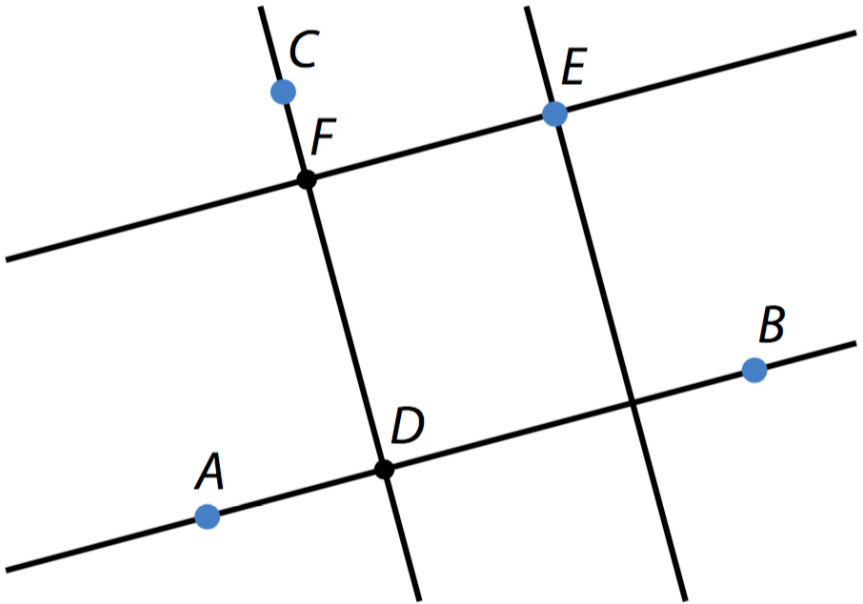


1

- a) Arkistokatu ja Maaherrankatu ovat yhdensuuntaiset. Väite siis pitää paikkansa.
- b) Pirttiniemenkatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia. Väite ei siis pidä paikkaansa.
- c) Olkkolankatu ja Tenholankatu eivät ole yhdensuuntaisia. Väite siis pitää paikkansa.
- d) Olkkolankatu ja Arkistokatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite siis pitää paikkansa.
- e) Olkkolankatu ja Kansankatu ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite siis pitää paikkansa.
- f) Tehnolankatu ja Maaherrankatu eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan. Väite ei siis pidä paikkaansa.

- Vastaus:
- a) Pitää paikkansa.
 - b) Ei pidä paikkaansa.
 - c) Pitää paikkansa.
 - d) Pitää paikkansa.
 - e) Pitää paikkansa.
 - f) Ei pidä paikkaansa.

2

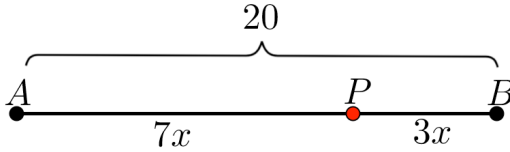


e) Kuvan perusteella suora EF on yhdensuuntainen suoran AB kanssa.

3

- a) Janan jakosuhte on $7 : 3$. Kun yhden osan pituutta merkitään kirjaimella x , niin jakosuhteen perusteella

$$|AP| = 7x \quad \text{ja} \quad |PB| = 3x.$$



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan yhden osan pituus x .

$$7x + 3x = 20$$

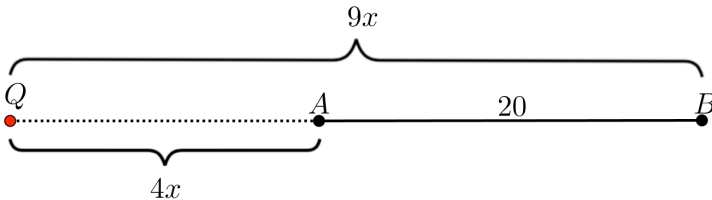
$$10x = 20 \quad | :10$$

$$x = 2$$

Lasketaan janan AP pituus: $|AP| = 7x = 7 \cdot 2 = 14$.

b) Janan jakosuhte on $4 : 9$, joten $|AQ| : |QB| = 4 : 9$. Piste Q on siis lähempänä pistettä A kuin pistettä B eli piste Q on pisteen A puoleisella janan jatkeella. Jakosuhteen perusteella

$$|AQ| = 4x \quad \text{ja} \quad |QB| = 9x.$$



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$9x - 4x = 20$$

$$5x = 20 \quad | : 5$$

$$x = 4$$

Lasketaan janan AQ pituus: $|AQ| = 4x = 4 \cdot 4 = 16$.

Vastaus: a) $|AP| = 14$ b) $|AQ| = 16$

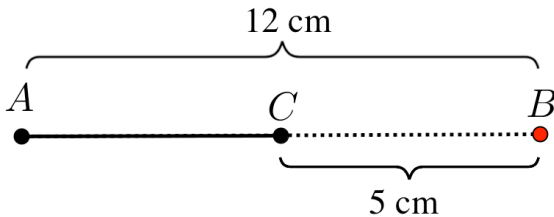
4

a) Piirretään mallikuva.



Lasketaan janan AC pituus: $|AC| = 12 + 5 = 17$ (cm).

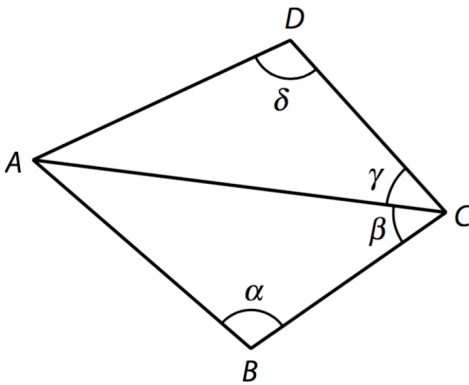
b) Koska jana AB on pidempi, kuin jana BC , niin piste B on lähempänä pistettä C kuin pistettä A . Piste B on siis pisteen C puoleisella janan jatkeella.



Lasketaan janan AC pituus: $|AC| = 12 - 5 = 7$ (cm).

Vastaus: a) $|AC| = 17$ cm b) $|AC| = 7$ cm

5



- a) Kärjessä B on kulma α , joten $\sphericalangle CBA = \alpha$.
- b) Kärjessä D on kulma δ , joten $\sphericalangle ADC = \delta$.
- c) Kärjessä C on kaksi kulmaa. Näistä kulmista β on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja B . Siis $\sphericalangle ACB = \beta$.
- d) Kärjessä C olevista kulmista γ on se kulma, jonka kyljillä on pisteet A ja D . Siis $\sphericalangle DCA = \gamma$.

Vastaus: a) $\sphericalangle CBA = \alpha$ b) $\sphericalangle ADC = \delta$
 c) $\sphericalangle ACB = \beta$ d) $\sphericalangle DCA = \gamma$

6

a) Leveyspiiri:

$$\begin{aligned}62,910^\circ &= 62^\circ + 0,910 \cdot 60' \\ &= 62^\circ + 54,6' \\ &= 62^\circ 54,6'\end{aligned}$$

Pituuspiiri:

$$\begin{aligned}27,655^\circ &= 27^\circ + 0,655 \cdot 60' \\ &= 27^\circ + 39,3' \\ &= 27^\circ 39,3'\end{aligned}$$

b) Leveyspiiri:

$$\begin{aligned}62,910^\circ &= 62^\circ 54,6' \\ &= 62^\circ 54' + 0,6 \cdot 60'' \\ &= 62^\circ 54' + 36'' \\ &= 62^\circ 54' 36''\end{aligned}$$

Pituuspiiri:

$$\begin{aligned}27,655^\circ &= 27^\circ 39,3' \\ &= 27^\circ 39' + 0,3 \cdot 60'' \\ &= 27^\circ 39' + 18'' \\ &= 27^\circ 39' 18''\end{aligned}$$

Vastaus: a) leveyspiiri: $62^\circ 54,6'$, pituuspiiri: $27^\circ 39,3'$
b) leveyspiiri: $62^\circ 54' 36''$, pituuspiiri: $27^\circ 39' 18''$

7

a)

Terävä kulma	Tylppä kulma	Kovera kulma	Kupera kulma
25°	95°	25°	183°
65°	155°	65°	210°
85°	177°	85°	350°
		90°	
		95°	
		155°	
		177°	

b) Komplementtikulmien summa on 90° , joten komplementtikulmia ovat 25° ja 65° .

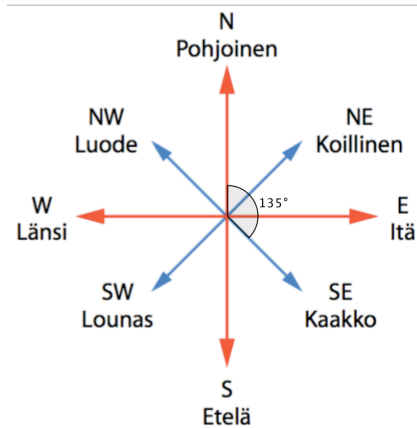
c) Suplementtikulmien summa on 180° , joten suplementtikulmia ovat

25° ja 155° ,

85° ja 95° .

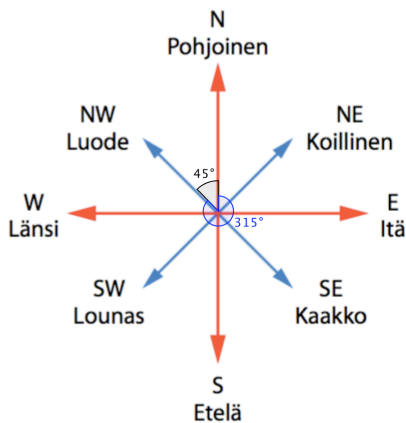
8

a) Kierretään 135° pohjoisesta myötäpäivään.



Eemeli kulkee kaakkoon.

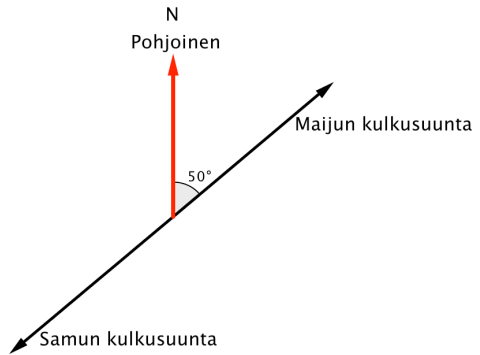
b) Luoteen ja pohjoisen välinen kulma on 45° . Kompassisuunta luoteeseen on siis $360^\circ - 45^\circ = 315^\circ$.



c)

Maijun kulkee
kompassisuuntaan 50° .

Samu kävelee
vastakkaiseen suuntaan.



Samun kävelee siis kompassisuuntaan $50^\circ + 180^\circ = 230^\circ$.

Vastaus: a) kaakkoon b) 315° c) 230°

9

Kulman β suuruus on nelinkertainen kulmaan α verrattuna, joten $\beta = 4\alpha$.

- a) Kulmat α ja β ovat komplementtikulmia eli niiden summa on 90° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + 4\alpha = 90^\circ$$

$$5\alpha = 90^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 18^\circ$$

- b) Kulmat α ja β ovat suplementtikulmia eli niiden summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + 4\alpha = 180^\circ$$

$$5\alpha = 180^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 36^\circ$$

c) Kulmat α ja β ovat eksplementtikulmia eli niiden summa on 360° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan α .

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

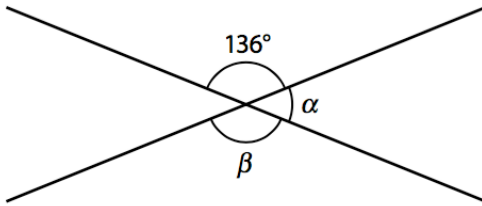
$$\alpha + 4\alpha = 360^\circ$$

$$5\alpha = 360^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 72^\circ$$

Vastaus: a) 18° b) 36° c) 72°

10



a) Kulma α on 136 asteen kulman vieruskulma.

Lasketaan kulman α suuruus: $\alpha = 180^\circ - 136^\circ = 44^\circ$

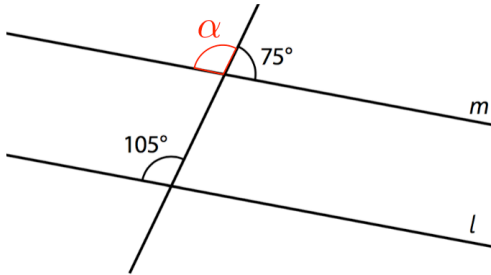
b) Kulma β on 136 asteen kulman ristikulma eli $\beta = 136^\circ$.

c) Suorien leikkauspisteeseen muodostuvat kulmat ovat 34° ja 136° . Suorien välinen kulma on on muodostuvista kulmista pienin, joten suorien välinen kulma on 34° .

Vastaus: a) $\alpha = 44^\circ$ b) $\beta = 136^\circ$ c) 44°

11

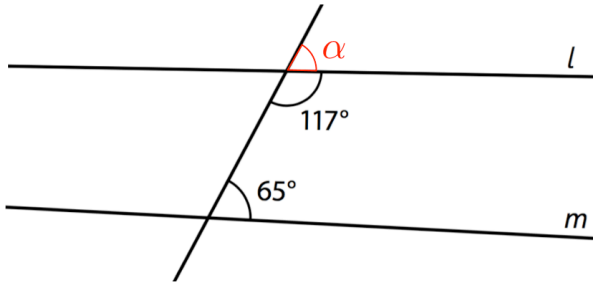
- a) Kuvaan merkitty kulma α ja 105° :n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Selvitetään, ovatko samankohtaiset kulmat yhtä suuria.



Kulma α on 75° :n kulman vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Koska samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset.

b) Kuvaan merkitty kulma α ja 65° :n kulma ovat samankohtaisia kulmia. Selvitetään, ovatko samankohtaiset kulmat yhtä suuria.



Kulma α on 117° :n kulman vieruskulma, joten $\alpha = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ \neq 65^\circ$.

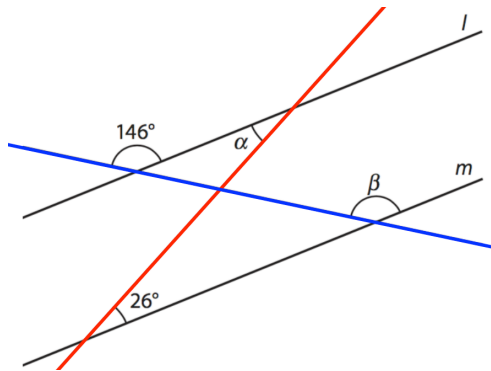
Koska samankohtaiset kulmat eivät ole yhtä suuria, niin suorat l ja m eivät ole yhdensuuntaiset.

Vastaus: a) ovat b) eivät ole

12

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.

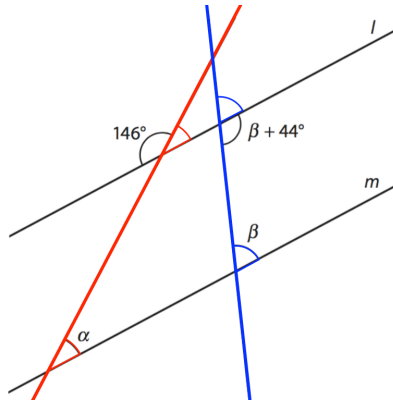
a)



Punainen leikkaava suora on kulman α ja 26° :n kulman vasen kylki, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Täten $\alpha = 26^\circ$.

Sininen leikkaava suora on kulman β ja 146° :n kulman vasen kylki, joten ne ovat samankohtaisia kulmia. Täten $\beta = 146^\circ$.

b)



Punainen leikkaava suora on kulman α vasen kylki ja 146° :n kulman oikea kylki, joten kulman α kanssa samankohtainen kulma on 146° :n kulman vieruskulma.

Täten $\alpha = 180^\circ - 146^\circ = 34^\circ$.

Sininen leikkaava suora on kulman β vasen kylki ja kulman $\beta + 44^\circ$ oikea kylki, joten kulman β kanssa samankohtainen kulma on kulman $\beta + 44^\circ$ vieruskulma.

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - (\beta + 44^\circ)$$

$$\beta = 180 - \beta - 44^\circ \quad | +\beta$$

$$2\beta = 136^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 68^\circ$$

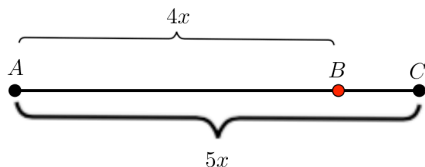
Vastaus: a) $\alpha = 26^\circ$ ja $\beta = 146^\circ$ b) $\alpha = 34^\circ$ ja $\beta = 68^\circ$

13

a) Koska $|AB| = \frac{4}{5}|AC|$, niin $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{4}{5}$.

Olkoon $|AB| = 4x$. Tällöin $|AC| = 5x$.

Piirretään mallikuva



Janan BC pituus on siis $5x - 4x = x$.

Piste B siis jakaa janan AC suhteessa

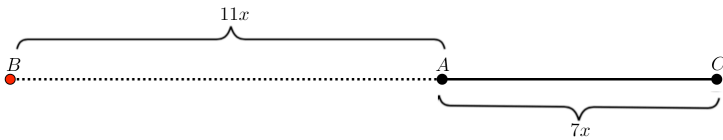
$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{4x}{x} = \frac{4}{1} = 4:1.$$

b) Koska $|AB| = \frac{11}{7}|AC|$, niin $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{11}{7}$.

Olkoon $|AB| = 11x$. Tällöin $|AC| = 7x$.

Nyt piste B sijaitsee janan AC jatkeella

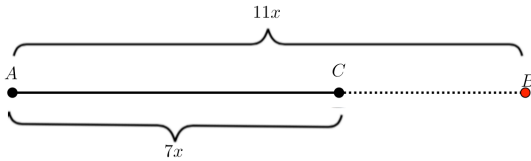
1) Oletetaan ensin, että piste B on pisteen A puoleisella janan jatkeella.



Piste B jakaa janan AC suhteessa

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{11\cancel{x}}{18\cancel{x}} = \frac{11}{18} = 11:18.$$

2) Oletetaan seuraavaksi, että piste B on pisteen C puoleisella janan jatkeella.



Janan BC pituus on $11x - 7x = 4x$.

Piste B jakaa janan AC suhteessa

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{11\cancel{x}}{4\cancel{x}} = \frac{11}{4} = 11:4.$$

Vastaus a) 4 : 1 b) 11 : 18 tai 11 : 4

14

a)

$$\begin{aligned}60^{\circ}26'07'' &= 60^{\circ} + \frac{26}{60} + \frac{7}{3600} \\ &= 60,435277\dots^{\circ} \approx 60,435^{\circ}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}22^{\circ}13'43'' &= 22^{\circ} + \frac{13}{60} + \frac{43}{3600} \\ &= 22,228611\dots^{\circ} \approx 22,229^{\circ}\end{aligned}$$

Vastaus a) $60,435^{\circ}$ b) $22,229^{\circ}$

15

- a) Täysi kierros on 360° , joten tuntiviisari kiertää yhdessä tunnissa $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.



- b) Puolessa tunnissa tuntiviisarin kiertymä on 15° .
Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 15^\circ = 75^\circ$.



c) 15 minuuttia eli neljäsosatuntia vastaava tuntiviisarin kiertymä

$$\text{on } \frac{30^\circ}{4} = 7,5^\circ.$$

Viisareiden välinen kulma on siis $30^\circ + 30^\circ + 7,5^\circ = 67,5^\circ$.



d) 5 minuuttia vastaava tuntiviisarin kiertymä on $\frac{30^\circ}{12} = 2,5^\circ$.

Viisareiden välinen kulma on siis

$$30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 2,5^\circ = 92,5^\circ.$$



Vastaus a) 60°

b) 75°

c) $67,5^\circ$

d) $92,5^\circ$

16

Kulma $\beta = \alpha - 20^\circ$.

a) Komplementtikulmien summa on 90° . Muodostetaan yhtälö.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\alpha + \alpha - 20^\circ = 90^\circ$$

$$2\alpha = 90 + 20^\circ$$

$$2\alpha = 110^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 55^\circ$$

Tällöin kulma $\beta = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$.

b) Supplementtikulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \alpha - 20^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha = 200^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 100^\circ$$

Tällöin kulma $\beta = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ$.

c) Eksplementtikulmien summa on 360° . Muodostetaan yhtälö.

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

$$\alpha + \alpha - 20^\circ = 360^\circ$$

$$2\alpha = 380^\circ \quad | :2$$

$$\alpha = 190^\circ$$

Tällöin kulma $\beta = 190^\circ - 20^\circ = 170^\circ$.

Vastaus a) $\alpha = 55^\circ$ ja $\beta = 35^\circ$
b) $\alpha = 100^\circ$ ja $\beta = 80^\circ$
c) $\alpha = 190^\circ$ ja $\beta = 170^\circ$

17

Koska kulmat α ja β ovat vieruskulmia, niin $\alpha + \beta = 180^\circ$.

Koska kulmien suhde on $\alpha : \beta = 11 : 7$, niin voidaan merkitä $\alpha = 11x$ ja $\beta = 7x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$11x + 7x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ \quad | :18$$

$$x = 10^\circ$$

Lasketaan kulmien suuruudet.

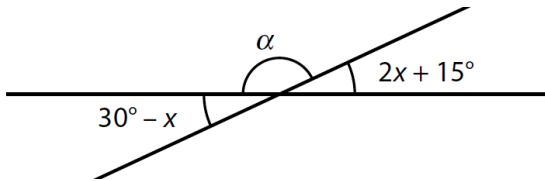
$$\alpha = 11x = 11 \cdot 10^\circ = 110^\circ$$

$$\beta = 7x = 7 \cdot 10^\circ = 70^\circ$$

Suorien välinen kulma on näistä pienempi eli 70° .

Vastaus $\alpha = 110^\circ$ ja $\beta = 70^\circ$, suorien välinen kulma 70°

18



Kulmat $30^\circ - x$ ja $2x + 15^\circ$ ovat ristikulmina yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$30^\circ - x = 2x + 15^\circ$$

$$-x - 2x = 15^\circ - 30^\circ$$

$$-3x = -15^\circ \quad | :(-3)$$

$$x = 5^\circ$$

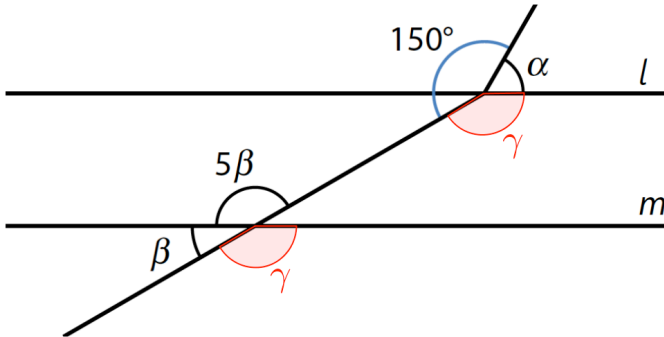
Tällöin kulma $30^\circ - x = 30^\circ - 5^\circ = 25^\circ$.

Kulma α on kyseisen kulman vieruskulma eli $\alpha = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.

Vastaus 155°

19

- a) Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin kuvaan merkityt samankohtaiset kulmat γ ovat yhtä suuret.



Kulmat β ja 5β ovat vieruskulmat. Muodostetaan yhtälö.

$$\beta + 5\beta = 180^\circ$$

$$6\beta = 180^\circ \quad | :6$$

$$\beta = 30^\circ$$

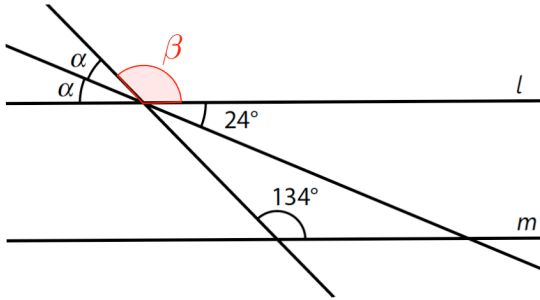
Kulmat γ ja 5β ovat ristikulmina yhtä suuret.

$$\gamma = 5\beta = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$

Kulmat α , γ ja 150° muodostavat täyden kulman. Lasketaan kulman α suuruus.

$$\alpha = 360^\circ - 150^\circ - \gamma = 360^\circ - 150^\circ - 150^\circ = 60^\circ$$

b) Selvitetään ovatko samankohtaiset kulmat β ja 134° yhtä suuret.



Kulmat α ja 24° ovat ristikulmina yhtä suuret eli $\alpha = 24^\circ$.

Muodostetaan oikokulman avulla yhtälö ja ratkaistaan kulma β .

$$\alpha + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$24^\circ + 24^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$48^\circ + \beta = 180^\circ \quad | -48^\circ$$

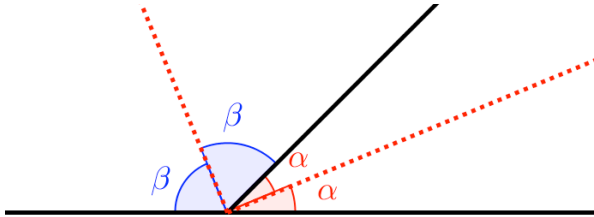
$$\beta = 132^\circ$$

Koska $\beta = 132^\circ \neq 134^\circ$, niin suora l ja m eivät ole yhdensuuntaiset.

Vastaus a) $\alpha = 60^\circ$ ja $\beta = 30^\circ$ b) eivät ole

20

Merkitään kulmien puolikkaita kirjaimilla α ja β .



Kulman ja sen vieruskulman summa on 180° . Muodostetaan yhtälö.

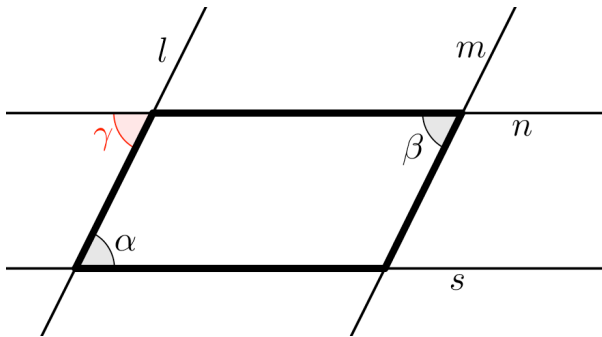
$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 180^\circ \quad | :2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

On siis osoitettu, että kulman puolittajien välinen kulma $\alpha + \beta = 90^\circ$. Täten kulman puolittajat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. \square

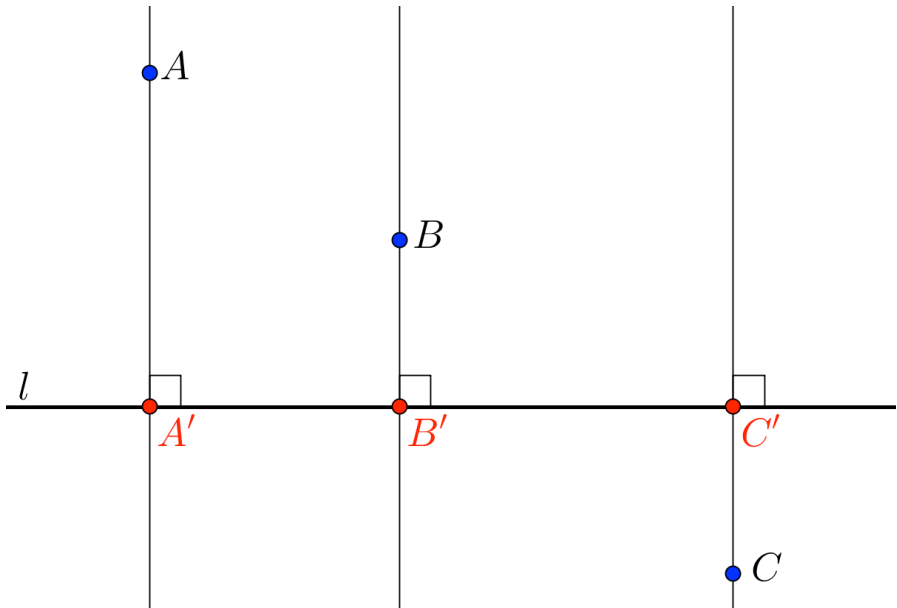
21



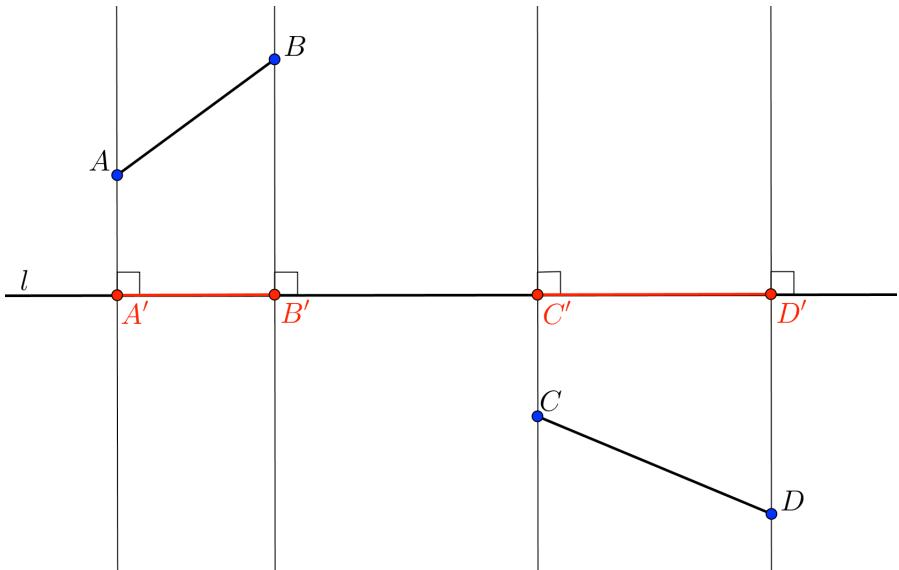
Koska suorat s ja n ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat α ja γ ovat yhtä suuret, $\alpha = \gamma$.

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat β ja γ ovat yhtä suuret, $\beta = \gamma$.

On siis osoitettu, että $\alpha = \beta$. □



Piirrä suoralla l normaalit pisteiden A , B ja C kautta. Pisteiden kohtisuorat projektiot A' , B' ja C' ovat normaalien ja suoran l leikkauspisteet.

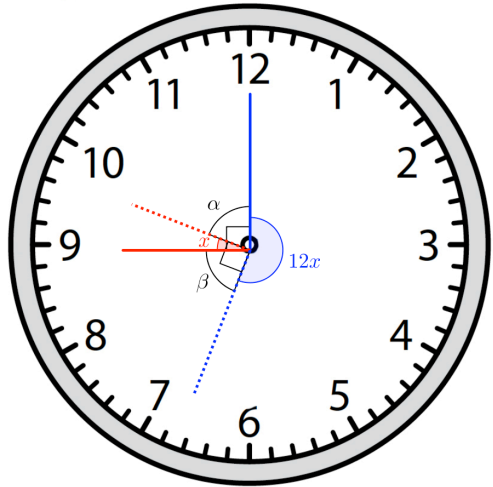


Piirrä suoralla l normaalit pisteiden A , B , C ja D kautta. Janan AB kohtisuora projektio on jana $A'B'$ ja janan CD kohtisuora projektio on $C'D'$.

24

Merkitään tuntiviisarin
kiertymää kirjaimella x .
Samassa ajassa tuntiviisarin
kiertymä on $12x$.

Kulma $\alpha = 90^\circ - x$ ja
kulma $\beta = 90^\circ - x$.



Kulmat α , β , x ja $12x$ muodostavat täyden kulman.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma x .

$$\alpha + \beta + x + 12x = 360^\circ$$

$$90^\circ - x + 90^\circ - x + x + 12x = 360^\circ$$

$$180^\circ + 11x = 360^\circ$$

$$x = \frac{180^\circ}{11}$$

Yhdessä tunnissa (1 h = 3600 s) tuntiviisarin kiertymä on 30°. Lasketaan saatua kiertymää x vastaava aika.

$$\frac{\frac{180^\circ}{11}}{30^\circ} \cdot 3600 \text{ s} = 1963,6363\dots \text{ s} \approx 1964 \text{ s} = 32 \text{ min } 44 \text{ s}$$

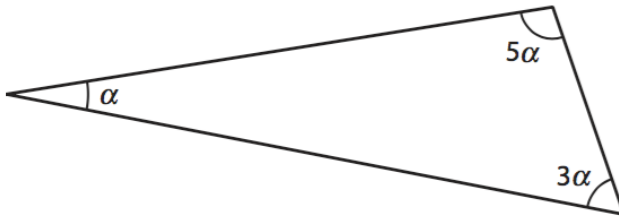
Osoittimet muodostavat kello 9.00 jälkeen suoran kulman seuraavan kerran klo 9.32:44.

Vastaus kello 9.32.44

Kupera monikulmio	A, C, D, E, F
Kovera monikulmio	B
Säännöllinen monikulmio	D, E
Suunnikas	E, F
Tasakylkinen kolmio	C, D
Tasasivuinen kolmio	D

26

a)



Kulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kulma α .

$$\alpha + 3\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

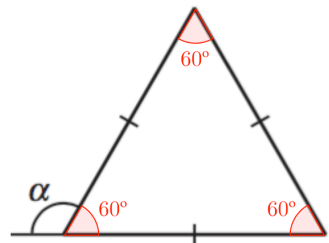
$$9\alpha = 180^\circ \quad | :9$$

$$\alpha = 20^\circ$$

b)

Koska kolmio on tasasivuinen, on sen jokainen kulma 60° . Kulma α on kolmion kulman vieruskulma.

$$\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$



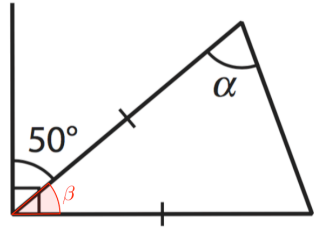
c)

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

Kolmio on tasakylkinen ja sen huippukulma on 40° . Kantakulmat ovat yhtä suuret. Lasketaan kantakulman α suuruus.

$$\alpha = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ$$



Vastaus a) $\alpha = 20^\circ$ b) $\alpha = 120^\circ$ c) $\alpha = 70^\circ$

27

a) $4560 \text{ cm} = 45,6 \text{ m}$

b) $0,45 \text{ km} = 450 \text{ m}$

c) $125 \text{ m}^2 = 1,25 \text{ a}$

d) $2,5 \text{ ha} = 25\,000 \text{ m}^2$

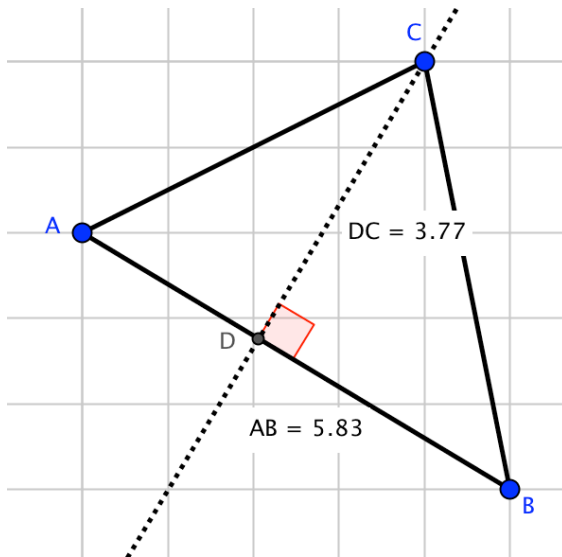
e) $8,54 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 8,54 \text{ m}^2$

f) $2,5 \text{ dl} = 0,25 \text{ l} = 0,25 \text{ dm}^3$

g) $149 \text{ cm}^3 = 0,149 \text{ dm}^3 = 0,149 \text{ l}$

28

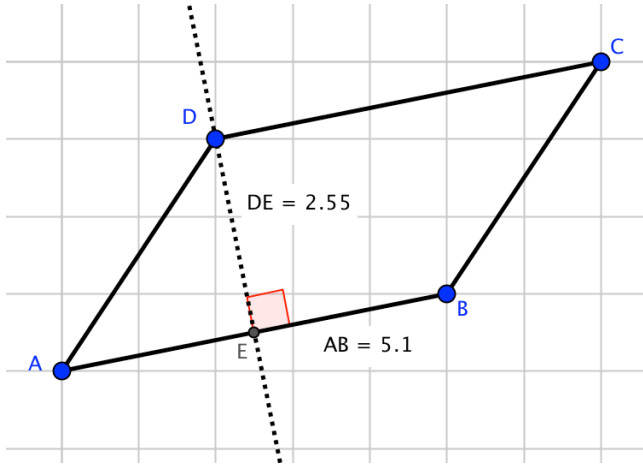
a)



Valitaan yksi sivu kannaksi, esimerkiksi sivu AB ja mitataan sen pituus. Piirretään kannalle normaali, joka kulkee kärjen C kautta. Merkitään kuvaan normaalin ja kannan leikkauspiste D . Mitataan kolmion korkeusjanan DC pituus. Lasketaan pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5,83 \cdot 3,77 = 10,989... \approx 11$$

b)



Valitaan yksi sivu kannaksi, esimerkiksi sivu AB ja mitataan sen pituus. Piirretään kannalle normaali, joka kulkee kärjen D kautta. Merkitään kuvaan normaalin ja kannan leikkauspiste E . Mitataan kolmion korkeusjanan DE pituus. Lasketaan pinta-ala.

$$A = 5,1 \cdot 2,55 = 13,005 \approx 13$$

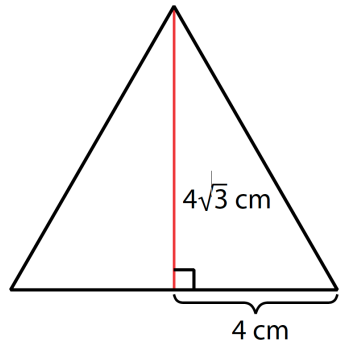
Vastaus a) 11 b) 13

29

Koska kolmio on tasasivuinen, niin korkeusjana puolittaa kolmion kannan. Kolmion kannan pituus on siis 8 cm.

Lasketaan pinta-ala.

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = 27,7128\dots \approx 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$



Koska kolmio on tasasivuinen, niin kolmion jokainen sivu on yhtä pitkä eli 8 cm.

Lasketaan piiri.

$$p = 3 \cdot 8 = 24 \text{ (cm)}$$

Vastaus pinta-ala 28 cm^2 ja piiri 24 cm

30

Yhden ruudun pinta-ala on $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$. Tällöin puolikkaan ruudun

pinta-ala on $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32}$

Lasketaan alueiden pinta-alat.

Alueet A ja B :

Alue muodostuu kahdesta kokonaisesta ruudusta ja neljästä ruudun puolikkaasta.

$$A_A = A_B = 2 \cdot \frac{1}{16} + 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{4}$$

Alueet C ja E :

Alue muodostuu kahdesta ruudun puolikkaasta.

$$A_C = A_E = 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{16}$$

Alue D :

Alue muodostuu neljästä ruudun puolikkaasta.

$$A_D = 4 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Alue F :

Alue muodostuu yhdestä kokonaisesta ruudusta ja kahdesta ruudun puolikkaasta.

$$A_F = \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Alue G :

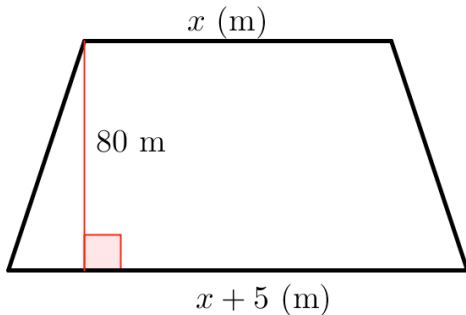
Alue muodostuu yhdestä kokonaisesta ruudusta ja kahdesta ruudun puolikkaasta.

$$A_G = \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{8}$$

Vastaus $A_A = A_B = \frac{1}{4}$, $A_C = A_E = \frac{1}{16}$ ja $A_D = A_F = A_G = \frac{1}{8}$

31

Piirretään mallikuva. Merkitään lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun pituutta metreinä kirjaimella x . Tällöin pidemmän sivun pituus on $x + 5$.



Muunnetaan pinta-alan yksikkö neliömetreiksi: $150 \text{ a} = 15\,000 \text{ m}^2$.

Muodostetaan yhtälö puolisuunnikkaan pinta-alan kaavan avulla.

$$\frac{x + x + 5}{2} \cdot 80 = 15\,000$$

$$\frac{2x + 5}{2} \cdot 80 = 15\,000$$

$$x = 185$$

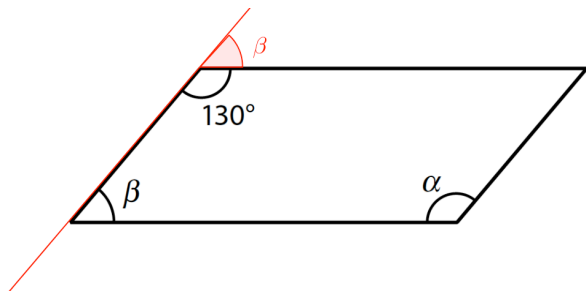
Lyhyempi sivu on siis 185 m ja pidempi sivu $185 \text{ m} + 5 \text{ m} = 190 \text{ m}$.

Vastaus 185 m ja 190 m

32

- a) Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = 130^\circ$.

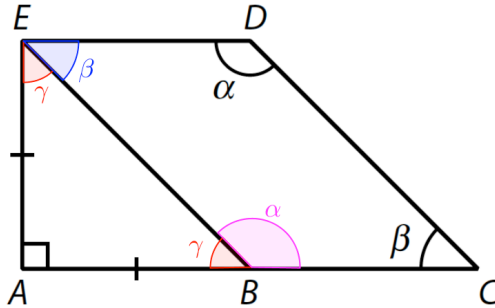
Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, joten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret.



Kulmat β ja 130° ovat siis vieruskulmia. Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$$

- b) Suunnikkaan $BCDE$ vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.
 Tasakylkisen kolmion ABC kantakulmat E ja B ovat yhtä suuret.



Lasketaan ensin kolmion tasakylkisen kolmion ABE kantakulman suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$2\gamma + 90^\circ = 180^\circ \quad | -90^\circ$$

$$2\gamma = 90^\circ \quad | :2$$

$$\gamma = 45^\circ$$

Kulma α on kulman γ vieruskulma: $\alpha = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Koska $ACDE$ on puolisuunnikas, niin sivut BC ja ED ovat yhdensuuntaiset. Täten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle AED = \sphericalangle CAE = 90^\circ$.

Lasketaan kulman β suuruus.

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

Vastaus a) $\alpha = 130^\circ$ ja $\beta = 50^\circ$ b) $\alpha = 135^\circ$ ja $\beta = 45^\circ$

33

Kahdeksankulmion kulmien summa on

$$(8 - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ.$$

Säännöllisen kahdeksankulmion kulmat ovat yhtä suuria, joten yhden kulman suuruus on

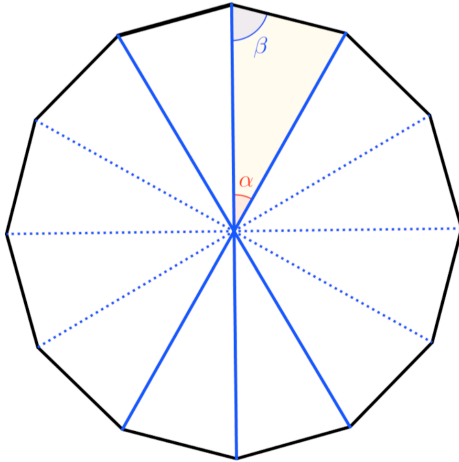
$$\frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ.$$

Vastaus 135°

34

Koska säännöllinen monikulmio voidaan jakaa 12 yhteneväksi

kolmioksi, niin $\alpha = \frac{180^\circ}{12} = 30^\circ$.



Muodostuvat kolmiot ovat tasakylkisiä, joten kantakulmat ovat yhtä suuret. Kolmion huippukulma on α . Lasketaan kantakulman suuruus.

$$\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$30^\circ + 2\beta = 180^\circ$$

$$\beta = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

Vastaus $\alpha = 30^\circ$ ja $\beta = 75^\circ$

Huomautus:

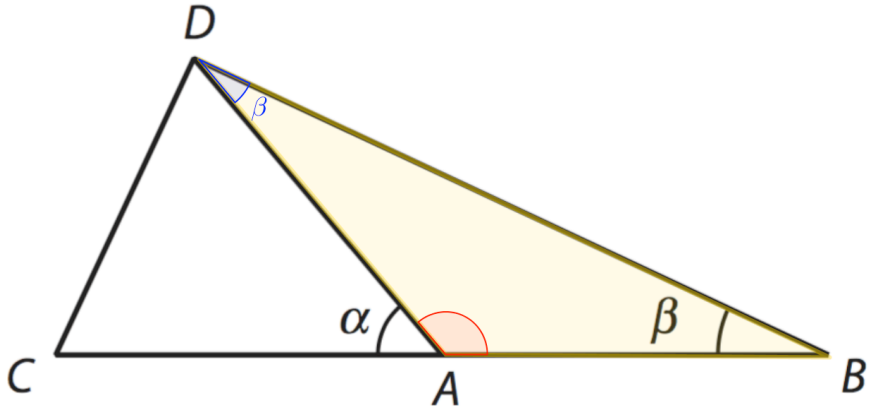
Kulman β voi ratkaista myös 12-kulmion summan avulla:

Säännöllisen 12-kulmion kulma on $\frac{(12+2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

Tällöin kulma $\beta = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

35

- a) Koska $|AD| = |AB|$, niin kolmio ABD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ADB ja DBA ovat yhtä suuret: $\sphericalangle ADB = \beta$.



Lasketaan huippukulman BAD suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

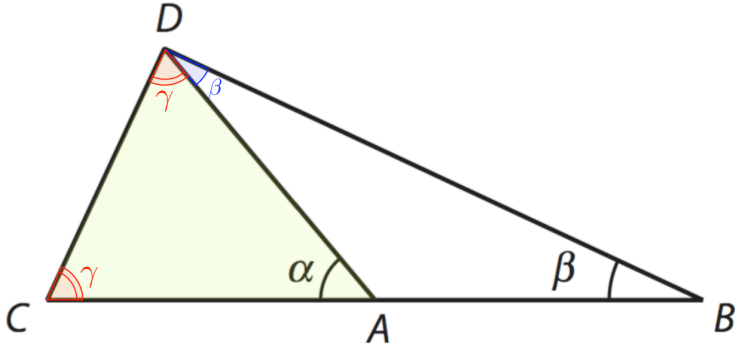
$$\sphericalangle BAD = 180^\circ - \beta - \beta = 180^\circ - 2\beta.$$

Kulma α on kulman BAD vieruskulma, joten sen suuruus on

$$\alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\beta) = 180^\circ - 180^\circ + 2\beta = 2\beta.$$

On siis osoitettu, että $\alpha = 2\beta$. \square

b) Koska $|AC| = |AD|$, niin kolmio CAD on tasakylkinen. Siten kantakulmat ACD ja CDA ovat yhtä suuret. Merkitään kulmia kirjaimella γ .



Lasketaan kulman γ suuruus kolmion kulmien summan perusteella.

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{180^\circ - \alpha}{2} \quad | \alpha = 2\beta \\ &= \frac{180^\circ - 2\beta}{2} \\ &= 90^\circ - \beta \end{aligned}$$

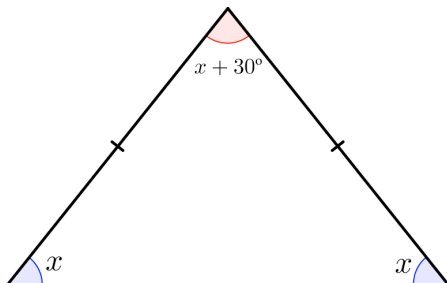
Lasketaan kulman CDB suuruus.

$$\begin{aligned} \sphericalangle CDB &= \beta + \gamma \quad | \gamma = 90^\circ - \beta \\ &= \beta + 90^\circ - \beta \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

On siis osoitettu, että kulma CDB on suora. \square

36

- a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Merkitään kantakulman suuruutta kirjaimella x . Tällöin huippukulman suuruus on $x + 30^\circ$.



Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summan perusteella ja ratkaistaan x .

$$x + x + x + 30^\circ = 180^\circ$$

$$3x + 30^\circ = 180^\circ \quad | -30^\circ$$

$$3x = 150^\circ \quad | :3$$

$$x = 50^\circ$$

Kantakulmien suuruus on siis 50° ja huippukulman $50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$.

b) Merkitään kolmion pienintä kulmaa kirjaimella x . Koska kulmien suhde on $1 : 2 : 3$, niin muut kulmat ovat $2x$ ja $3x$.

Muodostetaan yhtälö kolmion kulmien summan perusteella ja ratkaistaan x .

$$x + 2x + 3x = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ \quad | :6$$

$$x = 30^\circ$$

Kolmion kulmat ovat siis 30° , $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$ ja $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$.

Vastaus a) 50° , 50° ja 80° b) 30° , 60° ja 90°

Huomautus:

Kulman β voi ratkaista myös 12-kulmion summan avulla:

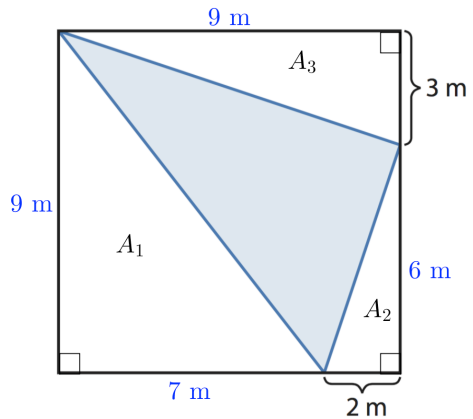
Säännöllisen 12-kulmion kulma on $\frac{(12+2) \cdot 180^\circ}{12} = 150^\circ$.

Tällöin kulma $\beta = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$.

37

Neliön pinta-ala on $A_N = 9 \cdot 9 = 81 \text{ (m}^2\text{)}$.

Väritetyn alueen pinta-ala voidaan laskea vähentämällä neliön pinta-alasta valkoisten suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat. Määritetään valkoisten kolmioiden kohtisuorien sivujen pituudet.



Lasketaan suorakulmaisten kolmioiden pinta-alat.

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 9 = 31,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = 13,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

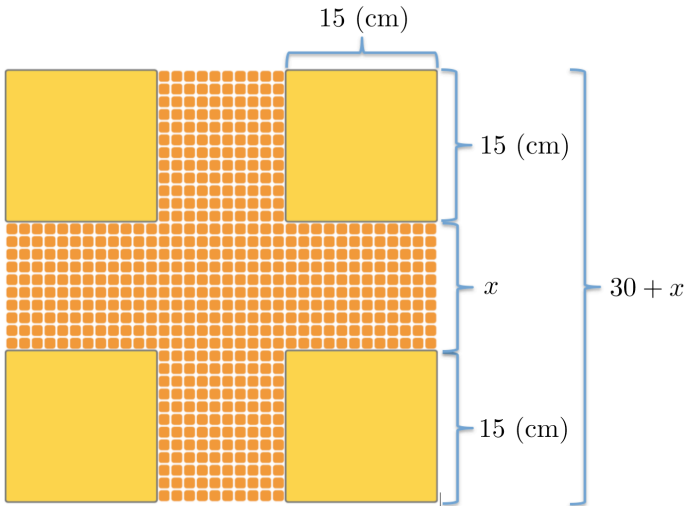
Lasketaan väritetyn alueen pinta-ala.

$$A = 81 - 31,5 - 6 - 13,5 = 30 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus 30 m^2

38

Merkitään raidan leveyttä kirjaimella x . Tällöin koko ruudukon leveys on $30 + x$.



Keltaisten laattojen yhteispinta-ala on sama kuin oranssin ristin pinta-ala. Täten keltaisten laattojen yhteispinta-ala on yhtä suuri kuin puolet koko laatoituksen pinta-alasta. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$4 \cdot 15^2 = \frac{(30 + x)^2}{2}$$

$$x = -72,426\dots \text{ (cm)} \quad \text{tai} \quad x = 12,426\dots \text{ (cm)}$$

Koska raidan leveys on positiivinen, niin $x \approx 12,4$ cm.

Vastaus 12,4 cm

39

Lasketaan alkuperäisen suunnikkaan pinta-ala.

$$A = 7 \cdot 4 = 28 \text{ (cm}^2\text{)}$$

a) Korkeus kasvaa 50%, joten uusi korkeus on $1,50 \cdot 4 \text{ cm} = 6 \text{ cm}$.

Merkitään uutta kannan pituutta kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$x \cdot 6 = 28 \quad | :6$$

$$x = \frac{14}{3} \text{ (cm)}$$

Lasketaan uuden kannan pituuden suhde alkuperäiseen pituuteen.

$$\frac{\frac{14}{3} \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 0,666\dots$$

Kannan pituus siis pienenee $1 - 0,666\dots = 0,333\dots \approx 0,33 = 33\%$.

b) Korkeus pienenee 50%, joten uusi korkeus on
 $0,50 \cdot 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$.

Merkitään uutta kannan pituutta kirjaimella x ja muodostetaan yhtälö.

$$x \cdot 2 = 28 \quad | :2$$

$$x = 14 \text{ (cm)}$$

Lasketaan uuden kannan pituuden suhde alkuperäiseen pituuteen.

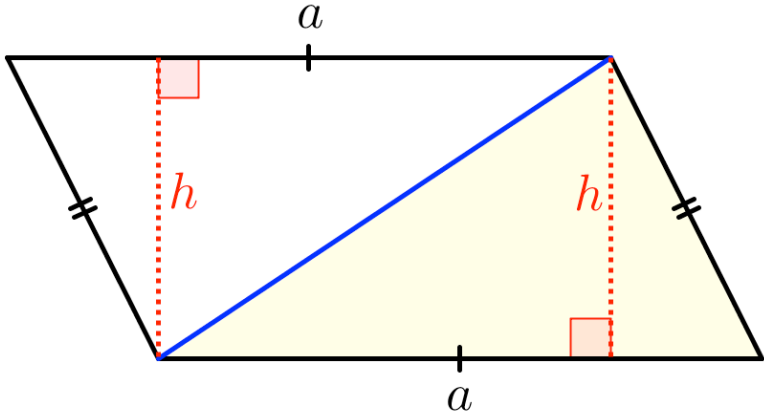
$$\frac{14 \text{ cm}}{7 \text{ cm}} = 2$$

Kannan pituus siis kasvaa $2 - 1 = 1 = 100\%$.

Vastaus a) pienenee 33% b) kasvaa 100%

40

- a) Suunnikas voidaan jakaa kahteen kolmioon. Kolmioiden pinta-alat ovat yhtä suuret, koska niillä on saman niiden kannat ovat yhtä pitkät ja niillä on sama korkeus.

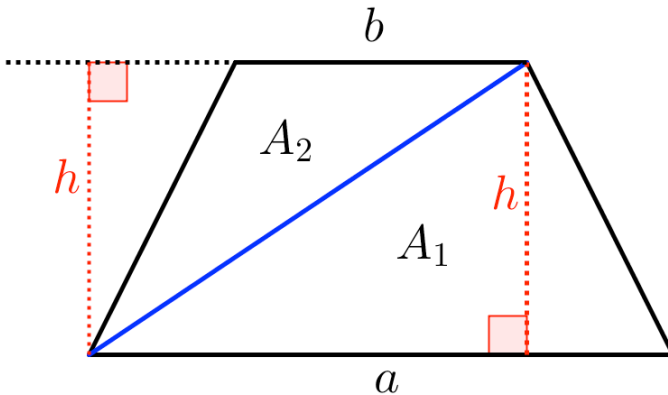


Kolmion pinta-ala $A_K = \frac{1}{2}ah$, joten suunnikkaan pinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_K = 2 \cdot \frac{1}{2}ah = ah.$$

On siis osoitettu, että suunnikkaan pinta-ala on kannan a ja korkeuden h tulo: $A = ah$. \square

- b) Merkitään puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksia kirjaimilla a ja b . Puolisuunnikas voidaan jakaa kahteen kolmioon, joilla on sama korkeus h .



Muodostetaan lausekkeet kolmioiden pinta-aloille.

$$A_1 = \frac{1}{2}ah \quad \text{ja} \quad A_2 = \frac{1}{2}bh$$

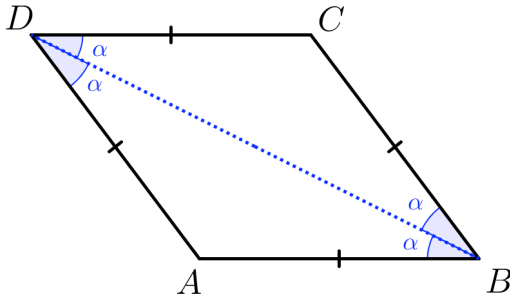
Puolisuunnikkaan pinta-alaksi saadaan

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h.$$

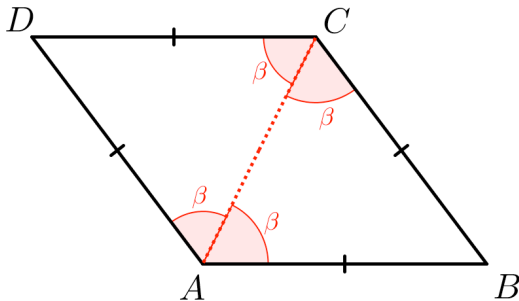
On siis osoitettu, että puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien a ja b keskiarvon ja korkeuden h tulo: $A = \frac{1}{2}(a+b)h$. \square

41

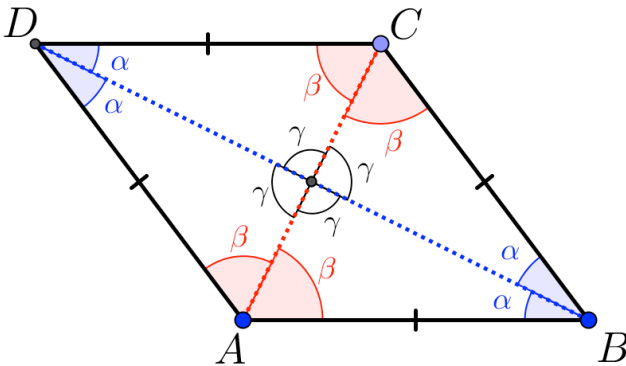
Lävistäjä BD jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon. Koska suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, niin kolmioiden huippukulmat A ja C ovat yhtä suuret. Täten myös kolmioiden ABD ja BCD kantakulmat ovat yhtä suuret.



Vastaavasti lävistäjä AC jakaa neljäkkään kahteen tasakylkiseen kolmioon, joiden kantakulmat ovat yhtä suuret.



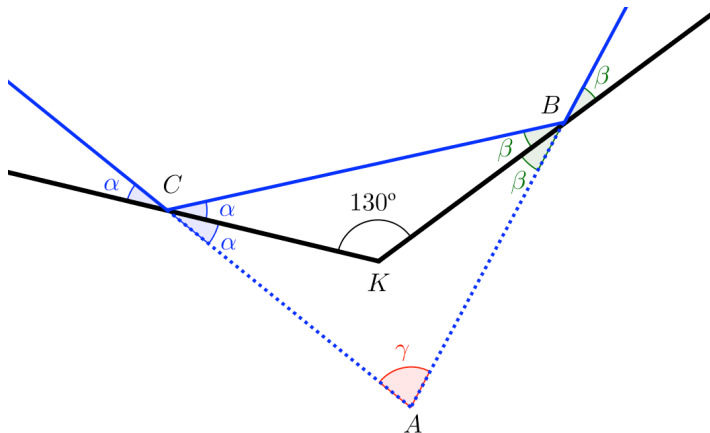
Molemmat lävistäjät jakavat neljäkkään neljään kolmioon. Jokaisessa näistä kolmioissa on kulmat α ja β . Täten kunkin kolmion kolmas kulma on yhtä suuri ($\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$). Koska kyseiset kulmat muodostavat täyden kulman, niin yhden kulman suuruus on $\gamma = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.



On siis osoitettu, että neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. \square

42

Valonsäde heijastuu peilistä samassa kulmassa kuin missä se tulee peiliin. Piirretään mallikuva ja käytetään kuvan merkintöjä. Tulevan ja lähtevän säteen välinen kulma on γ .



Kolmion KBC kulmien summasta saadaan yhteys kulmien α ja β välille.

$$\alpha + \beta + 130^\circ = 180^\circ \quad | -130^\circ$$

$$\alpha + \beta = 50^\circ \quad | -\beta$$

$$\alpha = 50^\circ - \beta$$

Muodostetaan yhtälö kolmion ABC kulmien summan perusteella ja ratkaistaan säteiden välinen kulma γ .

$$\gamma + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad | \alpha = 50^\circ - \beta$$

$$\gamma + 2(50^\circ - \beta) + 2\beta = 180^\circ$$

$$\gamma + 100^\circ - 2\beta + 2\beta = 180^\circ$$

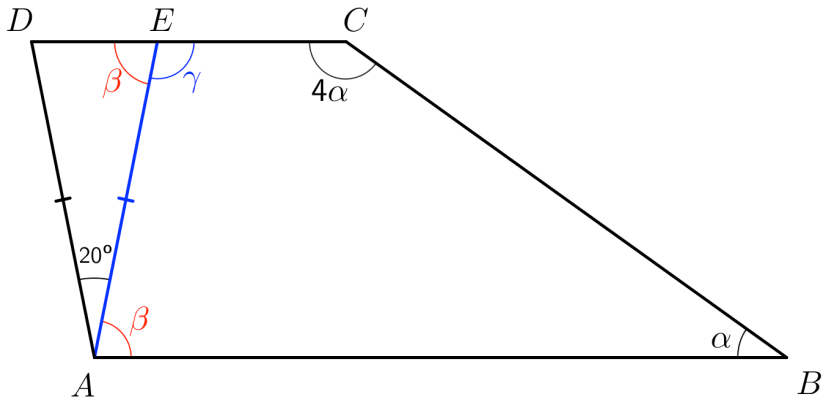
$$\gamma + 100^\circ = 180^\circ \quad | -100^\circ$$

$$\gamma = 80^\circ$$

Vastaus 80°

43

Käytetään kuvan merkintöjä.



Koska $ABCD$ on puolisuunnikas, niin $AB \parallel DC$. Täten samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret eli $\sphericalangle BAE = \sphericalangle AED = \beta$.

Ratkaistaan kulman β suuruus tasakylkisestä kolmiosta AED . Huippukulma on 20° , joten kantakulman AED suuruus on

$$\beta = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ.$$

Täten vieruskulman γ suuruus on

$$\gamma = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ.$$

Nelikulmion kulmien summa on 360° . Muodostetaan nelikulmion $ABCD$ kulmien summasta yhtälö ja ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\alpha + 4\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ \quad | \beta = 80^\circ, \gamma = 100^\circ$$

$$5\alpha + 80^\circ + 100^\circ = 360^\circ \quad | -180^\circ$$

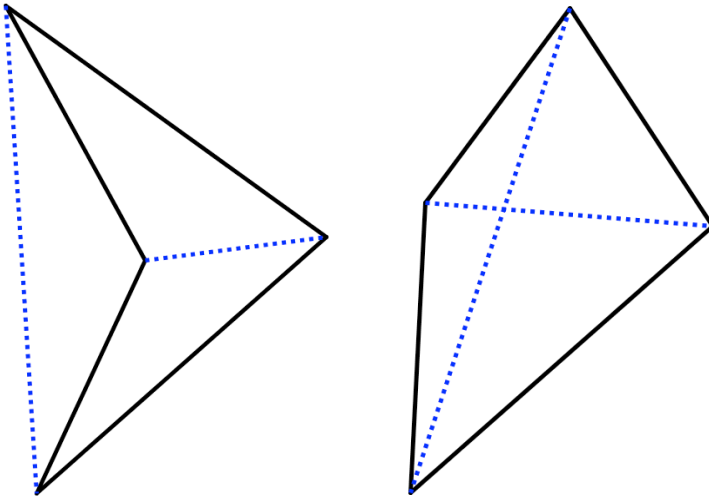
$$5\alpha = 180^\circ \quad | :5$$

$$\alpha = 36^\circ$$

Vastaus $\alpha = 36^\circ$

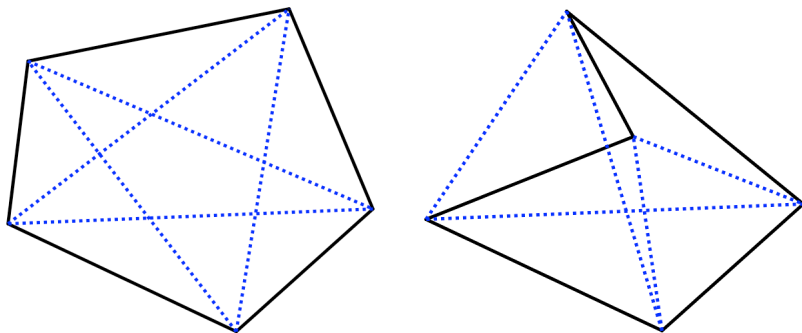
44

a) Piirretään erilaisia nelikulmioita ja niihin lävistäjät.



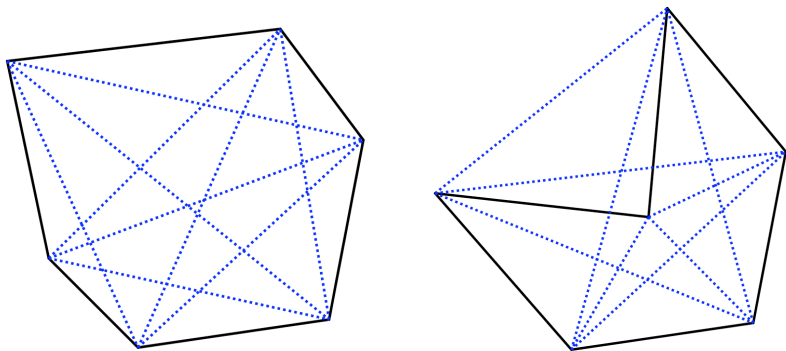
Kuvien perusteella nelikulmiossa on kaksi lävistäjää.

b) Piirretään erilaisia viisikulmioita ja niihin lävistäjät.



Kuvien perusteella viisikulmiossa on viisi lävistäjää.

c) Piirretään erilaisia kuusikulmioita ja niihin lävistäjät.



Kuvien perusteella kuusikulmiossa on yhdeksän lävistäjää

Yleisesti n -kulmiossa jokaisesta kärjestä voidaan piirtää lävistäjä kaikkiin muihin kärkiin paitsi kyseiseen kärkeen sekä sen viereisiin kärkiin. Jokaisesta kärjestä voidaan siis piirtää lävistäjä $n - 3$ kärkeen. Tällöin n -kulmiossa olisi $n \cdot (n - 3)$ lävistäjää.

Pitää kuitenkin huomioida, että piirrettäessä lävistäjä voidaan sen alkupisteeksi ajatella kumpi tahansa kärjistä, jotka lävistäjä yhdistää. Kahta kärkeä yhdistää kuitenkin aina vain yksi lävistäjä. Niinpä

lävistäjien määrä n -kulmiossa on $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

Siis

nelikulmiossa on $\frac{4 \cdot (4 - 3)}{2} = 2$ lävistäjää,

viisikulmiossa on $\frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5$ lävistäjää ja

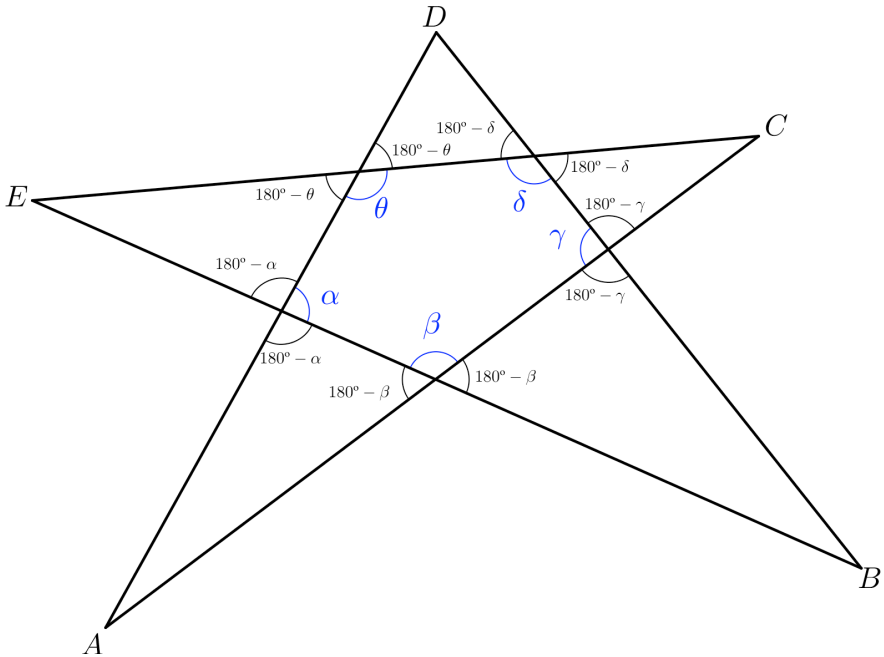
kuusikulmiossa on $\frac{6 \cdot (6 - 3)}{2} = 9$ lävistäjää.

Vastaus a) 2 b) 5 c) 9

n -kulmiossa lävistäjiä on $\frac{n \cdot (n - 3)}{2}$

45

Merkitään kuvan keskelle muodostuvan viisikulmion kulmia kirjaimilla α , β , γ , δ ja θ .



Sakaroihin muodostuvista kolmioista saadaan:

$$\sphericalangle A + 180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle A = \alpha + \beta - 180^\circ$$

$$\sphericalangle B + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma = 180^\circ$$

$$\sphericalangle B = \beta + \gamma - 180^\circ$$

$$\sphericalangle C + 180^\circ - \gamma + 180^\circ - \delta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle C = \gamma + \delta - 180^\circ$$

$$\sphericalangle D + 180^\circ - \delta + 180^\circ - \theta = 180^\circ$$

$$\sphericalangle D = \delta + \theta - 180^\circ$$

$$\sphericalangle E + 180^\circ - \theta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\sphericalangle E = \theta + \alpha - 180^\circ.$$

Viisikulmion kulmien summa on $(5-2) \cdot 180^\circ = 3 \cdot 180^\circ$.

Lasketaan kulmien A , B , C , D ja E summa.

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E$$

$$= \alpha + \beta - 180^\circ + \beta + \gamma - 180^\circ + \gamma + \delta - 180^\circ + \delta + \theta - 180^\circ + \theta + \alpha - 180^\circ$$

$$= 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \theta) - 5 \cdot 180^\circ$$

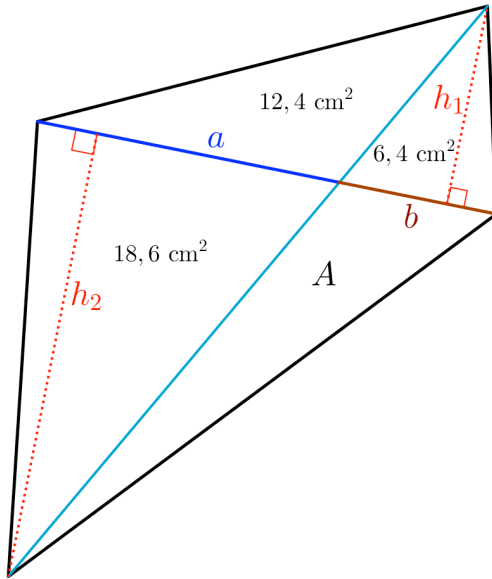
$$= 2 \cdot (3 \cdot 180^\circ) - 5 \cdot 180^\circ$$

$$= 6 \cdot 180^\circ - 5 \cdot 180^\circ = 180^\circ$$

On siis osoitettu, että kulmien A , B , C , D ja E summa on 180° eli oikokulma. \square

46

Piirretään mallikuva. Käytetään kuvan merkintöjä.



Kahden ylimmän kolmion korkeus on h_1 . Muodostetaan pinta-aloista yhtälöt.

$$\frac{1}{2}ah_1 = 12,4 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}bh_1 = 6,4$$

Jaetaan yhtälöt puolittain.

$$\frac{\frac{1}{2}a\cancel{h_1}}{\frac{1}{2}b\cancel{h_1}} = \frac{12,4}{6,4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{12,4}{6,4}$$

Kahden alimman kolmion korkeus on h_2 . Muodostetaan pinta-aloista yhtälöt.

$$\frac{1}{2}ah_2 = 18,6 \quad \text{ja} \quad \frac{1}{2}bh_2 = A$$

Jaetaan yhtälöt puolittain.

$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}}a\cancel{h_2}}{\cancel{\frac{1}{2}}b\cancel{h_2}} = \frac{18,6}{A}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{18,6}{A}$$

Saadaan siis, että $\frac{a}{b} = \frac{12,4}{6,4}$ ja $\frac{a}{b} = \frac{18,6}{A}$ eli $\frac{12,4}{6,4} = \frac{18,6}{A}$.

Ratkaistaan yhtälöstä pinta-ala A .

$$\frac{12,4}{6,4} = \frac{18,6}{A}$$

$$A = 9,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus $A = 9,6 \text{ cm}^2$