

K1

Kulma $\alpha = \beta - 35^\circ$.

a) Komplementtikulmien summa on 90° .

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta - 35^\circ + \beta = 90^\circ \quad | +35^\circ$$

$$2\beta = 125^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 62,5^\circ$$

Tällöin $\alpha = 62,5^\circ - 35^\circ = 27,5^\circ$.

b) Supplementtikulmien summa on 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta - 35^\circ + \beta = 180^\circ \quad | +35^\circ$$

$$2\beta = 215^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 107,5^\circ$$

Tällöin $\alpha = 107,5^\circ - 35^\circ = 72,5^\circ$.

c) Eksplementtikulmien summa on 360° .

$$\alpha + \beta = 360^\circ$$

$$\beta - 35^\circ + \beta = 360^\circ \quad | +35^\circ$$

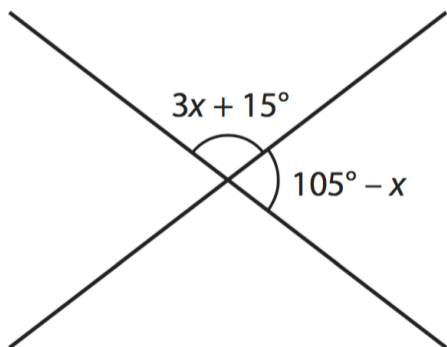
$$2\beta = 395^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 197,5^\circ$$

Tällöin $\alpha = 197,5^\circ - 35^\circ = 162,5^\circ$.

Vastaus

- a) $\alpha = 27,5^\circ$
- b) $\alpha = 72,5^\circ$
- c) $\alpha = 162,5^\circ$

K2

Vieruskulmien summa on 180° . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muuttuja x .

$$3x + 15^\circ + 105^\circ - x = 180^\circ$$

$$2x + 120^\circ = 180^\circ \quad | -120^\circ$$

$$2x = 60^\circ \quad | :2$$

$$x = 30^\circ$$

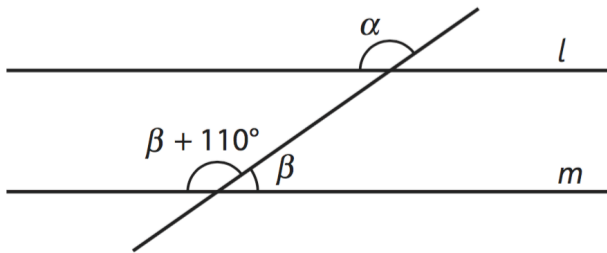
Määritetään kulmat.

$$3x + 15^\circ = 3 \cdot 30^\circ + 15^\circ = 105^\circ$$

$$105^\circ - x = 105^\circ - 30^\circ = 75^\circ$$

Suorien välinen kulma on näistä pienempi eli 75° .

Vastaus 75°

K3

Kulmat β ja $\beta+110^\circ$ ovat vieruskulmia. Muodostetaan yhtälö.

$$\beta + \beta + 110^\circ = 180^\circ \quad | -110^\circ$$

$$2\beta = 70^\circ \quad | :2$$

$$\beta = 35^\circ$$

Koska suorat l ja m ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat α ja $\beta+110^\circ$ ovat yhtä suuret. Määritetään kulma α .

$$\alpha = \beta + 110^\circ = 35^\circ + 110^\circ = 145^\circ$$

Vastaus $\alpha = 145^\circ$ ja $\beta = 35^\circ$

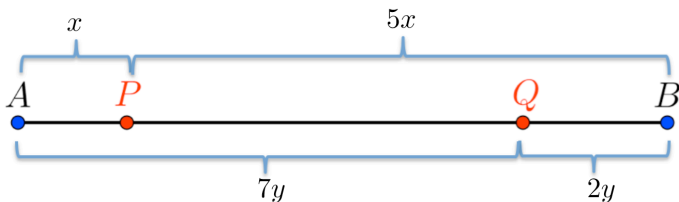
K4

Koska piste P jakaa janan AB suhteessa $1 : 5$, niin

$$|AP| = x \text{ ja } |PB| = 5x.$$

Vastaavasti, koska piste Q jakaa janan AB suhteessa $7 : 2$, niin

$$|AQ| = 7y \text{ ja } |QB| = 2y.$$



Jana AB pituus on 18. Lasketaan janan AP pituus.

$$x + 5x = 18$$

$$6x = 18 \quad | :6$$

$$x = 3$$

Siis $|AP| = x = 3$.

Lasketaan janan AQ pituus.

$$7y + 2y = 18$$

$$9y = 18 \quad | :9$$

$$y = 2$$

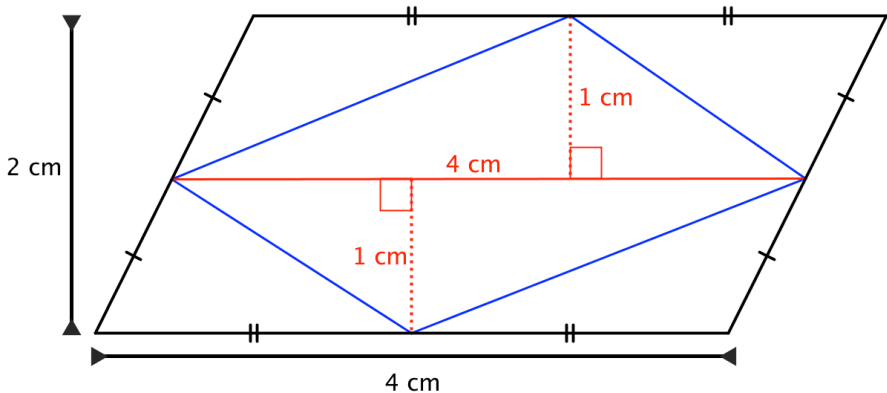
Siis $|AQ| = 7y = 7 \cdot 2 = 14$

Lasketaan lopuksi janan PQ pituus.

$$|PQ| = |AQ| - |AP| = 14 - 3 = 11$$

Vastaus $|PQ| = 11$

K5



Kun sisempi suunnikas jaetaan kuvan mukaisesti kahteen osaan lävistäjällä, saadaan kaksi kolmiota, joiden molempien kanta on 4 cm ja korkeus 1 cm.

Lasketaan suunnikkaan pinta-ala näiden kolmioiden pinta-alojen summana.

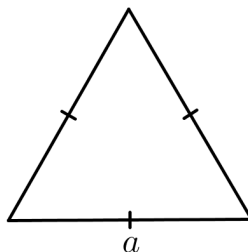
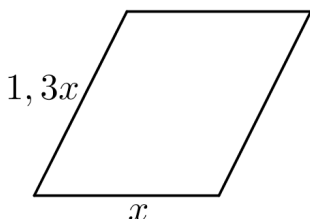
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm} = 4 \text{ cm}^2$$

Vastaus 4 cm²

K6

Merkitään suunnikkaan lyhyempää sivua kirjaimella x . Tällöin pidempi sivu on tällöin $1,3x$.

Merkitään kolmion sivun pituutta kirjaimella a .



Kolmion piiri on yhtä suuri kuin suunnikkaan piiri. Muodostetaan yhtälö.

$$3a = 2x + 2 \cdot 1,3x$$

$$3a = 4,6x \quad | :3$$

$$a = 1,533\dots x \approx 1,53x$$

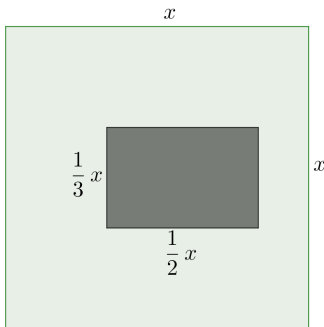
Kolmion sivu on siis $1,53 - 1 = 0,53 = 53\%$ pidempi kuin suunnikkaan lyhyempi sivu.

Vastaus 53%

K7

Merkitään neliön muotoisen tontin sivun pituutta kirjaimella x .

Talon pitempi sivu on tällöin $\frac{1}{2}x$ ja lyhyempi sivu $\frac{1}{3}x$.



Piha-alueen pinta-ala saadaan vähentämällä tontin pinta-alasta talon pinta-ala. Muodostetaan piha-alueen pinta-alan avulla yhtälö ja ratkaistaan tontin pinta-ala x^2 .

$$x \cdot x - \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}x = 400$$

$$\frac{5}{6}x^2 = 400 \quad \left| \cdot \frac{6}{5} \right.$$

$$x^2 = 480 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus 480 m^2

K8

Lasketaan kymmenkulmion kulmien summa.

$$(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$$

Lasketaan monikulmion kulmien summa.

$$1,75 \cdot 1440^\circ = 2520^\circ$$

Muodostetaan kulmien summan avulla yhtälö ja ratkaistaan kulmien lukumäärä n .

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 2520^\circ$$

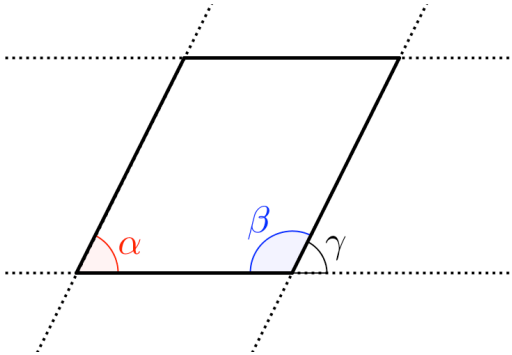
$$n = 16$$

Vastaus 16 kulmaa

K9

Tapa 1

Piirretään suunnikas ja jatketaan sen sivuja. Käytetään kuvan merkintöjä.



Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, niin samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret. Siis $\gamma = \alpha$.

Kulmat γ ja β ovat vieruskulmia, joten niiden summa on 180° .

Saadaan siis

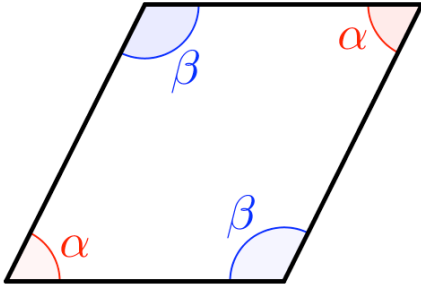
$$\gamma + \beta = 180^\circ \quad | \gamma = \alpha$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

On siis osoitettu, että vierekkäisten kulmien α ja β summa on 180° . \square

Tapa 2

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret ja nelikulmion kulmien summa on 180° .



Muodostetaan yhtälö.

$$2\alpha + 2\beta = 360^\circ$$

$$2(\alpha + \beta) = 360^\circ \quad | :2$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

On siis osoitettu, että vierekkäisten kulmien α ja β summa on 180° . □

K10

Merkitään kysyttyä leveyttä kirjaimella x ja ratkaistaan se vastinpituuksien verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{71} = \frac{55}{32}$$

$$32x = 3905$$

$$x = 122,03125$$

$$x \approx 122 \text{ (cm)}$$

Kerrotaan ristiin.

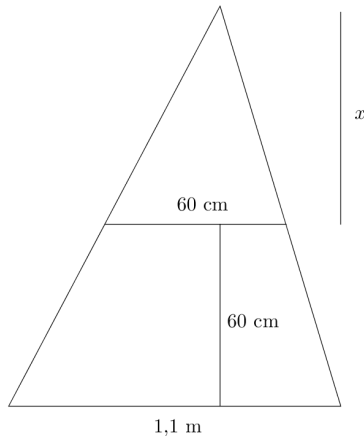
$$| : 32$$

55 tuumaisen television ruudun leveys on noin 122 cm.

Vastaus Ruudun leveys on 122 cm.

K11

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kuvion sisäkkäiset kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen, sekä vaakasuorien kantojen rajaamat samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat.

Ratkaistaan pienen kolmion korkeus x verrantoyhtälöstä.
Huomataan vielä, että $1,1 \text{ m} = 110 \text{ cm}$.

$$\frac{x}{x + 60} = \frac{60}{110}$$

Kerrotaan ristiin.

$$110x = 60(x + 60)$$

$$110x = 60x + 3600$$

$$50x = 3600$$

$$| : 50$$

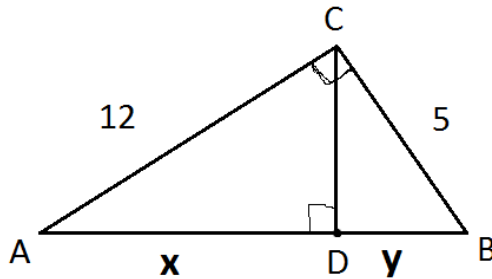
$$x = 72 \text{ (cm)}$$

Suuren kolmion korkeus on $x + 60 \text{ cm} = 72 \text{ cm} + 60 \text{ cm} = 132 \text{ cm} \approx 1,3 \text{ m}$.

Vastaus Korkeus on $1,3 \text{ m}$.

K12

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Harjoitustehtävän 60 perusteella kaikki kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia. Ratkaistaan ensin pituus x kolmioista ABC ja ACD .

$\frac{ AB }{ AC } = \frac{ AC }{ AD }$	
$\frac{13}{12} = \frac{12}{x}$	Kerrotaan ristiin.
$13x = 144$	$: 13$
$x = \frac{144}{13}$	

Ratkaistaan sitten y kolmioista ABC ja CBD .

$\frac{ AB }{ CB } = \frac{ CB }{ DB }$	
$\frac{13}{5} = \frac{5}{y}$	Kerrotaan ristiin.
$13y = 25$	$: 13$
$y = \frac{25}{13}$	

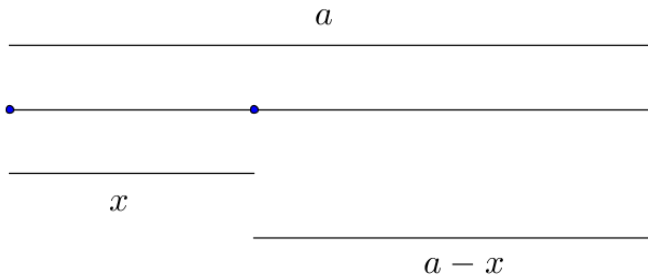
Suhteeksi saadaan

$$x : y = \frac{144}{13} : \frac{25}{13} = \frac{144}{13} \cdot \frac{13}{25} = \frac{144}{25} = 144 : 25.$$

Vastaus $x : y = 144 : 25.$

K13

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Ratkaistaan ensin lauseke lyhyemmän osan pituudelle x verrantoyhtälöstä ja lasketaan sitten suhde $x : (a - x)$.

$$\frac{x}{a-x} = \frac{a-x}{a}$$

$$(a-x)^2 = ax$$

$$a^2 - 2ax + x^2 = ax$$

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$x = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a$$

$$\left(\text{tai } x = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a \right)$$

Kun $x = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} a$, niin

$$a-x = a - \frac{3-\sqrt{5}}{2} a = \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a.$$

Kerrotaan ristiin.

Ratkaistaan yhtälö laskimella.
 x on lyhyempi pituus.

Kysytyksi suhteeksi saadaan tällöin

$$(a-x):a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} a \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618. \quad (x:(a-x) = (a-x):a)$$

Mittakaava on siis $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

Vastaus Mittakaava on $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$.

K14

Lasketaan pienoismallin mittakaava k . Tilavuuksien suhde on 1 : 100 ja toisaalta tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k^3 = \frac{1}{100}$$

$$k = \sqrt[3]{\frac{1}{100}} = \frac{1}{\sqrt[3]{100}}$$

Pienoismallin mitata saadaan nyt kertomalla alkuperäiset arvot mittakaavan arvolla.

$$\text{Leveys: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 2,00 \text{ m} = 0,4308\dots \text{ m} \approx 0,431 \text{ m} = 43,1 \text{ cm}$$

$$\text{Pituus: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 1,00 \text{ m} = 0,2154\dots \text{ m} \approx 0,215 \text{ m} = 21,5 \text{ cm}$$

$$\text{Korkeus: } \frac{1}{\sqrt[3]{100}} \cdot 3,00 \text{ m} = 0,6463\dots \text{ m} \approx 0,646 \text{ m} = 64,6 \text{ cm}$$

Vastaus Leveys on 43,1 cm, pituus on 21,5 cm,
korkeus on 64,6 cm.

K15

Merkitään pienoismallin siiven alaa A . Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö ja ala ratkeaa verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{190} = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \quad | \cdot 190$$

$$A = \left(\frac{1}{75}\right)^2 \cdot 190$$

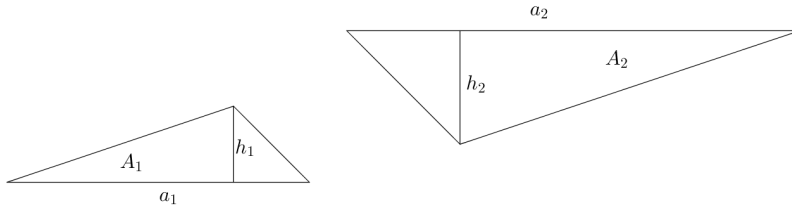
$$A = 0,033377\dots \text{ (m}^2\text{)}$$

Pienoismallin siiven ala on siis noin
 $0,033377\dots \text{ m}^2 = 337,7\dots \text{ cm}^2 \approx 340 \text{ cm}^2$.

Vastaus Pinta-ala on 340 cm^2 .

K16

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.



Kolmioiden välinen mittakaava on k vastinpituuksien suhde, eli

$k = \frac{a_2}{a_1}$ ja $k = \frac{h_2}{h_1}$. Tutkitaan pinta-alojen suhdetta.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}a_2h_2}{\frac{1}{2}a_1h_1} = \frac{a_2h_2}{a_1h_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{h_2}{h_1} = k \cdot k = k^2$$

Täten pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

□

K17

a) Uudet pituudet saadaan suoraan prosenttikertoimen avulla. Nyt 15% pienennystä vastaa kerroin $100\% - 15\% = 85\% = 0,85$. Uudet pituudet ovat

$$0,85 \cdot 18 \text{ cm} = 15,3 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm} \quad \text{ja}$$

$$0,85 \cdot 30 \text{ cm} = 25,5 \text{ cm} \approx 26 \text{ cm}.$$

b) Lasketaan ensin mittakaava käyttäen hyväksi tietoa, jonka mukaan pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö. Pinta-alojen suhde on nyt

$$\frac{0,85A}{A} = 0,85.$$

Saadaan seuraava yhtälö.

$$k^2 = 0,85$$

$$k = \sqrt{0,85}$$

Uudet pituudet saadaan nyt kertomalla vanhat mittakaavan arvolla.

$$\sqrt{0,85} \cdot 18 \text{ cm} = 16,5951\dots \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$$

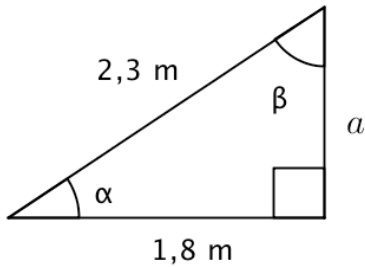
$$\sqrt{0,85} \cdot 30 \text{ cm} = 27,6586\dots \text{ cm} \approx 28 \text{ cm}$$

Vastaus Uudet pituudet ovat

a) 15 cm ja 26 cm

b) 17 cm ja 28 cm.

K18



a) Lasketaan toisen kateetin pituus a Pythagoraan lauseella.

$$2,3^2 = 1,8^2 + a^2$$

$$a^2 = 2,3^2 - 1,8^2$$

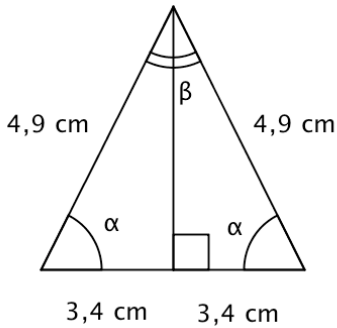
$$a = (\pm)\sqrt{2,3^2 - 1,8^2} = 1,43\dots \approx 1,4 \text{ (m)}$$

b) Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma. Lasketaan kulma α .

$$\cos \alpha = \frac{1,8}{2,3} = 38,49\dots^\circ \approx 38^\circ$$

Vastaus a) 1,4 m b) 38°

K19



Kantakulmat:

$$\cos \alpha = \frac{3,4}{4,9}$$

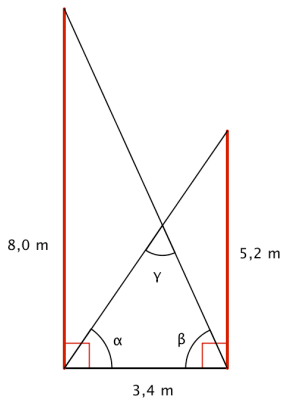
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{3,4}{4,9} = 46,06\dots^\circ \approx 46^\circ$$

Huippukulma:

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 46,06\dots^\circ = 87,87\dots^\circ \approx 88^\circ$$

Vastaus $46^\circ, 46^\circ$ ja 88°

K20



Lasketaan kulmat α ja β suorakulmaisista kolmioista.

$$\tan \alpha = \frac{5,2}{3,4} = 1,52\dots$$

$$\alpha = \tan^{-1} 1,52\dots = 56,82\dots^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{8,0}{3,4} = 2,35\dots$$

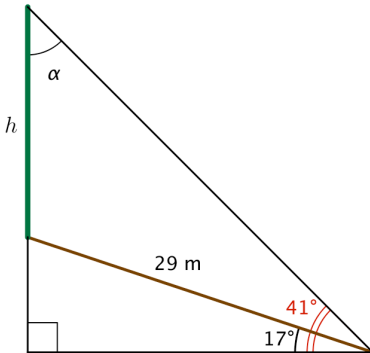
$$\beta = \tan^{-1} 2,35\dots = 66,97\dots^\circ$$

Lasketaan kulma γ .

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 56,82\dots^\circ - 66,97\dots^\circ = 56,20\dots^\circ \approx 56^\circ (< 90^\circ)$$

Vaijerien välinen kulma on 56° .

Vastaus 56°

K21

Lasketaan kysytty puun korkeus h sinilauseella.

$$\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

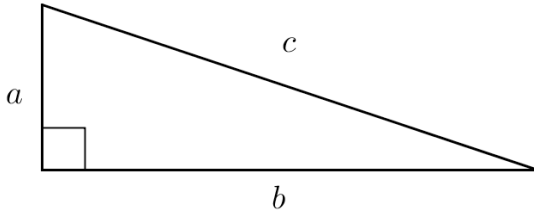
$$\frac{h}{\sin(41^\circ - 17^\circ)} = \frac{29}{\sin \alpha}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{29}{\sin \alpha} \cdot \sin 24^\circ \\ &= \frac{29}{\sin 49^\circ} \cdot \sin 24^\circ \\ &= 15,62\dots \\ &\approx 16 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Puun pituus on 16 m.

Vastaus 16 m

K22



Sivuista pisin on hypotenuusa.

Pythagoraan lauseen mukaan $c^2 = a^2 + b^2$.

- a) Jono a, b, c on geometrinen, joten jonon peräkkäisten termien suhde on vakio q .

Tällöin $b = a \cdot q$ ja $c = b \cdot q = a \cdot q^2$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(a \cdot q^2)^2 = a^2 + (a \cdot q)^2$$

$$a^2 \cdot q^4 = a^2 + a^2 \cdot q^2 \quad | : a^2 \ (\neq 0)$$

$$q^4 = 1 + q^2$$

$$q^4 - q^2 - 1 = 0$$

$$(q^2)^2 - q^2 - 1 = 0$$

Ratkaistaan bikvadraattinen
yhtälö.

$$q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$q > 0$, koska jonon
kaikki termit positiivisia.
Vain +-merkki kelpaa.

$$q^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$q = (\pm) \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

Jonon suhdeluku on $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

b) Jono a, b, c on aritmeettinen, joten jonon peräkkäisten termien erotus on vakio d .

Tällöin $a = b - d$ ja $c = b + d$.

Pythagoraan lauseen mukaan

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$(b + d)^2 = (b - d)^2 + b^2$$

$$b^2 + 2 \cdot b \cdot d + d^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot d + d^2 + b^2$$

$$b^2 - 4bd = 0 \quad | : b (> 0)$$

$$b - 4d = 0$$

$$b = 4d$$

Koska $b = 4d$, niin

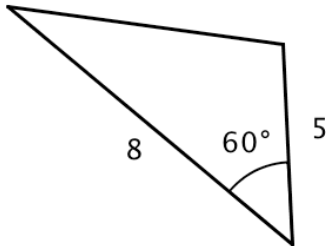
$$a = b - d = 4d - d = 3d \quad \text{ja} \quad c = b + d = 4d + d = 5d.$$

Saadaan kysytty suhde

$$a : b : c = 3d : 4d : 5d = 3 : 4 : 5.$$

Vastaus a) $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ b) $3 : 4 : 5$

K23



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \quad \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

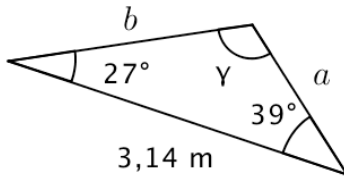
$$= 10\sqrt{3}$$

$$= 17,320\dots$$

$$\approx 17,32$$

Vastaus a) $10\sqrt{3}$ b) 17,32

K24



- a) Kolmion kolmas kulma on $\gamma = 180^\circ - 27^\circ - 39^\circ = 114^\circ$.

Lasketaan sivut a ja b sinilauseella.

$$\frac{a}{\sin 27^\circ} = \frac{3,14}{\sin 114^\circ}$$

$$a = \frac{3,14 \cdot \sin 27^\circ}{\sin 114^\circ} = 1,560\dots \approx 1,56 \text{ (m)}$$

$$\frac{b}{\sin 39^\circ} = \frac{3,14}{\sin 114^\circ}$$

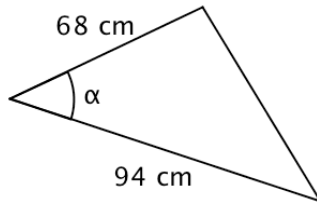
$$b = \frac{3,14 \cdot \sin 39^\circ}{\sin 114^\circ} = 2,163\dots \approx 2,16 \text{ (m)}$$

- b) Kolmion pinta-ala:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot a \cdot \sin 39^\circ = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 1,560\dots \cdot \sin 39^\circ \\ &= 1,541\dots \approx 1,54 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus a) 114° , 1,56 m ja 2,16 m b) $1,54 \text{ m}^2$

K25



Pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun kulma $\alpha = 90^\circ$.

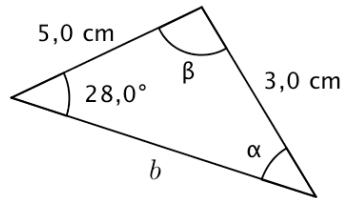
Pinta-ala on tällöin $A = \frac{0,68 \text{ m} \cdot 0,94 \text{ m}}{2} = 0,3196 \text{ m}^2 < 0,40 \text{ m}^2$

Ei siis ole mahdollista valmistaa puusepän suunnittelemaa pöytää.

Vastaus ei mahdollista

K26

Lasketaan 5,0 cm pituisen sivun vastainen kulma sinilauseella.



$$\frac{5,0}{\sin \alpha} = \frac{3,0}{\sin 28,0^\circ}$$

$$\sin \alpha = \frac{5,0 \cdot \sin 28,0^\circ}{3,0} = 0,782\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,782\dots = 51,48\dots^\circ \text{ tai } \alpha = 180^\circ - 51,48\dots^\circ = 128,51\dots^\circ$$

Kolmion kolmas kulma on tällöin

- Jos $\alpha = 51,48\dots^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 28,0^\circ - 51,48\dots^\circ = 100,51\dots^\circ \approx 100,5^\circ$ (kelpaa).
- Jos $\alpha = 128,51\dots^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 28,0^\circ - 128,51\dots^\circ = 23,48\dots^\circ \approx 23,5^\circ$ (ei kelpaa, koska kolmion pienin kulma on 28°).

Siis kolmion suurin kulma on $100,5^\circ$ ja pisin sivu on tämän suurimman kulman vastainen sivu b .

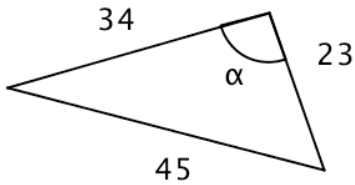
Lasketaan pisimmän sivun pituus sinilauseella.

$$\frac{b}{\sin 100,51\dots^\circ} = \frac{3,0}{\sin 28,0^\circ}$$

$$b = \frac{3,0 \cdot \sin 100,51\dots^\circ}{\sin 28,0^\circ} = 6,28\dots \approx 6,3 \text{ (cm)}$$

Vastaus Pisin sivu 6,3 cm, suurin kulma $100,5^\circ$.

K27



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma α .

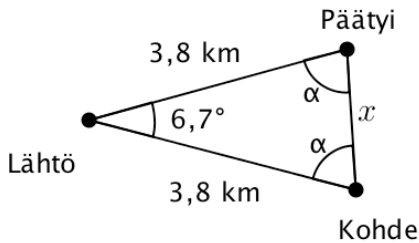
Käytetään kosinilauseetta.

$$45^2 = 34^2 + 23^2 - 2 \cdot 34 \cdot 23 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{45^2 - 34^2 - 23^2}{-2 \cdot 34 \cdot 23} = -0,217\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} - 0,217\dots = 102,55\dots^\circ \approx 102,6^\circ$$

Vastaus $102,6^\circ$

K28

Syntyy tasakylkinen kolmio.

Kantakulmat ovat

$$\alpha = \frac{180^\circ - 6,7^\circ}{2} = 86,65^\circ$$

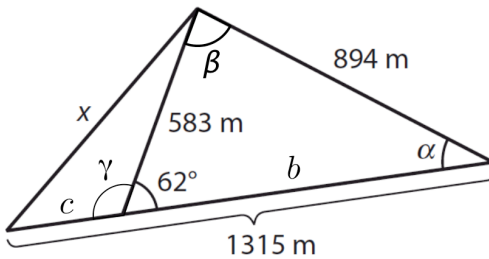
Lasketaan kysytty etäisyys x sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin 6,7^\circ} = \frac{3,8}{\sin 86,65^\circ}$$

$$x = \frac{3,8 \cdot \sin 6,7^\circ}{\sin 86,65^\circ} = 0,4441\dots \approx 0,44 \text{ (km)}$$

Veneilijä päätyy 0,44 km eli 440 metrin päähän kohteestaan.

Vastaus 440 m

K29

Kulma α saadaan sinilauseella.

$$\frac{583}{\sin \alpha} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$583 \sin 62^\circ = 894 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{583 \sin 62^\circ}{894} = 0,575\dots$$

$$\alpha = 35,155\dots^\circ \approx 35,2^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 35,155\dots^\circ = 144,844\dots^\circ \approx 145^\circ$$

Kulma β :

- Jos $\alpha = 35,155\dots^\circ$, niin $\beta = 180^\circ - 35,155\dots^\circ - 62^\circ = 82,844\dots^\circ$.
Tämä kelpaa kolmion kulmaksi.

- Jos $\alpha = 144,844\dots^\circ$, niin $\beta = 180^\circ - 144,844\dots^\circ - 62^\circ = -26,844\dots^\circ$.
Tämä ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten tapaus $\alpha = 144,844\dots^\circ$ hylätään.

Sivujen pituudet b ja c :

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$\frac{b}{\sin 82,844\dots^\circ} = \frac{894}{\sin 62^\circ}$$

$$b = \frac{894 \cdot \sin 82,844\dots^\circ}{\sin 62^\circ} = 1004,632\dots \text{ (km)}$$

$$c = 1315 \text{ m} - 1004,632\dots \text{ m} = 310,367\dots \text{ m}$$

Kulma γ :

$$\gamma = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$$

Sivun pituus x saadaan kosinilauseella.

$$x^2 = c^2 + 583^2 - 2 \cdot c \cdot 583 \cdot \cos \gamma$$

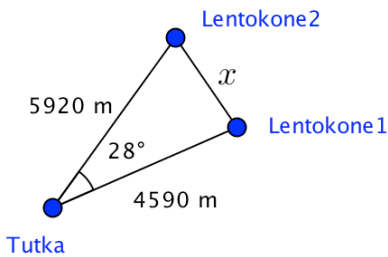
$$= (310,367\dots)^2 + 583^2 - 2 \cdot 310,367\dots \cdot 583 \cdot \cos 118^\circ$$

$$= 606\,113,16\dots$$

$$x = (\pm)\sqrt{606\,113,16\dots} = 778,53\dots \approx 779 \text{ (m)}$$

Vastaus $x = 779 \text{ m}$, $\alpha = 35,2^\circ (\approx 35^\circ)$

K30



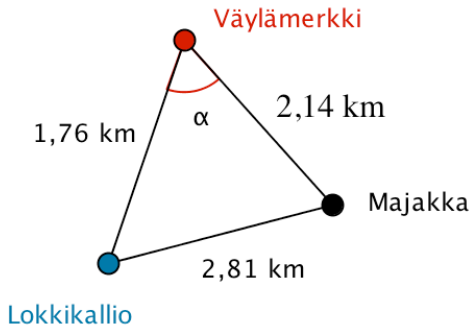
Lentokoneiden välinen etäisyys saadaan kosinilauseella.

$$\begin{aligned}x^2 &= 5920^2 + 4590^2 - 2 \cdot 5920 \cdot 4590 \cdot \cos 28^\circ \\&= 8\,130\,183,29\dots \text{ (m}^2\text{)} \\x &= \sqrt{8\,130\,183,29\dots} = 2851,34\dots \approx 2850 \text{ (m)}\end{aligned}$$

Lentokoneiden välinen etäisyys on 2850 m.

Vastaus 2850 m

K31



Kysytty kulma saadaan laskettua kosinilauseen avulla.

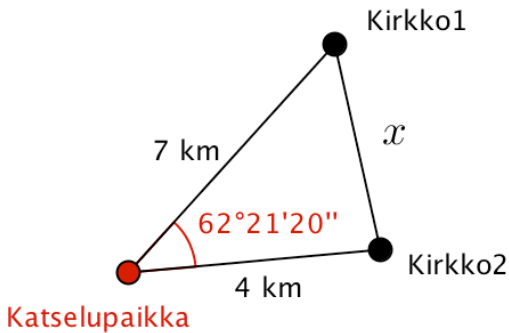
$$2,81^2 = 1,76^2 + 2,14^2 - 2 \cdot 1,76 \cdot 2,14 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2,81^2 - 1,76^2 - 2,14^2}{-2 \cdot 1,76 \cdot 2,14} = -0,029\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,029\dots) = 91,66\dots^\circ \approx 92^\circ$$

Vastaus 92°

K32



Katselusuuntien välinen kulma on

$$62^{\circ} 21' 20'' = 62^{\circ} + \frac{21^{\circ}}{60} + \frac{20^{\circ}}{60 \cdot 60} = 62,3555...^{\circ}$$

Kysytty etäisyys saadaan kosinilauseen avulla.

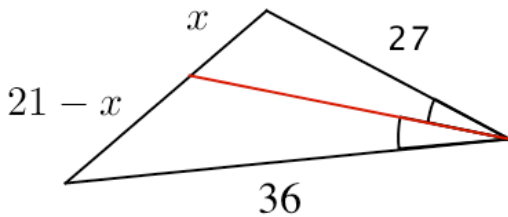
$$\begin{aligned} x^2 &= 7^2 + 4^2 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \cos 62,3555...^{\circ} \\ &= 39,016... \text{ (km}^2\text{)} \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{39,016...} = 6,246... \approx 6 \text{ (km)}$$

Kirkot ovat 6 km etäisyydellä toisistaan.

Vastaus 6 km

K33



Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

Merkitään osien pituuksia x ja $12 - x$.

Kulmanpuolittajalauseen avulla saadaan yhtälö.

$$\frac{x}{21-x} = \frac{27}{36}$$

$$36x = 27 \cdot (21 - x)$$

$$36x = 27 \cdot 21 - 27x$$

$$36x + 27x = 567$$

$$63x = 567$$

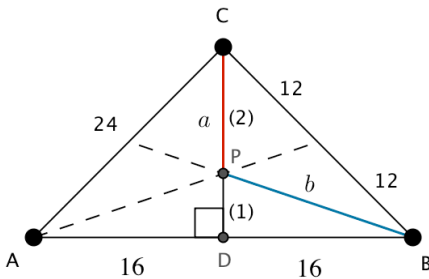
$$x = \frac{567}{63} = 9$$

$$21 - x = 21 - 9 = 12$$

Osien pituudet ovat 9 ja 12.

Vastaus 9 ja 12

K34



Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspiste, joka jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien.

Tasakylkisen kolmion kannalle piirretty korkeusjana on samalla mediaani. Lasketaan kolmion korkeus.

$$24^2 = 16^2 + |CD|^2$$

$$|CD|^2 = 24^2 - 16^2 = 320$$

$$|CD| = (\pm)\sqrt{320} = \sqrt{16 \cdot 20} = \sqrt{16 \cdot 4 \cdot 5} = 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

a) Painopisteen P etäisyys huippukulman kärjestä:

$$a = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot 8\sqrt{5} = \frac{16}{3}\sqrt{5}$$

K35

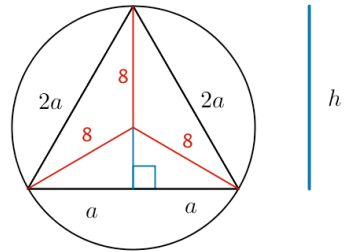
Merkitään tasasivuisen kolmion sivun pituutta $2a$:lla ja korkeutta h :lla.

Lasketaan korkeus h .

$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| = \sqrt{3}a \quad | a > 0$$



Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$8^2 = a^2 + (h-8)^2$$

$$8^2 = a^2 + (\sqrt{3}a-8)^2$$

$$8^2 = a^2 + (\sqrt{3}a)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}a \cdot 8 + 8^2$$

$$a^2 + 3a^2 = 16\sqrt{3}a$$

$$4a^2 = 16\sqrt{3}a \quad | :4a (> 0)$$

$$a = 4\sqrt{3}$$

Kolmion sivun pituus on

$$2a = 2 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

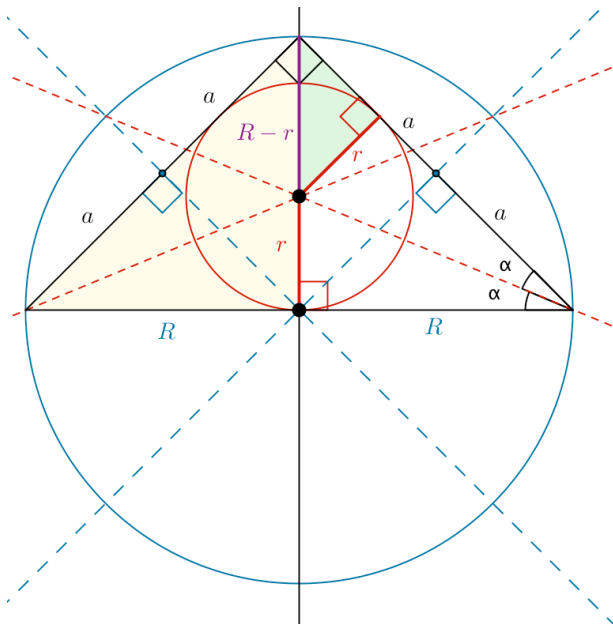
Vastaus $8\sqrt{3}$

K36

Piirretään tilanteesta mallikuva. Merkitään kolmion kyljen pituutta $2a$:lla.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion korkeusjana on eräs keskinormaaleista.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion korkeusjana on eräs kulmanpuolittaja.



On laskettava suhde $\frac{R}{r}$.

Kolmion kannan puolikas on ympäri piirretyn ympyrän säde R .

$$(2R)^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$

$$4R^2 = 4a^2 + 4a^2$$

$$4R^2 = 8a^2$$

$$R^2 = 2a^2$$

$$R = (\pm)\sqrt{2}a = \sqrt{2}a$$

Kuvaan merkityt keltainen ja vihreä kolmio ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa huippukulman puolikas ja suora kulma).

Vastinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{R-r}{2a} = \frac{r}{R}$$

$$R^2 - rR = 2ar \quad \Big| \quad R = \sqrt{2}a$$

$$(\sqrt{2}a)^2 - r \cdot \sqrt{2}a = 2ar$$

$$2a^2 = 2ar + \sqrt{2}ar$$

$$2a^2 = ar(2 + \sqrt{2})$$

$$r = \frac{2a^2}{a(2 + \sqrt{2})} = \frac{2a}{2 + \sqrt{2}}$$

Kysytty suhde on

$$\begin{aligned}\frac{R}{r} &= \frac{\sqrt{2}a}{\frac{2a}{2+\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2} \cancel{a} \cdot (2+\sqrt{2})}{2 \cancel{a}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}+2}{2} \\ &= \frac{2(\sqrt{2}+1)}{2} \\ &= \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

Vastaus $\sqrt{2}+1$

K37Perhepizza: halkaisija $d = 35$ cm

$$\text{säde } r_p = \frac{35}{2}$$

Normaalipizza ja perhepizza ovat yhdenmuotoiset. Pinta-alojen suhde on $1 : 2$. Säteiden suhteen neliö on pinta-alojen suhde. Olkoon normaalipizzan säde r_n .

$$\left(\frac{r_n}{r_p}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

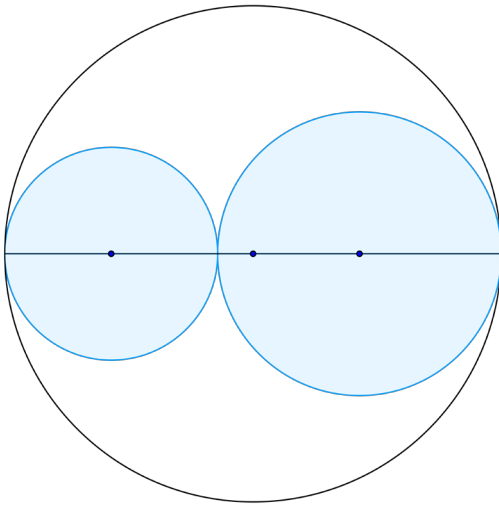
$$\frac{r_n}{r_p} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{2}} r_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{35}{2}$$

$$d = 2r_n = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{35}{2} \approx 25$$

Vastaus 25 cm

K38



Pienten ympyröiden säteet ovat $\frac{3}{2}$ cm = 1,5 cm ja $\frac{4}{2}$ cm = 2 cm .

Pienten ympyröiden pinta-ala yhteensä on $\pi \cdot 1,5^2 + \pi \cdot 2^2 = 6,25\pi$.

Ison ympyrän halkaisija on pikkuympyröiden halkaisijoiden summa,

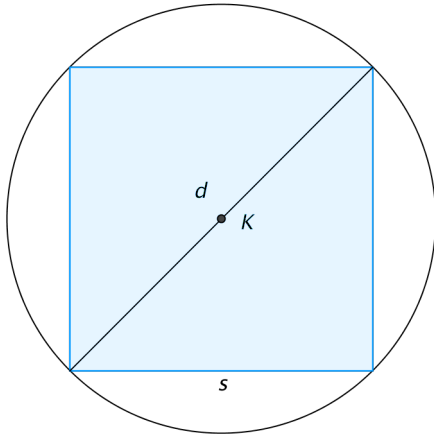
joten sen säde on $\frac{3+4}{2}$ cm = 3,5 cm .

Ison ympyrän ala $\pi \cdot 3,5^2 = 12,25\pi$.

Alojen suhde $\frac{6,25\pi}{12,25\pi} = \frac{6,25}{12,25} = 0,510\dots \approx 0,51 = 51\%$

Vastaus 51 %

K39



Neliön piirin pituus on $4s$.

Olkoon neliön sivun pituus s , tällöin ympyrän halkaisija $d = s\sqrt{2}$.

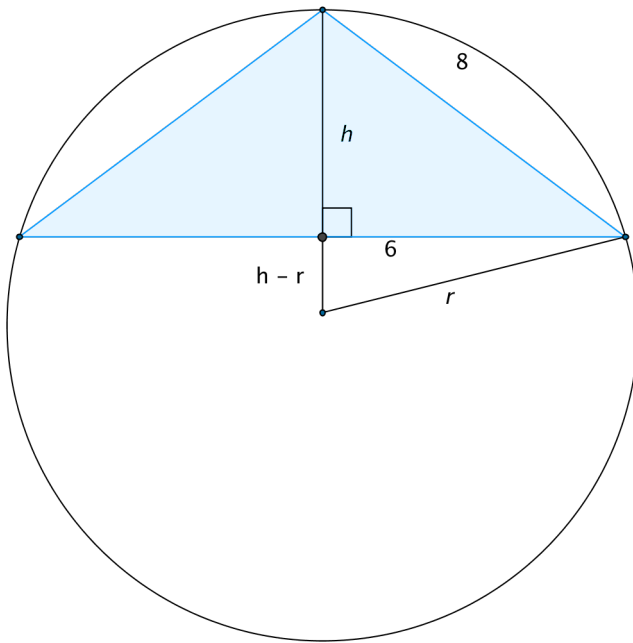
Ympyrän kehän pituus $p = \pi d = \pi s\sqrt{2}$.

Lasketaan kehän pituuden ja neliön piirin suhde.

$$\frac{\pi s\sqrt{2}}{4s} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \approx 1,11$$

Neliön piiri on 11 % pidempi

Vastaus 11 %

K40

Ratkaistaan kolmion korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 = 8^2 - 6^2 = 18$$

Ratkaistaan ympyrän säde Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = (h - r)^2 + 6^2$$

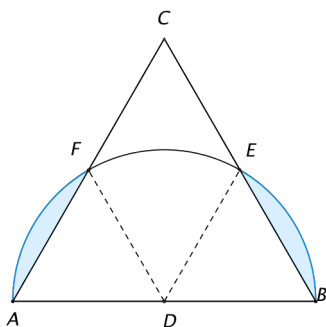
$$r^2 = h^2 - 2hr + r^2 + 36$$

$$2hr = h^2 + 36$$

$$r = \frac{h^2 + 36}{2h} = \frac{18 + 36}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{9}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Kehän pituus } p = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{9}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}\pi \approx 40,0$$

$$\text{Vastaus } 9\sqrt{2}\pi \approx 40,0$$

K41

b) Olkoon puoliympyrän säde r . Ympyrän kaaria vastaavat keskuskulmat ovat 60° , koska kolmiot DBE ja ADE ovat tasasivuisia kolmioita, sivun pituus on r .

Puoliympyrästä jää kolmion ulkopuolelle kaksi segmenttiä.

Lasketaan segmentin pinta-ala.

$$A_s = \frac{60}{360} \cdot \pi r^2 - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4}$$

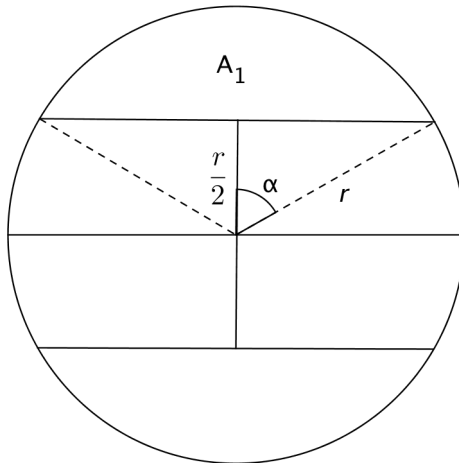
Puoliympyrän ala $A_p = \frac{1}{2} \pi r^2$,

$$\frac{2A_s}{A_p} = \frac{2 \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} \right)}{\frac{1}{2} \pi r^2} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi} = 0,1153\dots \approx 0,12$$

Puoliympyrästä jää kolmion ulkopuolelle 12 %

Vastaus 12 %

K42



Viipaleita on kahdenlaisia, kaksi ympyräsegmenttiä ja neljä keskelle jäävää viipaletta.

Pizzan pinta-ala $A = \pi r^2$

Lasketaan segmentin A_1 pinta-ala.

Määritetään kulma α

$$\cos \alpha = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Keskuskulma $2\alpha = 120^\circ$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{120}{360} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot \sin 120^\circ r^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) r^2 \approx 0,614 r^2 \end{aligned}$$

Keskelle jäävän viipaleen pinta-ala

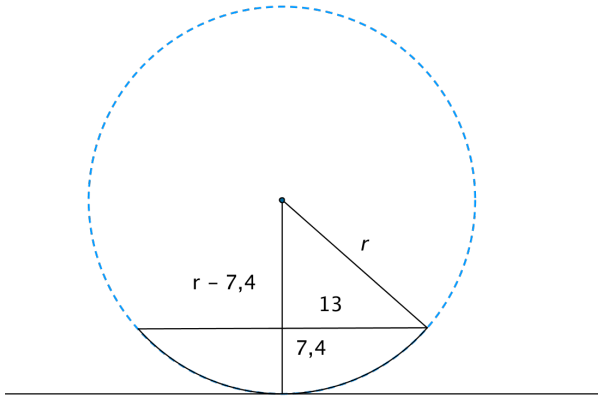
$$\begin{aligned}A_2 &= \frac{1}{4}(A - 2A_1) \\&= \frac{1}{4}\left(\pi r^2 - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2\right) \\&= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2 \approx 0,478r^2\end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2} \approx 1,284$$

Reunaviipaleen viipaleen pinta-ala on 28 % suurempi.

Vastaus Reunaviipale, 28 %

K43



Käytetään kuvan merkintöjä.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$r^2 = (r - 7,4)^2 + 13^2$$

$$r^2 = r^2 - 14,8r + 54,76 + 169$$

$$14,8r = 223,76$$

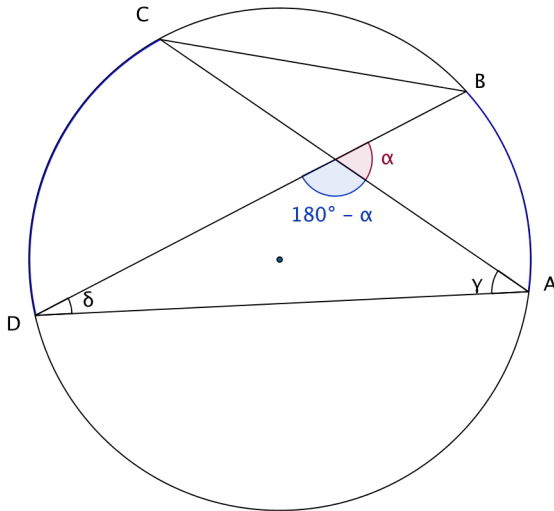
$$r = 15,11\dots$$

$$d = 2r = 30,23\dots$$

Halkaisija on 30 cm

Vastaus 30 cm

K44



Kuvan merkinnöillä kaaren AB asteluku on 2δ ja kaaren CD asteluku on 2γ . Kaarten astelukujen keskiarvo on

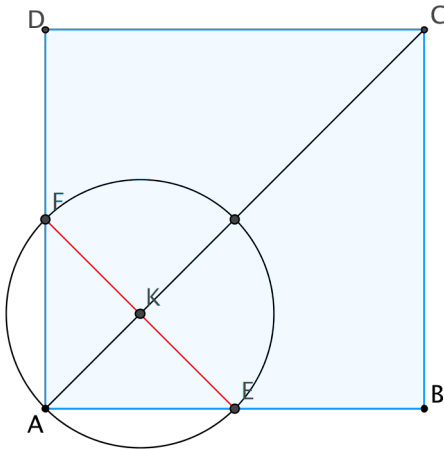
$$\frac{2\gamma + 2\delta}{2} = \gamma + \delta$$

Kolmion DAE kulmien summan avulla saadaan yhtälö

$$\gamma + \delta + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = \gamma + \delta$$

Siis kulman α asteluku on kaarten AB ja CD astelukujen keskiarvo.

K45

Olkoon neliön sivun pituus s . Merkitään ympyrän halkaisijaa kirjaimella d .

Lasketaan ympyrän halkaisija $d = AE$.

$$d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

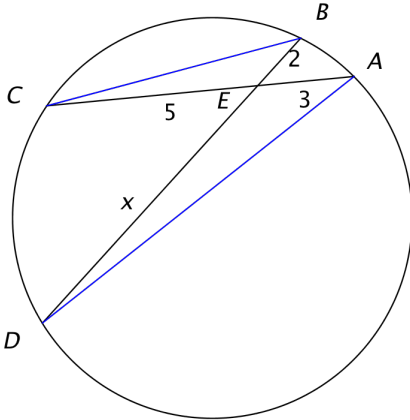
$$d = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Vastaus $\frac{a}{2\sqrt{2}}$

K46

a)

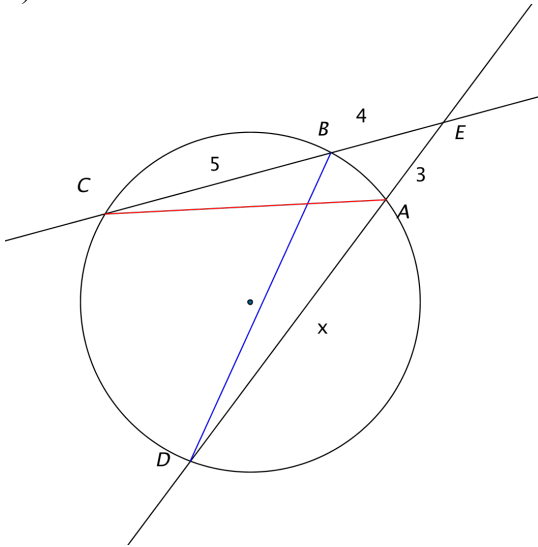


Kolmiot DAE ja CBE ovat yhdenmuotoiset (kk). Kulmat AED ja BEC ovat ristikulmia sekä kulmat EDA ja ECB ovat samaa kaarta vastaavia kehäkulmia.

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{2}$$

$$x = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

b)



Kolmiot DBE ja CAE ovat yhdenmuotoiset (kk). Kulma E on yhteinen sekä kulmat D ja C ovat samaa kaarta vastaavat kehäkulmat.

Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosien suhteena saadaan

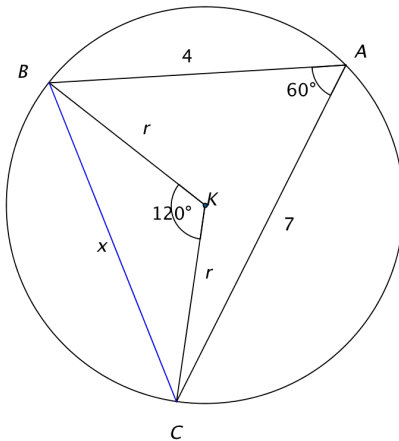
$$\frac{x+3}{5+4} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{x+3}{9} = \frac{4}{3}$$

$$x+3 = 12$$

$$x = 9$$

Vastaus a) $7\frac{1}{2}$ b) 9

K47

Ratkaistaan jänne AC kosinilauseella.

$$x^2 = 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 37$$

$$x = \sqrt{37}$$

Ratkaistaan ympyrän säde kosinilauseella.

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cos 120^\circ$$

$$37 = 3r^2$$

$$r = \sqrt{\frac{37}{3}}$$

Kolmion ABC pinta-ala

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = 7\sqrt{3}$$

Segmentin pinta-ala

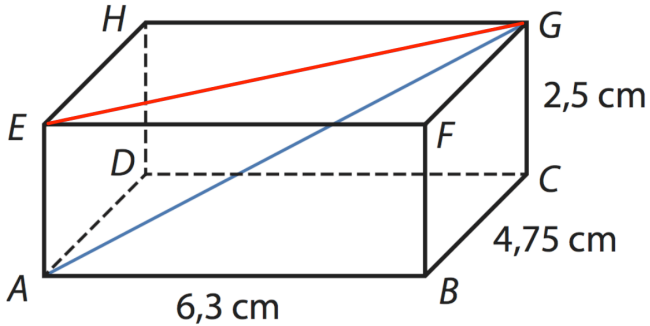
$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{120}{360} \pi \cdot \frac{37}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{37}{3} \cdot \sin 120^\circ \\ &= \frac{37\pi}{9} - \frac{37\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = 7\sqrt{3} + \frac{37\pi}{9} - \frac{37\sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{47\sqrt{3}}{12} + \frac{37\pi}{9} \end{aligned}$$

$$\text{Vastaus } \frac{47\sqrt{3}}{12} + \frac{37\pi}{9} \approx 45,5$$

K48

- a) Lasketaan lävistäjän EG pituus suorakulmaisesta kolmiosta EGF .

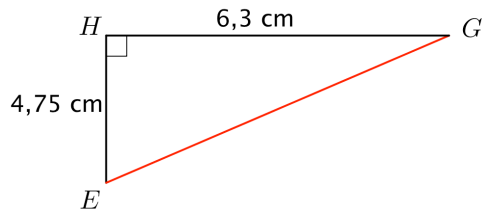


$$|EG|^2 = 4,75^2 + 6,3^2$$

$$|EG|^2 = 62,2525$$

$$|EG| = \pm\sqrt{62,2525}$$

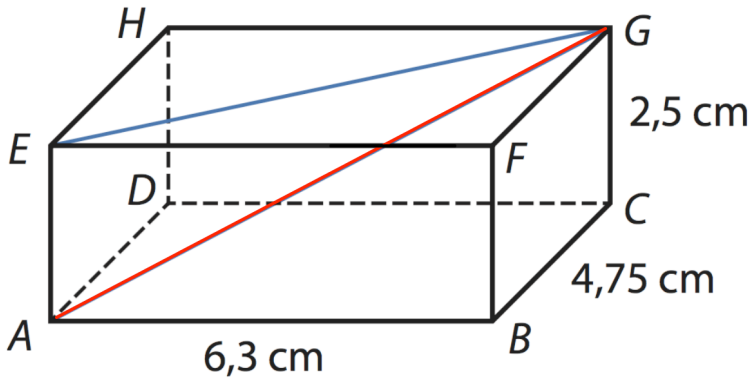
$$= \pm 7,890... \text{ (cm)}$$



Lävistäjän pituus on positiivinen, joten

$$|EG| = 7,890... \text{ cm} \approx 7,9 \text{ cm}.$$

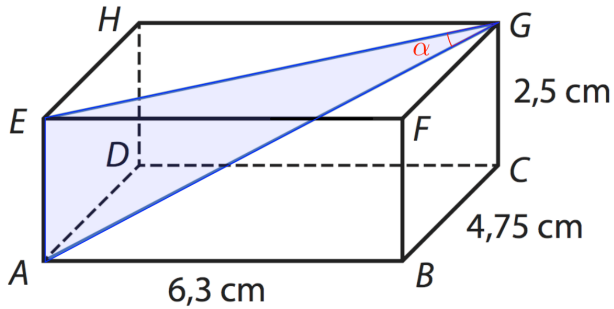
- b) Lasketaan avaruuslävistäjän pituus suorakulmaisen särmiön särmien pituuksien perusteella.



$$|AG| = \sqrt{6,3^2 + 4,75^2 + 2,5^2} = 8,276... \approx 8,3 \text{ (cm)} .$$

Avaruuslävistäjän pituus on 8,3 cm.

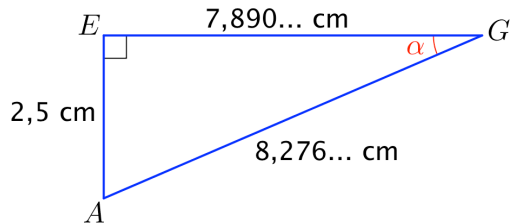
c) Lasketaan lävistäjien välinen kulma α suorakulmaisesta kolmiosta AGE .



$$\tan \alpha = \frac{2,5}{7,890\dots}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2,5}{7,890\dots}\right)$$

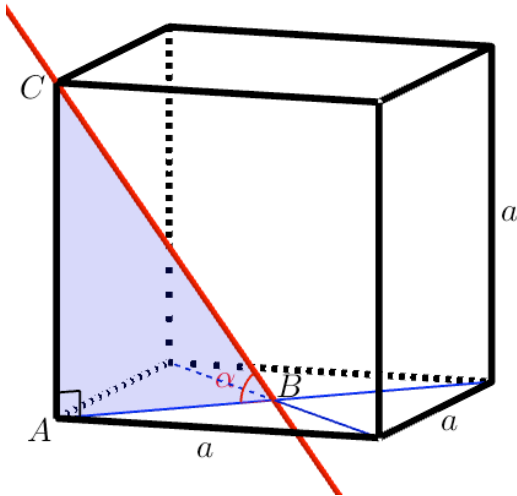
$$= 17,581\dots^\circ \approx 18^\circ$$



Vastaus a) 7,9 cm b) 8,3 cm c) 18°

K49

Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a . Kysytty kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta ABC .



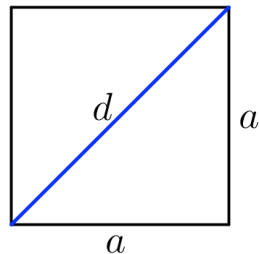
Sivun AB pituus on puolet pohjan lävistäjästä. Lasketaan ensin pohjaneliön lävistäjän pituus.

$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$d = \pm\sqrt{2a^2}$$

$$= \pm\sqrt{2} \cdot |a| \quad | a > 0$$

$$= \pm a\sqrt{2}$$



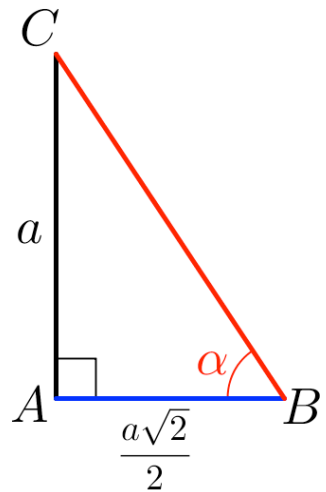
Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d = a\sqrt{2}$.

$$\text{Siis } |AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Määritetään kysytty kulma α .

$$\tan \alpha = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \cancel{a} \cdot \frac{2}{\cancel{a}\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \sqrt{2} = 54,735\dots^\circ \approx 54,7^\circ$$



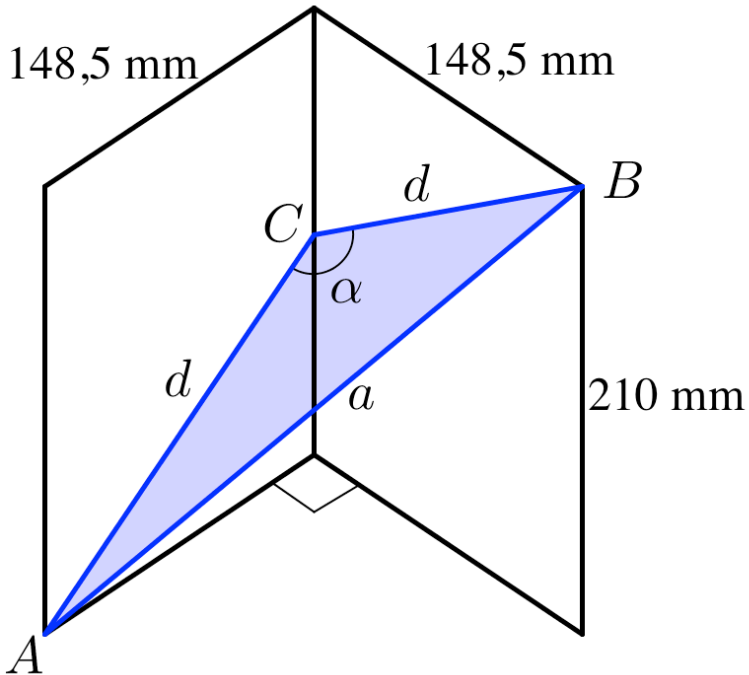
Vastaus $54,7^\circ$

K50

Piirretään mallikuva. Pahvi taitetaan lyhyemmän sivun (210 mm) suuntaisesti, joten taitoksen sivujen pituudet ovat

$$\frac{297 \text{ mm}}{2} = 148,5 \text{ mm} . \text{ Kysytty kulma } \alpha \text{ voidaan ratkaista}$$

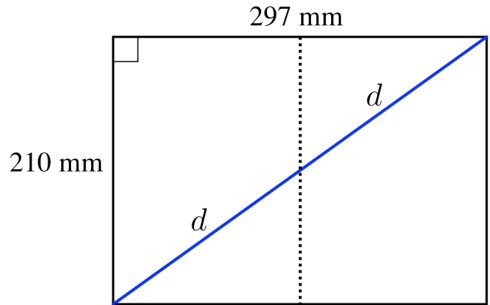
kolmiosta ABC . Merkitään lävistäjän puolikkaan pituutta kirjaimella d ja lävistäjän kärkien etäisyyttä kirjaimella a . Lasketaan ensin näiden sivujen pituudet.



Lasketaan pahvilevyn lävistäjän puolikkaan pituus d Pythagoraan lauseella. Piirretään mallikuva pahvilevystä ennen taittamista

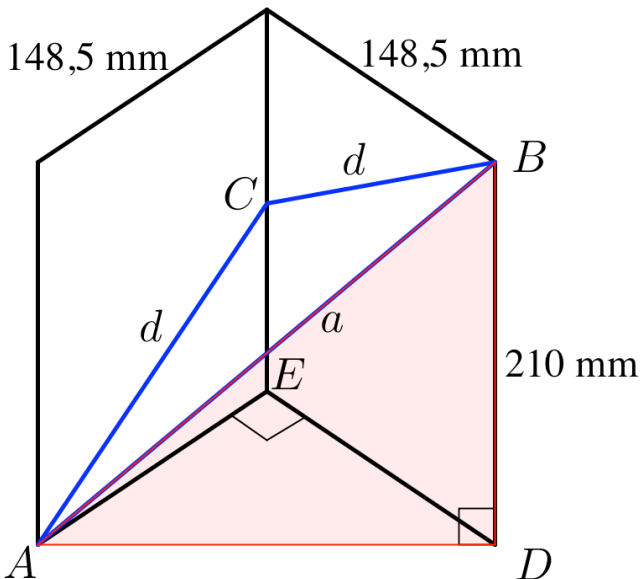
$$(2d)^2 = 210^2 + 297^2$$

$$d = \pm \frac{3\sqrt{14701}}{2} \text{ (mm)}$$



Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d = \frac{3\sqrt{14701}}{2}$ mm.

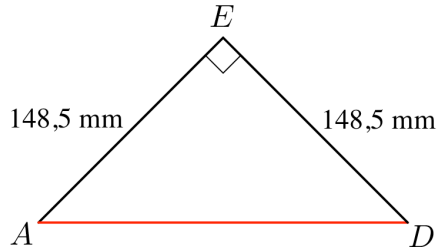
Lävistäjän kärkien välinen etäisyys taitetussa pahvilevyssä a voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ADB , kunhan ensin ratkaistaan sivun AD pituus suorakulmaisesta kolmiosta ADE .



Lasketaan sivun AD pituus.

$$|AD|^2 = 148,5^2 + 148,5^2$$

$$|AD| = \pm \frac{297\sqrt{2}}{2} \text{ (mm)}$$

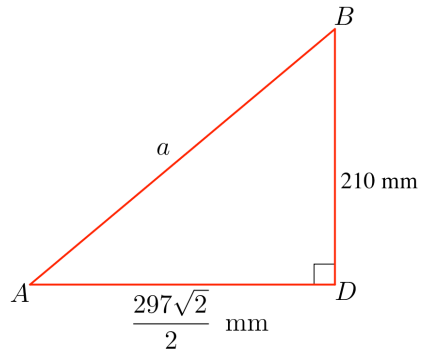


Sivun pituus on positiivinen, joten $|AD| = \frac{297\sqrt{2}}{2}$.

Lasketaan sivun AB pituus eli a .

$$a^2 = 210^2 + \left(\frac{297\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

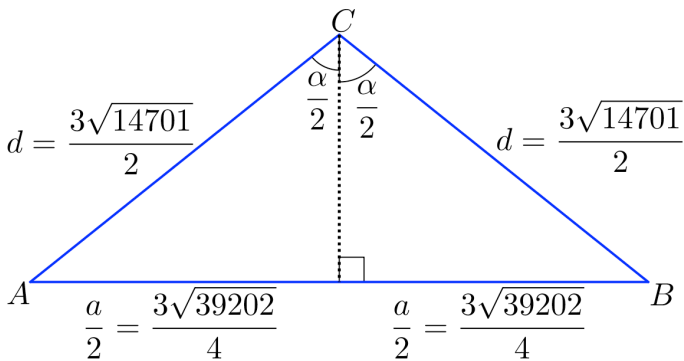
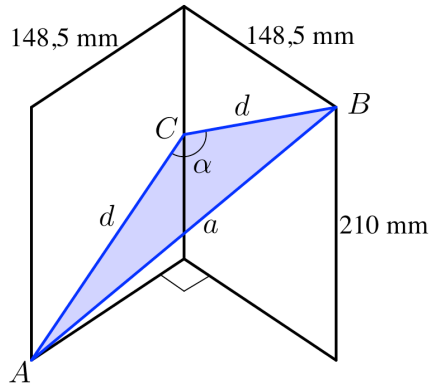
$$a = \pm \frac{3\sqrt{39202}}{2} \text{ (mm)}$$



Sivun pituus on positiivinen, joten $a = \frac{3\sqrt{39202}}{2}$ mm.

Lasketaan lopuksi kysytyn kulman α suuruus tasakylkisestä kolmiosta ABC .

Koska kolmio on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty korkeusjana jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.



$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3\sqrt{39202}}{4}}{\frac{3\sqrt{14701}}{2}} = 0,816\dots$$

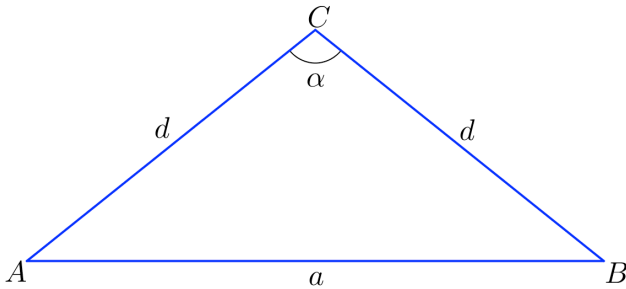
$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1} 0,816\dots = 54,734\dots^\circ \quad | \cdot 2$$

$$\alpha = 109,469\dots^\circ \approx 109^\circ$$

Vastaus 109°

Huomautus 1:

Kulma α voidaan määrittää kolmiosta ABC myös kosinilauseella.



$$a^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot \cos \alpha$$

Huomautus 2

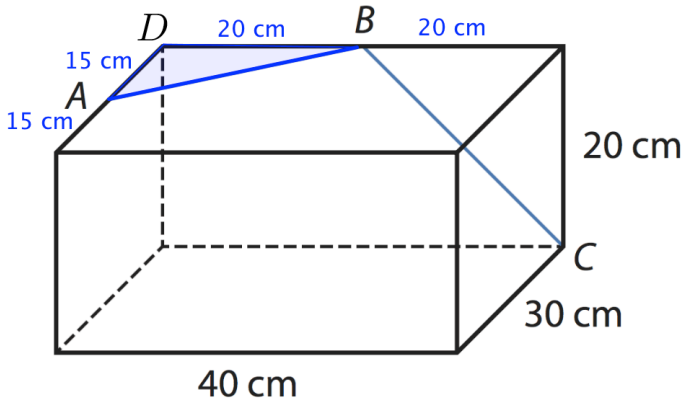
Laskuissa voi käyttää pituuksista a ja d myös tarkkoja desimaalimuotoja laskimella:

$$d = 181,871... \text{ (mm)}$$

$$a = 292,992... \text{ (mm)}.$$

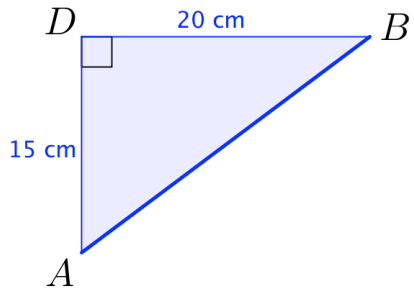
K51

- a) Lasketaan janan AB pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABD Pythagoraan lauseella.



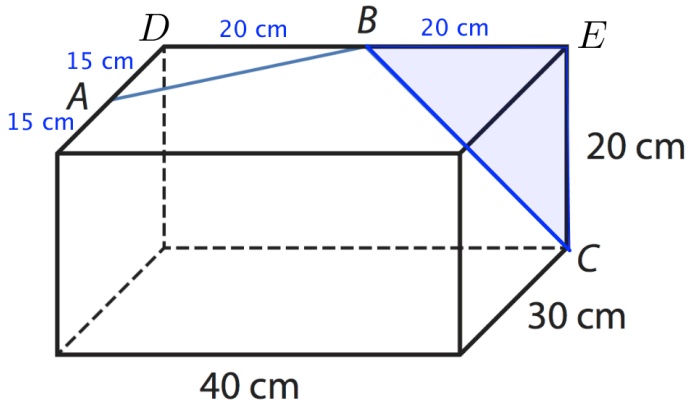
$$|AB|^2 = 15^2 + 20^2$$

$$|AB| = \pm\sqrt{625} = \pm 25 \text{ (cm)}$$



Janan pituus on positiivinen, joten $|AB| = 25 \text{ cm}$.

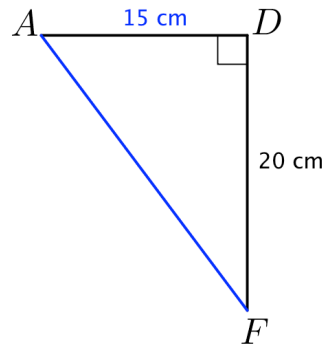
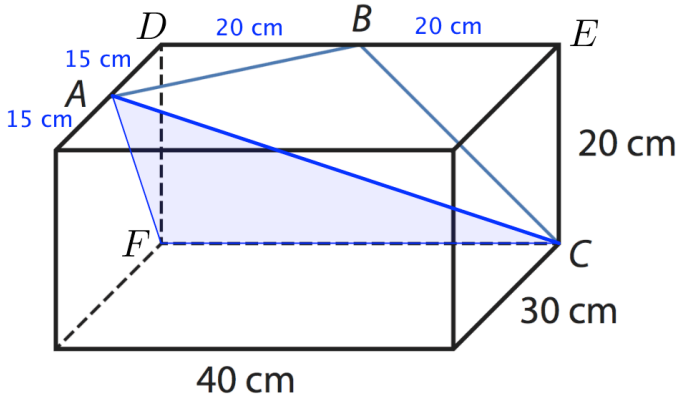
b) Lasketaan janan BC pituus suorakulmaisesta kolmiosta BCE Pythagoraan lauseella.



$ BC ^2 = 20^2 + 20^2$ $ BC = \pm 20\sqrt{2} = \pm 28,284... \text{ (cm)}$	
---	--

Janan pituus on positiivinen, joten $|BC| = 28,284... \text{ cm} \approx 28 \text{ cm}$.

- c) Lasketaan janan AC pituus suorakulmaisesta kolmiosta AFC .
 Ensin pitää laskea janan AF pituus suorakulmaisesta kolmiosta AFD .



$$|AF|^2 = 15^2 + 20^2$$

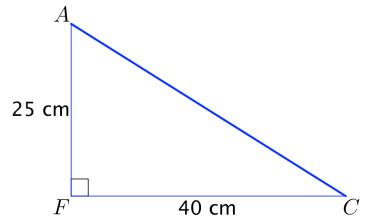
$$|AF| = \pm\sqrt{625} = \pm 25 \text{ (cm)}$$

Janan pituus on positiivinen,
 joten $|AF| = 25 \text{ cm}$.

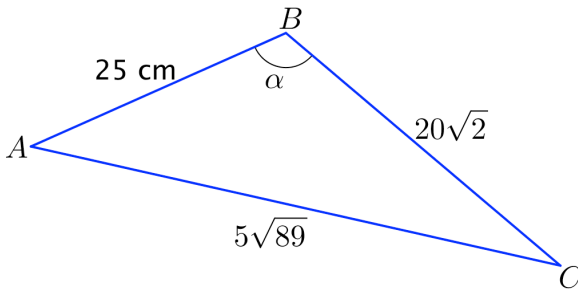
$$|AC|^2 = 25^2 + 40^2$$

$$|AC| = \pm 5\sqrt{89} = \pm 47,169\dots \text{ (cm)}$$

Janan pituus on positiivinen, joten
 $|AC| = 47,169\dots \text{ cm} \approx 47 \text{ cm}$.



d) Lasketaan janojen AB ja BC välinen kulma kolmiosta ACB kosinilauseella.



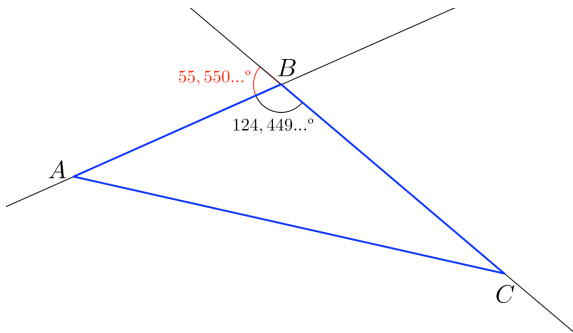
$$(5\sqrt{89})^2 = 25^2 + (20\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 25 \cdot 20\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$$

$$1000\sqrt{2} \cdot \cos \alpha = 625 + 800 - 2225$$

$$\cos \alpha = \frac{-800}{1000\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-800}{1000\sqrt{2}}\right) = 124,449\dots^\circ$$

Koska suorien välinen kulma on välillä $[0^\circ, 90^\circ]$, niin suorien AB ja BC välinen kulma on $180^\circ - 124,449\dots^\circ = 55,550\dots^\circ \approx 56^\circ$.



Vastaus a) 25 cm b) 28 cm
 c) 47 cm d) 56°

K52

Lasketaan pallon säde tilavuuden avulla.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \left| \quad V = 7,45 \text{ L} = 7,45 \text{ dm}^3 \right.$$

$$7,45 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$3 \cdot 7,45 = 4\pi r^3$$

$$r^3 = \frac{3 \cdot 7,45}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7,45}{4\pi}} = 1,211\dots \text{ (dm)}$$

Pallon pinta-ala:

$$A = 4\pi r^2$$

$$= 4\pi \cdot (1,211\dots)^2$$

$$= 18,446\dots \text{ (dm}^2\text{)}$$

Pallon pinta-ala on $18,446\dots \text{ dm}^2 = 1844,6\dots \text{ cm}^2 \approx 1845 \text{ cm}^2$.

Vastaus 1845 cm^2

K53

Pallon säde on alussa $r_1 = r$.

Säde pienenee 25 %, joten säde lopussa $r_2 = 0,75r$.

a) Pinta-alan muutos:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi r_2^2}{4\pi r_1^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{(0,75r)^2}{r^2} = 0,75^2 = 0,5625 = 56,25 \%$$

Pinta-ala pienenee $100 \% - 56,25 \% = 43,75 \% \approx 44 \%$

b) Tilavuuden muutos:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_2^3}{\frac{4}{3}\pi r_1^3} = \frac{r_2^3}{r_1^3} = \left(\frac{0,75r}{r}\right)^3 = 0,75^3 = 0,4218\dots = 42,18\dots \%$$

Tilavuus pienenee $100 \% - 42,18 \% = 57,81 \% \approx 58 \%$.

Vastaus a) 44 % b) 58 %

K54

Pallon säde on alussa r ja tilavuus $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Lopussa puolipallon säde on R ja tilavuus $V_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$.

Tilavuus säilyy samana. Muodostetaan yhtälö.

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \left| \cdot \frac{3}{4\pi} \right.$$

$$r^3 = \frac{1}{2} \cdot R^3$$

$$2r^3 = R^3$$

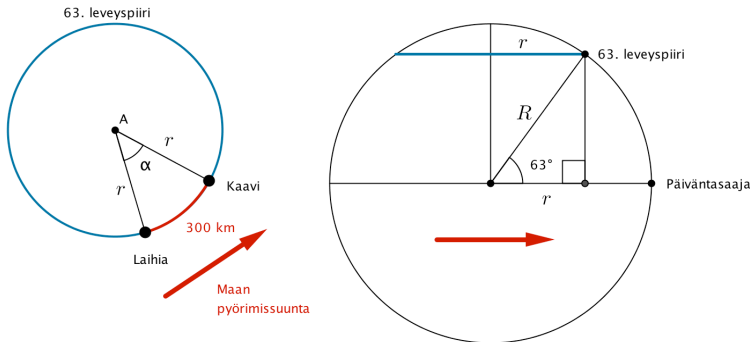
$$\frac{R^3}{r^3} = 2$$

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{2} = 1,2599\dots = 125,99\dots \%$$

Säde suurenee $125,99\dots \% - 100 \% = 25,99\dots \% \approx 26 \%$.

Vastaus 26 %

K55



Lasketaan 63. leveyspiirin säde r .

$$\cos 63^\circ = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cos 63^\circ \quad | \quad R = 6370 \text{ km}$$

$$= 6370 \cdot \cos 63^\circ$$

$$= 2891,919\dots \text{ (km)}$$

Lasketaan 330 km pituisen leveyspiirin kaarta vastaava keskuskulma.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{360^\circ \cdot b}{2\pi r}$$

$$| \quad r = 2891,919\dots \text{ km}$$

$$| \quad b = 330 \text{ km}$$

$$= \frac{360^\circ \cdot 330}{2\pi \cdot 2891,919\dots}$$

$$= 6,538\dots^\circ$$

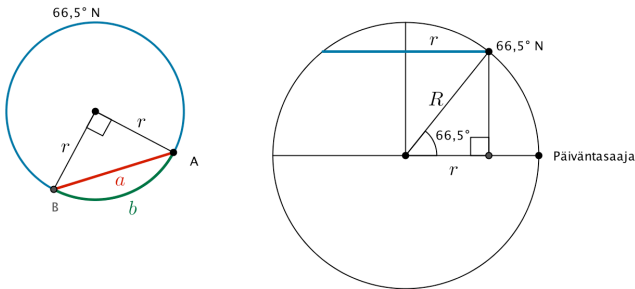
Maan täysi 360° kierros kestää 24 h, joten $6,538\dots^\circ$ kiertymiseen kuluu aikaa

$$\frac{6,538\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 24 \text{ h} = 0,4358 \text{ h} = 26,152\dots \text{ min} \approx 26 \text{ min} .$$

Aurinko nousee lännempänä olevalla Laihialla 26 minuuttia myöhemmin kuin Kaavilla.

Vastaus 26 min

K56



Lasketaan pohjoisen napapiirin säde.

$$\cos 66,5^\circ = \frac{r}{R}$$

$$r = R \cos 66,5^\circ \quad | \quad R = 6371 \text{ km}$$

$$= 6371 \cdot \cos 66,5^\circ$$

$$= 2540,430\dots \text{ (km)}$$

- a) Pisteiden A ja B välisen tunnelin pituus on kantana suorakulmaisessa tasakylkisessä kolmiossa, jonka kylkenä on napapiirin säde r .

$$a^2 = r^2 + r^2$$

$$= 2r^2 \quad | \quad r = 2540,430\dots \text{ km}$$

$$a = (\pm)\sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r = \sqrt{2} \cdot 2540,430\dots = 3592,71\dots \approx 3593 \text{ (km)}$$

b) Lyhyemmän napapiirin kaaren pituus:

$$b = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2540,430\dots = 3990,49\dots \approx 3990 \text{ (km)}$$

Vastaus a) 3593 km b) 3990 km

Voi myös tulkita vastauksen tarkkuuden 90° asteen kulman mukaisesti 2 merkitsevän numeron tarkkuudella:

Vastaus a) 3600 km b) 4000 km

K57

Särmiön tilavuus on

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$a = 10,25 \text{ m} = 102,5 \text{ dm}$$

$$b = 6,5 \text{ m} = 65 \text{ dm}$$

$$c = 4,5 \text{ m} = 45 \text{ dm}$$

$$= 102,5 \cdot 65 \cdot 45$$

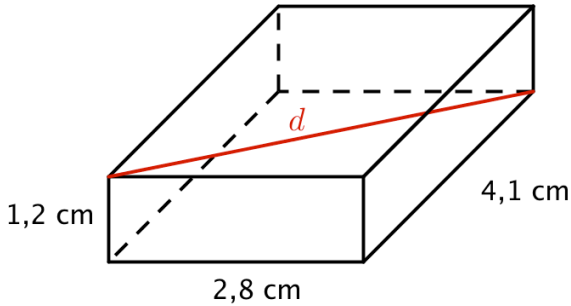
$$= 299\,812,5$$

$$\approx 300\,000 \text{ L}$$

Luokkaan mahtuu 300 000 litraa ilmaa.

Vastaus 300 000 L

K58



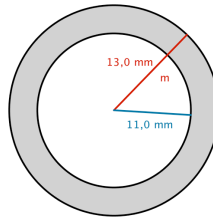
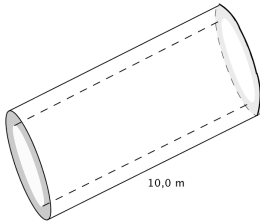
Lasketaan suorakulmaisen särmiön muotoisen tulitikkuaskin avaruuslävistäjän pituus.

$$d = \sqrt{1,2^2 + 2,8^2 + 4,1^2} = 5,107\dots \approx 5,1 \text{ (cm)}$$

Koska avaruuslävistäjän pituus on suurempi kuin parsinneulan pituus, neula mahtuu rasiaan.

Vastaus mahtuu

K59



Lasketaan kupariosan tilavuus.

$$V = V_{ulko} - V_{sisä}$$

$$= \pi r_{ulko}^2 \cdot 10,0 - \pi r_{sisä}^2 \cdot 10,0$$

$$= \pi \cdot 13,0^2 \cdot 10,0 - \pi \cdot 11,0^2 \cdot 10,0 = 1507,96... \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$V = A_p h = \pi r^2 h$$

$$r_{ulko} = \frac{26,0}{2} \text{ mm} = 13,0 \text{ mm}$$

$$r_{sisä} = \frac{22,0}{2} \text{ mm} = 11,0 \text{ mm}$$

Lasketaan kuparin massa.

$$m = \rho V$$

$$\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$$

$$V = 1507,96... \text{ cm}^3$$

$$= 1,50796... \text{ dm}^3$$

$$= 0,00150796... \text{ m}^3$$

$$= 8960 \cdot 0,00150796...$$

$$= 13,511... \approx 13,5 \text{ (kg)}$$

Vastaus 13,5 kg

K60

Lasketaan yhden pallon tilavuus V .

$$V = \frac{1}{8} \cdot \pi r^2 \cdot h \quad \left| \begin{array}{l} h = 11,0 \text{ mm} \\ r = \frac{44,0 \text{ mm}}{2} = 22,0 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 22,0^2 \cdot 11,0$$

$$= 2090,72... \text{ (mm}^3\text{)}$$

Lasketaan pallon säde R .

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$R^3 = \frac{3V}{4\pi}$$

$$= \frac{3 \cdot 2090,72...}{4\pi}$$

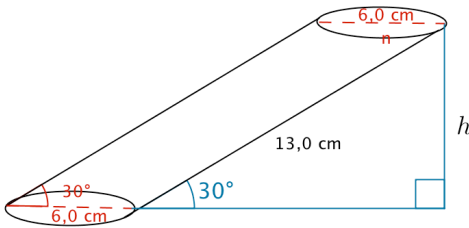
$$= 499,12... \text{ (mm}^3\text{)}$$

$$R = \sqrt[3]{499,12...} = 7,93... \text{ (mm)}$$

Pallon halkaisija on $2 \cdot 7,93... \text{ mm} = 15,86... \text{ mm} \approx 15,9 \text{ mm}$.

Vastaus 15,9 mm

K61



Lasketaan lieriön korkeus.

$$\sin 30^\circ = \frac{h}{13,0}$$

$$h = 13,0 \cdot \sin 30^\circ = 6,5 \text{ (cm)}$$

Lasketaan vinon lieriön tilavuus.

$$V = A_p h$$

$$= \pi r^2 h$$

$$\left| r = \frac{6,0 \text{ cm}}{2} = 3,0 \text{ cm} = 0,30 \text{ dm} \right.$$

$$\left| h = 6,5 \text{ cm} = 0,65 \text{ dm} \right.$$

$$= \pi \cdot 0,30^2 \cdot 0,65 = 0,1837... \text{ (dm}^3\text{)}$$

Lasketaan massa.

$$m = \rho V$$

$$\left| \rho = 8,4 \text{ kg/dm}^3 \right.$$

$$\left| V = 0,1837... \text{ dm}^3 \right.$$

$$= 8,4 \cdot 0,1837... = 1,543... \approx 1,5 \text{ (kg)}$$

Vastaus 1,5 kg

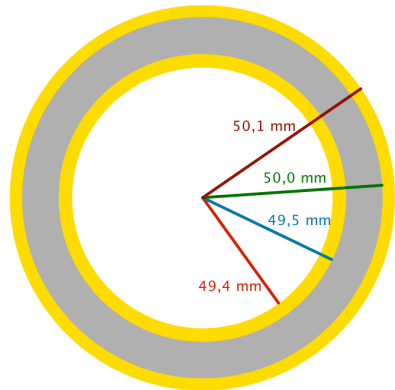
K62

$$r_{\text{sisä}} = \frac{9,9 \text{ cm}}{2} = 49,5 \text{ mm} \qquad r_{\text{ulko}} = \frac{10 \text{ cm}}{2} = 50,0 \text{ mm}$$

Maalikerrosten poikkileikkaukset ovat ympyrärenkaita. Lasketaan ulko- ja sisäpinnoille levitettyjen maalikerrosten tilavuudet.

$$\begin{aligned} V_{\text{sisä}} &= \pi r_{\text{sisä}}^2 \cdot h - \pi (r_{\text{sisä}} - 0,1)^2 \cdot h \\ &= \pi h \cdot (49,5^2 - 49,4^2) \\ &= 9,89 \cdot \pi h \text{ (mm}^3\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{\text{ulko}} &= \pi (r_{\text{ulko}} + 0,1)^2 \cdot h - \pi r_{\text{ulko}}^2 \cdot h \\ &= \pi h \cdot (50,1^2 - 50^2) \\ &= 10,01 \cdot \pi h \text{ (mm}^3\text{)} \end{aligned}$$



Verrataan ulkopintaan kuluneen maalin tilavuutta sisäpintaan kuluneen maalin tilavuuteen.

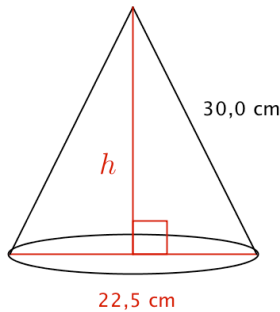
$$\frac{V_{\text{ulko}}}{V_{\text{sisä}}} = \frac{10,01 \cdot \cancel{\pi h}}{9,89 \cdot \cancel{\pi h}} = 1,0121\dots = 101,21\dots \% \approx 101,2 \%$$

Ulkopintaan kuluu $101,2 \% - 100 \% = 1,2 \%$ enemmän maalia.

Vastaus 1,2 %

Huomaa: Annettu tieto putken pituudesta ei ole välttämätön.

K63



Pohjan säde on $r = \frac{22,5 \text{ cm}}{2} = 11,25 \text{ cm} = 1,125 \text{ dm}$.

Sivujananan pituus on $30,0 \text{ cm} = 3,00 \text{ dm}$.

Lasketaan kartion korkeus.

$$3,00^2 = h^2 + 1,125^2$$

$$h^2 = 3,00^2 - 1,125^2$$

$$= 7,734... \text{ (dm}^2\text{)}$$

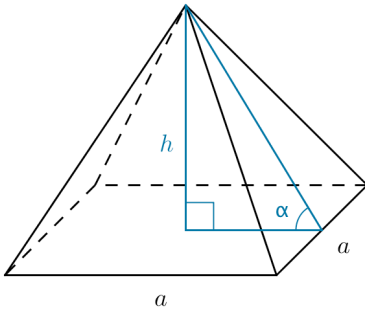
$$h = \pm\sqrt{7,734...} = 2,781... \text{ (dm)}$$

Lasketaan kartion tilavuus.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 1,125^2 \cdot 2,781... = 3,685... \text{ (dm}^3\text{)}$$

Kartion tilavuus on $3,685... \text{ dm}^3 = 3,685... \text{ L} = 36,85... \text{ dl} \approx 36,9 \text{ dl}$.

Vastaus 36,9 dl

K64

Lasketaan pohjaneliön sivu a pohjan pinta-alan avulla.

$$A = 5,3 \text{ ha} = 5,3 \cdot (100 \text{ m})^2 = 53\,000 \text{ m}^2$$

$$a^2 = 53\,000$$

$$a = (\pm)\sqrt{53\,000} = 230,217\dots \text{ (m)}$$

Lasketaan alkuperäinen korkeus h suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\tan \alpha = \frac{h}{\frac{a}{2}}$$

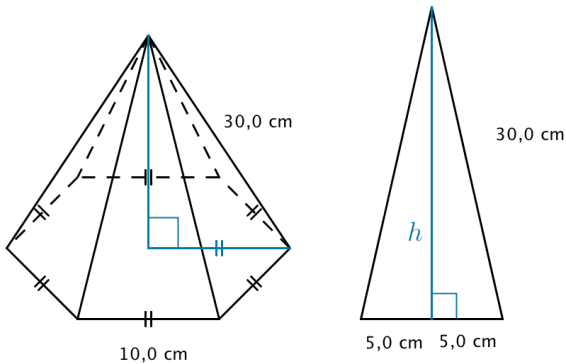
$$h = \frac{a}{2} \cdot \tan \alpha \quad \left| \begin{array}{l} \alpha = 51^\circ 52' = 51,866\dots^\circ \\ a = 230,217\dots \text{ m} \end{array} \right.$$

$$= \frac{230,217\dots}{2} \cdot \tan 51,866\dots^\circ = 146,627\dots \approx 147 \text{ (m)}$$

Pyramidin alkuperäinen korkeus on ollut 147 m.

Vastaus 147 m

K65



Pyramidin kaikki kuusi sivutahkoa ovat samanlaisia tasasivuisia kolmioita. Lasketaan sivutahkon korkeus.

$$30,0^2 = h^2 + 5,0^2$$

$$h^2 = 30,0^2 - 5,0^2$$

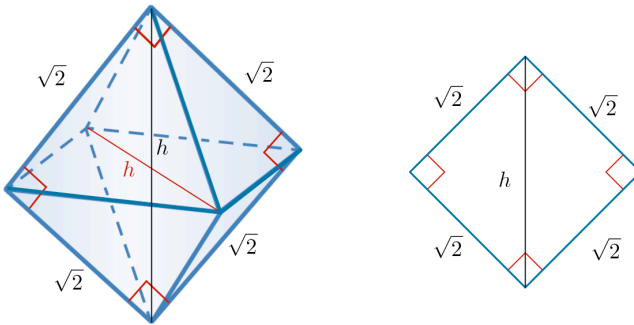
$$= 875$$

$$h = (\pm)\sqrt{875} = 29,580\dots \text{ (cm)}$$

Vaippa koostuu kuudesta samanlaisesta kolmiosta.

$$A_v = 6 \cdot \frac{10,0 \cdot 29,580\dots}{2} = 887,411\dots \approx 887 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 887 cm^2

K66

Säännöllisen oktaedrin poikkileikkaus on neliö.

Oktaedrin korkeus h on $\sqrt{2}$ -sivuisen neliön lävistäjä.

$$h^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2$$

$$= 2 + 2$$

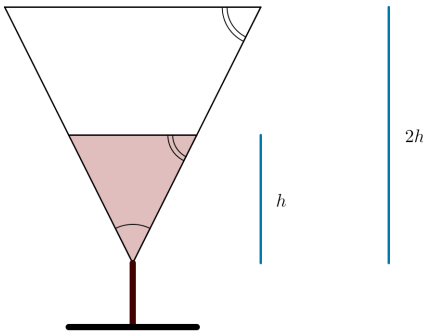
$$= 4$$

$$h = (\pm)\sqrt{4} = 2$$

Oktaedrin tilavuus saadaan laskemalla yhteen kahden neliöpohjaisen pyramidin tilavuudet.

$$V_{\text{oktaedri}} = 2 \cdot V_{\text{pyramidi}} = 2 \cdot \frac{1}{3} A_p \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

Vastaus Tilavuus on $\frac{4}{3}$.

K67

Viinilasin poikkileikkauskuvioon muodostuu kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Merkitään sisätilan korkeutta $2h$:lla, jolloin nesteosan korkeus on h .

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{V_{\text{neste}}}{V_{\text{lasi}}} = \left(\frac{h}{2h}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$V_{\text{neste}} = \frac{V_{\text{lasi}}}{8} \quad | \quad V_{\text{lasi}} = 1,75 \text{ dl}$$

$$= \frac{1,75}{8}$$

$$= 0,21875$$

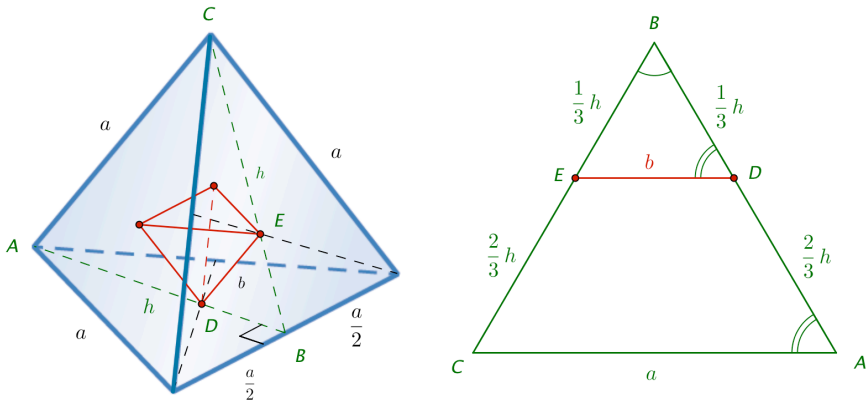
$$\approx 0,219 \text{ (dl)}$$

Vastaus 0,219 dl

K68

Tetraedrissa on neljä tahkoa, joten syntyvässä Platonin kappaleessa on neljä kärkeä. Tetraedri on ainoa Platonin kappaleista jossa on neljä kärkeä. Siis syntyvä kappale on tetraedri.

Merkitään syntyvän tetraedrin särmää kirjaimella b .
Piirretään mallikuva.



Tetraedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita ja niiden keskipisteet ovat mediaanien leikkauspisteitä. Nämä pisteet jakavat tahkojen mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Mediaanit ovat samalla sivutahkojen korkeusjanoja.

Markitään alkuperäisen tetraedrin sivutahkon mediaanin pituutta kirjaimella h .

Poikkileikkauskuvio ABC on tasasivuinen kolmio. Kolmiot ABC ja EDB ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Ratkaistaan kysytty pienemmän tetraedrin särmä b vastinjanojen suhteen avulla.

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{3}h}{h} = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{3}a$$

Syntyneen tetraedrin särmän pituus on $\frac{1}{3}a$.

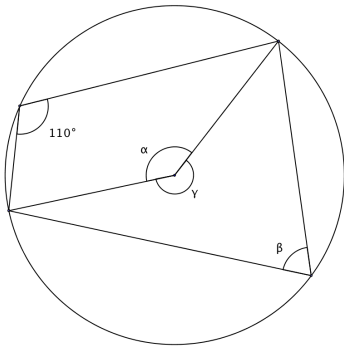
Vastaus $\frac{1}{3}a$

1

a) $\beta = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$

b) Kulma β on 84 asteen keskuskulmaa vastaava kehäkulma, joten $\beta = 84^\circ : 2 = 42^\circ$

c)



Kulma γ on 110 asteen kehäkulmaa vastaava keskuskulma.

$$\gamma = 2 \cdot 110^\circ = 220^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

Kulma β on kulmaa α vastaava kehäkulma.

$$\beta = 140^\circ : 2 = 70^\circ$$

Vastaus a) 27° b) 42° c) 70°

2

a) Maaston matka x ratkeaa verrantoyhtälöstä.

$$\frac{33}{x} = \frac{1}{400\,000}$$

$$x = 13\,200\,000 \text{ (mm)}$$

Vastinmatkojen suhde on mittakaava.

Matka maastossa on $13\,200\,000 \text{ mm} = 13\,200 \text{ m} = 13,2 \text{ km} \approx 13 \text{ km}$.

b) Myös peruskartan matka y ratkeaa verrantoyhtälöstä. Ilmoitetaan todellinen matka millimetreissä.

$$\frac{y}{13\,200\,000} = \frac{1}{20\,000}$$

$$20\,000y = 13\,200\,000$$

$$y = 660 \text{ (mm)}$$

Vastinmatkojen suhde on mittakaava.

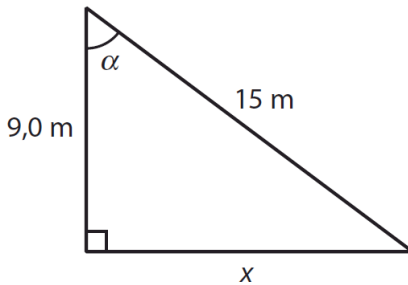
$$| : 20\,000$$

Matka peruskartalla on $660 \text{ mm} = 66 \text{ cm}$.

Vastaus Matka on a) 13 km b) 66 cm.

3

a)



$$\cos \alpha = \frac{9,0}{15}$$

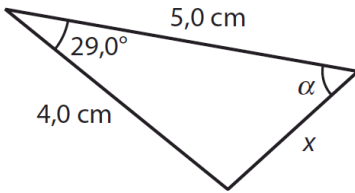
$$\alpha = \cos^{-1} \frac{9,0}{15} = 53,13\dots^\circ \approx 53^\circ$$

$$15^2 = x^2 + 9,0^2$$

$$x^2 = 15^2 - 9,0^2 = 144$$

$$x = \pm \sqrt{144} = 12 \text{ (m)}$$

b)



$$x^2 = 4,0^2 + 5,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 5,0 \cdot \cos 29,0^\circ$$
$$= 6,015\dots$$

$$x = (\pm)\sqrt{6,015\dots} = 2,45\dots \approx 2,5 \text{ (cm)}$$

$$\frac{4,0}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 29,0^\circ}$$

$$x \sin \alpha = 4,0 \cdot \sin 29,0^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{4,0 \cdot \sin 29,0^\circ}{x}$$

$$= \frac{4,0 \cdot \sin 29,0^\circ}{2,45\dots}$$

$$= 0,790\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,790\dots = 52,24\dots^\circ \approx 52^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 52,24\dots^\circ = 127,75\dots^\circ$$

Tarkistetaan kelpaavatko saadut kulmat annetun kolmion kulmiksi laskemalla kolmion kolmas kulma β .

- Kun $\alpha = 52,24\dots^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 29,0^\circ - 52,24\dots^\circ = 98,75\dots^\circ$
(kelpaa kolmion kulmaksi)

- Kun $\alpha = 127,75\dots^\circ$, niin
 $\beta = 180^\circ - 29,0^\circ - 127,75\dots^\circ = 23,24\dots^\circ$
(kelpaa kolmion kulmaksi)

Tapaus $\alpha = 127,75\dots^\circ$ ei kuitenkaan kelpaa tehtävän ratkaisuksi, koska α ei ole kolmion suurin kulma (se ei ole pisimmän sivun vastainen kulma).

Kysytyn kulman on siis oltava 52° .

Vastaus a) $\alpha = 53^\circ$, $x = 12$ m
 b) $\alpha = 52^\circ$, $x = 2,5$ cm

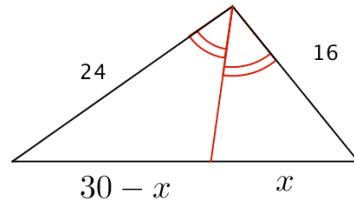
4

a) Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä

lukien. Osien pituudet ovat $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ ja $\frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

b)

Suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma. Osat ovat x ja $30 - x$. Kulmanpuolittaja jakaa vastaisen sivun viereisten sivujen suhteessa.



$$\frac{x}{30 - x} = \frac{16}{24}$$

$$24x = 16(30 - x)$$

$$24x = 16 \cdot 30 - 16x$$

$$16x + 24x = 16 \cdot 30$$

$$40x = 16 \cdot 30$$

$$x = \frac{16 \cdot 30}{40} = 12$$

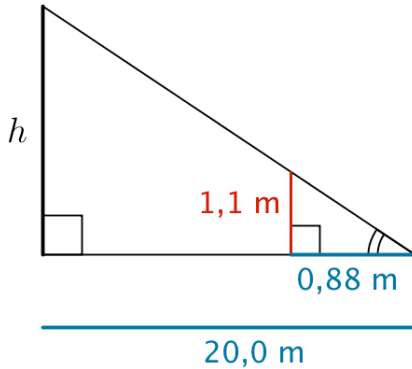
$$30 - x = 30 - 12 = 18$$

Osien pituudet ovat 18 ja 12.

Vastaus a) 12 ja 24

b) 12 ja 18

5



Syntyvät suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk, terävä kulma yhteinen, mlemmissä suora kulma).

Vastinjanojen suhde on vakio.

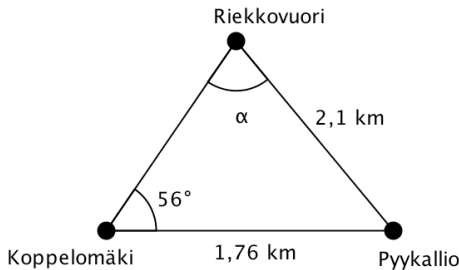
$$\frac{h}{1,1} = \frac{20,0}{0,88}$$

$$h = \frac{h}{1,1} = \frac{1,1 \cdot 20,0}{0,88} = 25,0 \text{ (m)}$$

Lipputangon korkeus on $25,0$ metriä.

Vastaus $25,0\text{ m}$

6



Sinilause:

$$\frac{1,76}{\sin \alpha} = \frac{2,1}{\sin 56^\circ}$$

$$1,76 \cdot \sin 56^\circ = 2,1 \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{1,76 \cdot \sin 56^\circ}{2,1} = 0,694\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,694\dots = 44,01\dots^\circ \approx 44^\circ$$

$$\text{tai } \alpha = 180^\circ - 44,01\dots^\circ = 135,98\dots^\circ$$

Tarkistetaan kelpaavatko saadut kulmat laskemalla kolmion kolmas kulma β .

- Kun $\alpha = 44,01\dots^\circ$, niin

$$\beta = 180^\circ - 56^\circ - 44,01\dots^\circ = 79,98\dots^\circ \text{ (kelpaa)}$$

- Kun $\alpha = 135,98\dots^\circ$, niin

$$\beta = 180^\circ - 56^\circ - 135,98\dots^\circ = -11,98\dots^\circ \text{ (ei kelpaa)}$$

Siis Koppelomäen ja Pyykallion väli näkyy 44° kulmassa.

Vastaus 44°

7

Lasketaan keilapallon tilavuus.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \left| \quad r = \frac{26,0 \text{ cm}}{2} = 13,0 \text{ cm} = 1,30 \text{ dm} \right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 1,30^3$$

$$= 9,202... \text{ (dm}^3\text{)}$$

Lasketaan keilapallon massa.

$$m = \rho V \quad \left| \quad \begin{array}{l} \rho = 19,32 \text{ kg/dm}^3 \\ V = 9,202... \text{ dm}^3 \end{array} \right.$$

$$= 19,32 \cdot 9,202...$$

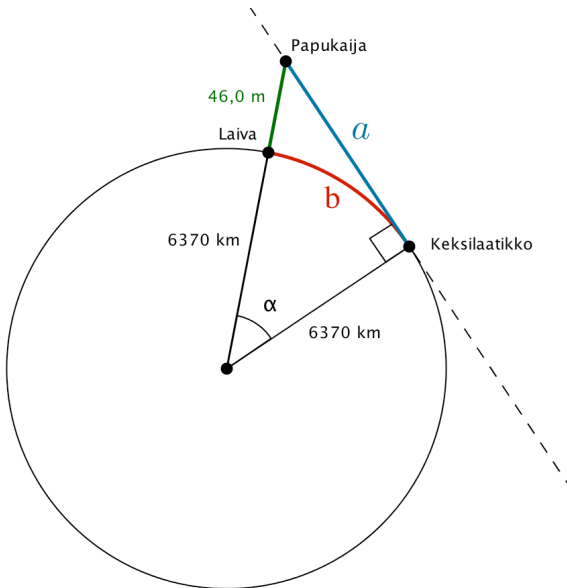
$$= 177,797...$$

$$\approx 178 \text{ (kg)}$$

Tavaravaaka näytti keilapallon painoksi 178 kg.

Vastaus 178 kg

8



- a-kohdassa kysytään pitkin tangenttisuoraa mitattua papukaijan ja keksilaatikon välistä etäisyyttä a .
- b-kohdassa kysytään ympyräkaaren pituutta b .

a) Lasketaan etäisyys a Pythagoraan lauseella.

Hypotenuusan pituus on $6370 \text{ km} + 46,0 \text{ m} = 6370,046 \text{ km}$.

$$6370,046^2 = 6370^2 + a^2$$

$$a^2 = 6370,046^2 - 6370^2 = 586,04\dots$$

$$a = \pm \sqrt{586,04\dots}$$

$$= 24,208306\dots \approx 24,2 \text{ (km)}$$

b) Lasketaan ensin keskuskulma α .

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370,046} = 0,999992\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,999992\dots = 0,2177\dots^\circ$$

Lasketaan keskuskulmaa α vastaavan ympyräkaaren pituus b .

$$\begin{aligned} b &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= \frac{0,2177\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6370 \\ &= 24,208190\dots \approx 24,2 \text{ (km)} \end{aligned}$$

c) Verrataan saatuja etäisyyksiä a ja b .

$$\begin{aligned} a - b &= 24,208306\dots \text{ km} - 24,208190\dots \text{ km} \\ &= 0,000116\dots \text{ km} \\ &= 11,6\dots \text{ cm} \approx 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

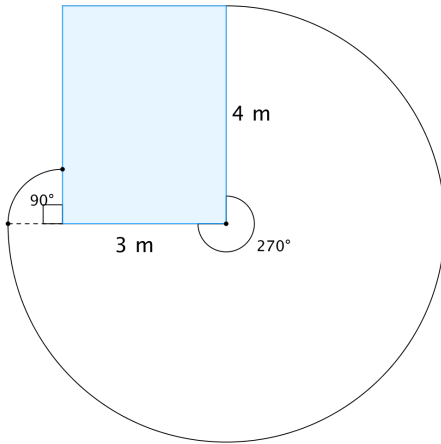
Etäisyyksillä on eroa noin 10 cm.

Huomaa: lähtöarvojen mittaustarkkuus asettaa tämän c-kohdan päätelmän hieman kyseenalaiseksi.

Vastaus a) 24,2 km
 b) 24,2 km
 c) 10 cm

9.

a)



Alue muodostuu kahdesta ympyräsektorista.

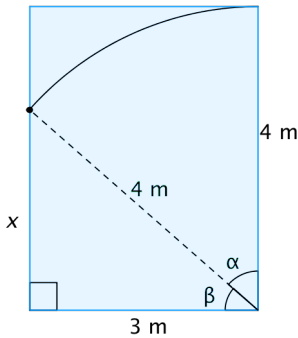
$$A = \frac{270^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 4^2 + \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 1^2$$

$$= 12\pi + \frac{1}{4}\pi$$

$$= \frac{49}{4}\pi \approx 38$$

Lammas ylettyy liikkumaan 38 m^2 laajuiselle alueelle.

b)



Lammas ylettyy liikkumaan alueella, joka koostuu ympyräsektorista ja suorakulmaisesta kolmiosta.

Suorakulmaisen kolmion toinen kateetti voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 4^2 - 3^2$$

$$x^2 = 7$$

$$x = \pm\sqrt{7} \quad x > 0$$

$$x = \sqrt{7}$$

Kolmion pinta-ala $A_k = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7}$.

Ratkaistaan kulma β .

$$\cos \beta = \frac{3}{4}$$

$$\beta \approx 41^\circ$$

$$\alpha \approx 90^\circ - 41^\circ = 49^\circ$$

Sektorin pinta-ala $A_s = \frac{49}{360} \pi \cdot 4^2$

Alueen koko pinta-ala on

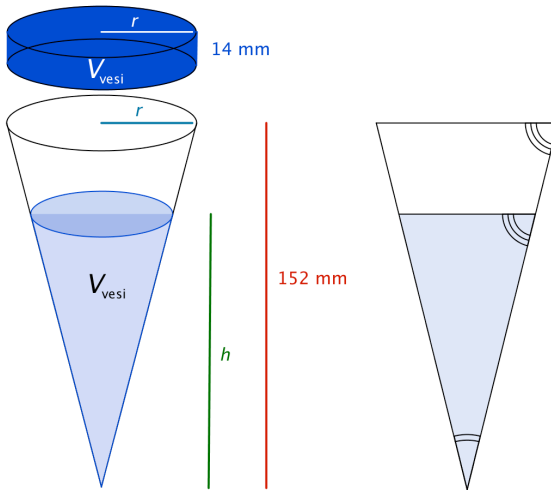
$$A = A_k + A_s = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} + \frac{49^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 4^2$$

$$A \approx 11$$

Lammas ylettyy liikkumaan 8 m^2 laajuisella alueella.

Vastaus a) 38 m^2 b) 11 m^2

10



Pystyssä, kärjellään seisovan suoran ympyräkartion poikkileikkaukseen syntyy kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret). Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \left(\frac{h}{152} \right)^3$$

$$h^3 = \frac{V_{\text{vesi}} \cdot 152^3}{V_{\text{kartio}}}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}} \cdot 152^3}{V_{\text{kartio}}}} = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}}}$$

Toisaalta ympyräkartiolla olevan veden tilavuus on sama kuin r -säteisen suoran ympyrälieriön tilavuus, jossa r on kartion yläosan säde.

$$V_{\text{vesi}} = A_p h = \pi r^2 \cdot 14$$

Lasketaan kartion tilavuuden ja veden tilavuuksien suhde.

$$\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}} = \frac{\cancel{\pi r^2} \cdot 14}{\frac{1}{3} \cancel{\pi r^2} \cdot 152} = \frac{14}{\frac{1}{3} \cdot 152} = \frac{3 \cdot 14}{152} = \frac{42}{152}$$

Nyt saadaan laskettua kysytty korkeus h .

$$h = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{V_{\text{vesi}}}{V_{\text{kartio}}}} = 152 \cdot \sqrt[3]{\frac{42}{152}} = 99,002\dots \approx 99 \text{ (mm)}$$

Koska $99 \text{ mm} \leq 152 \text{ mm}$, kaikki satanut vesi mahtuu kartioon.

Vesi nousee kartiossa 99 mm korkeuteen.

Vastaus 99 mm