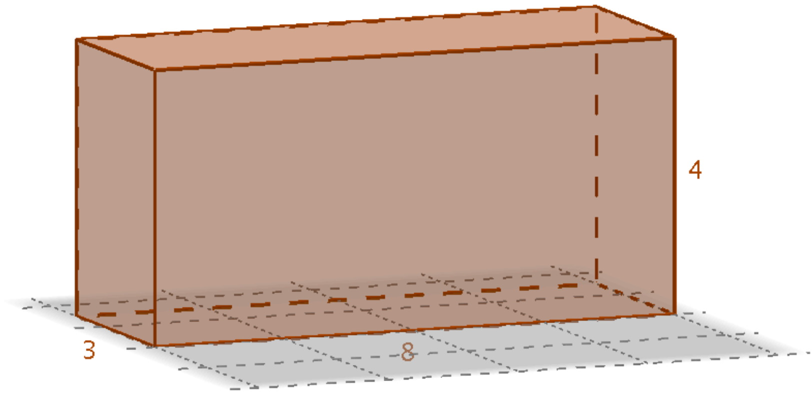
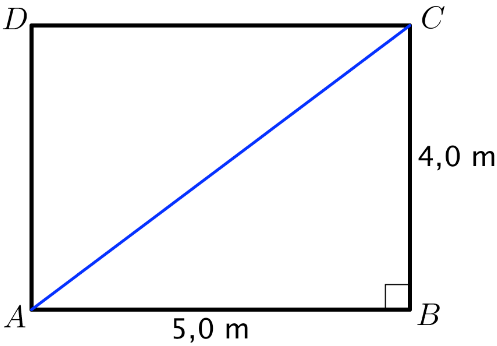
240

Kuva voidaan piirtää esimerkiksi GeoGebran 3D-piirtoalueessa. Piirtäminen voidaan esimerkiksi aloittaa piirtämällä suorakulmio pohjaksi ja syöttämällä sen jälkeen kartion korkeus.



241

a) Lattian lävistäjän AC pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ABC Pythagoraan lauseella.



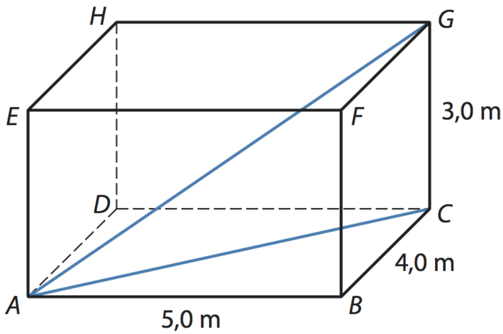
$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$$

$$|AC|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$|AC| = \pm\sqrt{41} = \pm 6{,}403\ldots \text{ (m)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|AC| \approx 6{,}4 \text{ m}$.

b) Avaruuslävistäjän AG pituus voidaan laskea särmien pituuksien avulla.



$$|AG|^2 = 5^2 + 4^2 + 3^2$$

$$|AG| = \pm\sqrt{50} = \pm 7{,}071... \text{ (m)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|AG| \approx 7{,}1 \text{ m}$.

Tapa 2

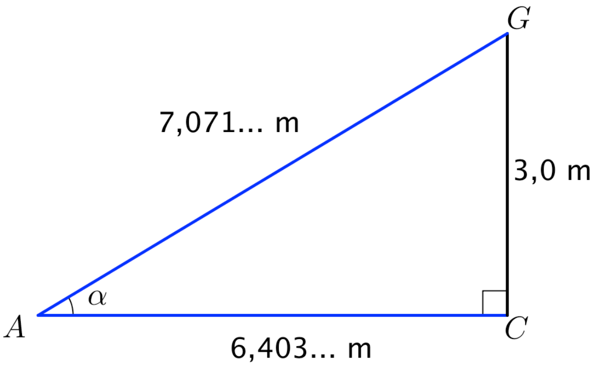
Avaruuslävistäjän pituus voidaan laskea myös suorakulmaisesta kolmiosta ACG Pythagoraan lauseella.

$$|AG|^2 = |AC|^2 + |CG|^2 \qquad \text{a-kohta: } |AC|^2 = 41$$

$$|AG|^2 = 41 + 3^2$$

$$|AG| = \pm\sqrt{50} \pm 7{,}071... \text{ (m)}$$

c) Lävistäjien AC ja AG välinen kulma voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ACG.



Kulma α voidaan ratkaista esimerkiksi tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{3}{6,403...}$$

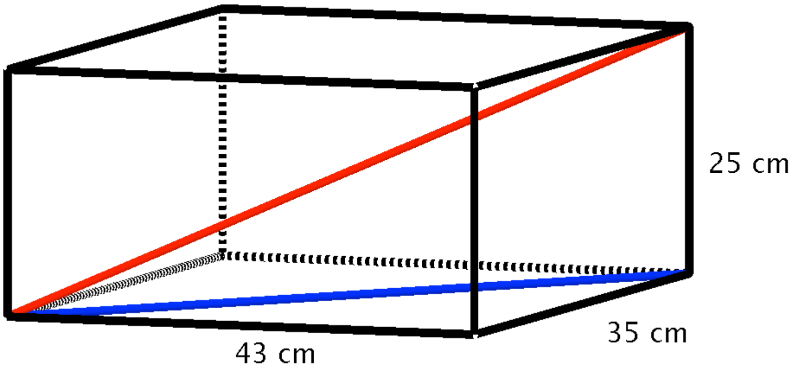
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6,403...}\right) = 25,104...^{\circ} \approx 25,1^{\circ}$$

Huomautus:
Koska kolmiosta tiedetään kaikkien sivujen pituudet voidaan kulma α ratkaista myös kosinin tai sinin avulla.

Vastaus a) 6,4 m b) 7,1 m c) 25,1°

242

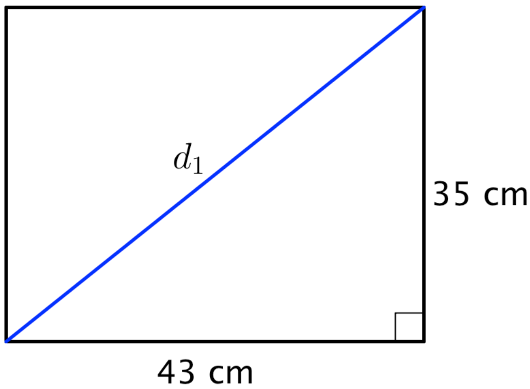
Piirretään mallikuva säilytyslaatikosta.



Laatikon pohjalle mahtuvan sauvan maksimipituus on pohjan lävistäjän pituus (piirretty sinisellä).

Laatikon sisälle mahtuvan sauvan maksimipituus on avaruuslävistäjän pituus (piirretty punaisella).

a) Lasketaan laatikon pohjan lävistäjä Pythagoraan lauseella.



$$d_1^2 = 43^2 + 35^2$$

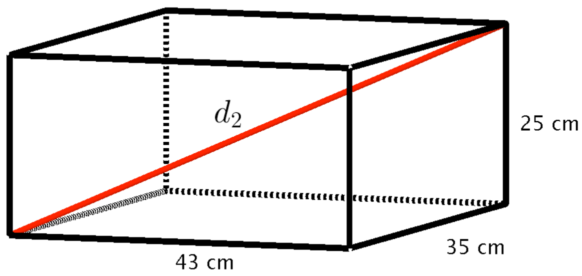
$$d_1^2 = 3074$$

$$d_1 = \pm\sqrt{3074} = \pm 55,443... \text{ (cm)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d_1 = 55,443\ldots$ cm.

Laatikon pohjalle mahtuu siis korkeintaan 55 cm pituinen sauva.

b) Lasketaan laatikon avaruuslävistäjän pituus.



$$d_2^2 = 43^2 + 35^2 + 25^2$$

$$d_2^2 = 3699$$

$$d_2 = \pm\sqrt{3699} = \pm 60{,}819... \text{ (cm)}$$

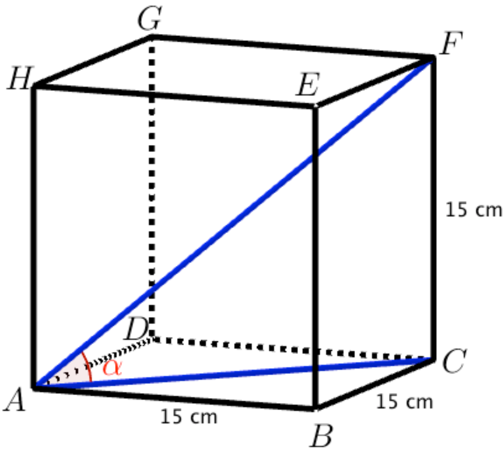
Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $d_2 = 60{,}819\ldots$ cm.

Laatikkoon mahtuu siis korkeintaan 60 cm pituinen sauva.

Vastaus a) 55 cm b) 60 cm

243

Piirretään mallikuva ja merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella α.

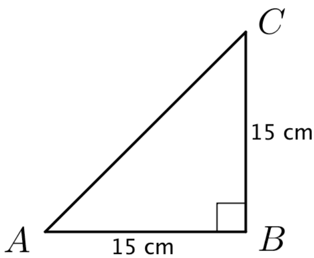


Lasketaan ensin pohjan lävistäjän AC pituus suorakulmaisesta kolmiosta ABC.

$$|AC|^2 = 15^2 + 15^2$$

$$|AC|^2 = 450$$

$$|AC| = \pm\sqrt{450} = \pm 21{,}213...$$



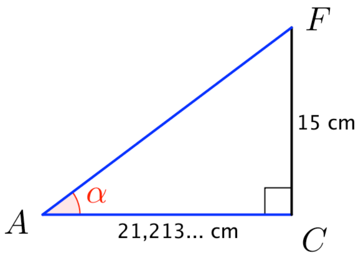
Koska pituus on positiivinen, niin $|AC| = 21{,}213...\text{ cm}$.

Nyt voimme laskea kulman α suuruuden suorakulmaisesta kolmiosta ACF.

$$\tan\alpha = \frac{15}{21{,}213...}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{15}{21{,}213...}\right)$$

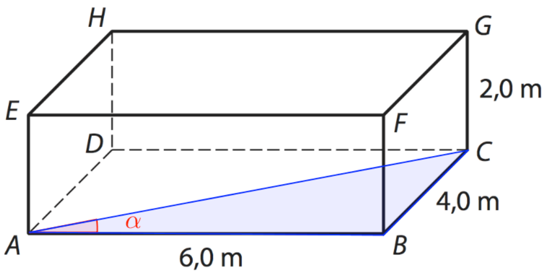
$$= 35{,}264...^{\circ} \approx 35{,}3^{\circ}$$



Vastaus $\quad 35{,}3^{\circ}$

244

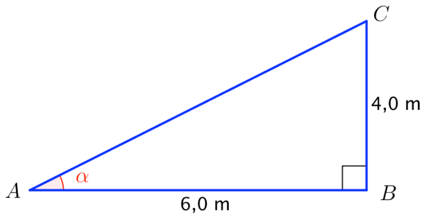
a) Kysytty kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta *ABC*.



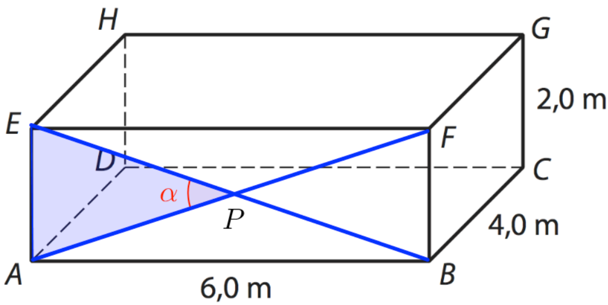
$$\tan\alpha = \frac{4}{6}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{6}\right)$$

$$= 33{,}690...^\circ \approx 34^\circ$$



b) Sivuseinämän lävistäjien välinen kulma voidaan ratkaista tasakylkisestä kolmiosta EAP.



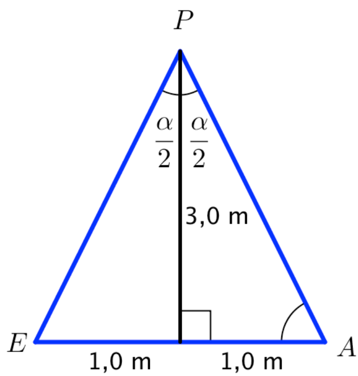
Koska kolmio EAP on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty kulman puolittaja jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Ratkaistaan kulma α.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$$

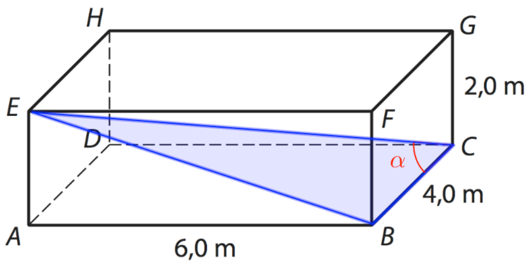
$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 18{,}434...^\circ \qquad \Big|\cdot 2$$

$$\alpha = 36{,}869...^\circ \approx 37^\circ$$



c) Kysytty kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta *EBC*.



Lasketaan ensin avaruuslävistäjän EC pituus suorakulmaisen särmiön särmien pituuksen perusteella.

$$|EC|^2 = 6^2 + 4^2 + 2^2$$

$$|EC|^2 = 56$$

$$|EC| = \pm\sqrt{56} = \pm 7{,}483...$$

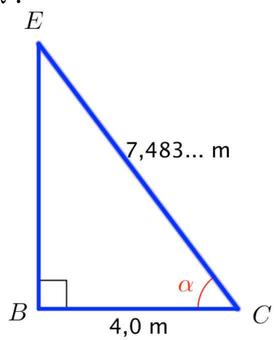
Pituus on positiivinen, joten $|EC| = 7{,}483...\text{ m}$.

Ratkaistaan seuraavaksi kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{4}{7{,}483...}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{7{,}483...}\right)$$

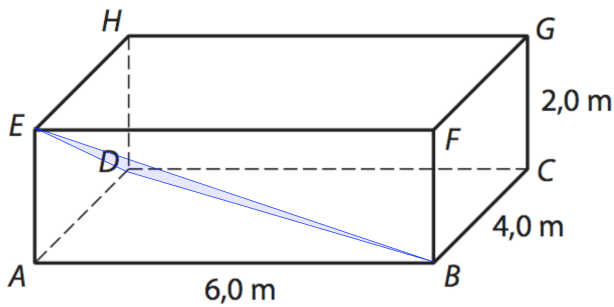
$$= 57{,}688...^\circ \approx 58^\circ$$



Vastaus a) 34° b) 37° c) 58°

245

Kysytty kulma voidaan ratkaista kolmiosta *EBD*.

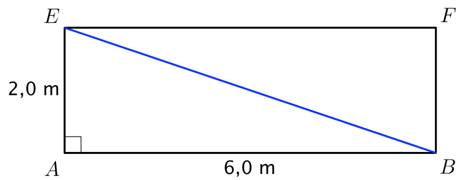


Lasketaan kolmion sivujen pituudet eli sivutahkojen lävistäjien pituudet Pythagoraan lauseen perusteella.

$$|EB|^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

$$|EB| = \pm\sqrt{40}\ \text{(m)}$$

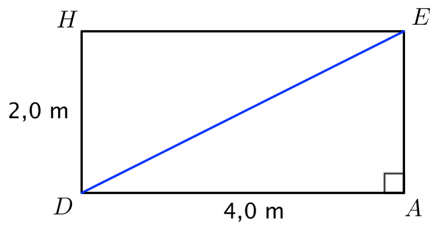
Siis $|EB| = \sqrt{40}$ m.



$$|ED|^2 = 4^2 + 2^2 = 20$$

$$|DE| = \pm\sqrt{20}\ \text{(m)}$$

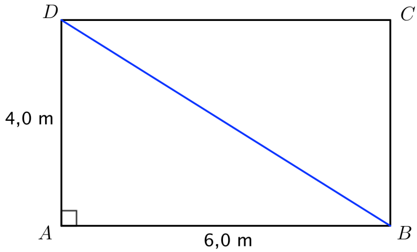
Siis $|DE| = \sqrt{20}$ m.



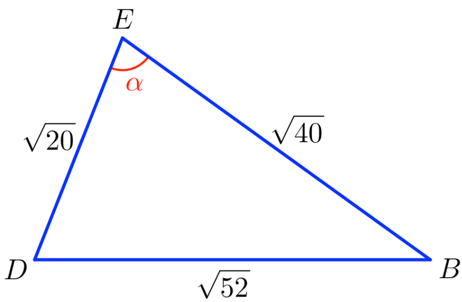
$$|DB|^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$|DB| = \pm\sqrt{52} \text{ (m)}$$

Siis $|DB| = \sqrt{52}$ m.



Ratkaistaan kysytty kulma kolmiosta EBD kosinilauseella.



$$|DB|^2 = |ED|^2 + |EB|^2 - 2|ED||EB|\cos\alpha$$

$$52 = 20 + 40 - 2\sqrt{20}\sqrt{40}\cos\alpha$$

$$2\sqrt{20}\sqrt{40}\cos\alpha = 60 - 52$$

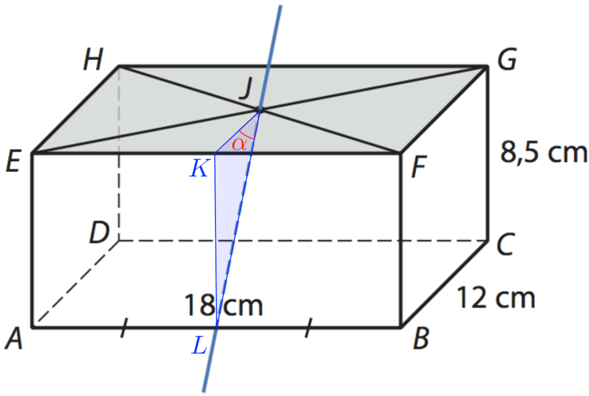
$$\cos\alpha = \frac{8}{2\sqrt{20}\sqrt{40}}$$

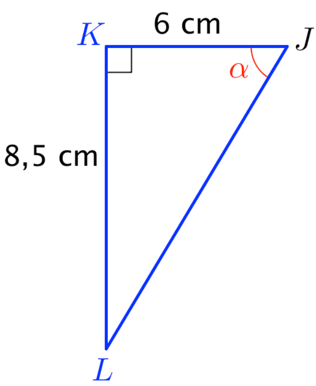
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{8}{2\sqrt{20}\sqrt{40}}\right) = 81{,}869...^\circ \approx 82^\circ$$

Vastaus 82°

246

Kysytty kulma α voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta *LJK*.





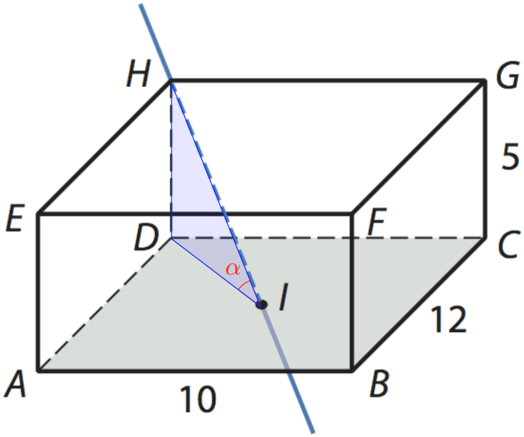
$$\tan\alpha = \frac{8{,}5}{6}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{8{,}5}{6}\right) = 54{,}782...^\circ \approx 55^\circ$$

Vastaus 55°

247

Kysytty kulma α voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta DIH.

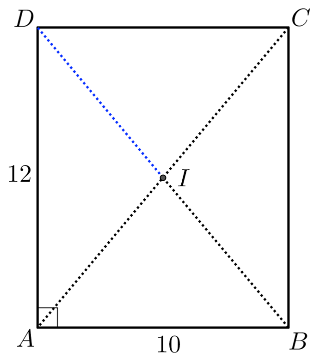


Lasketaan ensin sivun DI pituus. Piste I on pohjatahkon keskipiste, joten $|DI| = \frac{1}{2}|DB|$.

Lävistäjän DB pituus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$|DB|^2 = 10^2 + 12^2$$

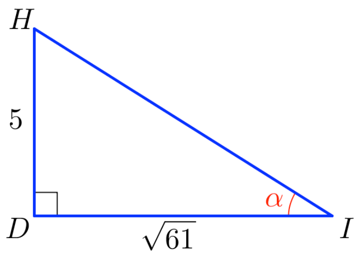
$$|DB| = \pm\sqrt{244} = \pm 2\sqrt{61}$$



Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|DB| = 2\sqrt{61}$.

Tällöin $|DI| = \frac{1}{2}|DB| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{61} = \sqrt{61}$.

Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta *DIH*.



$$\tan\alpha = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

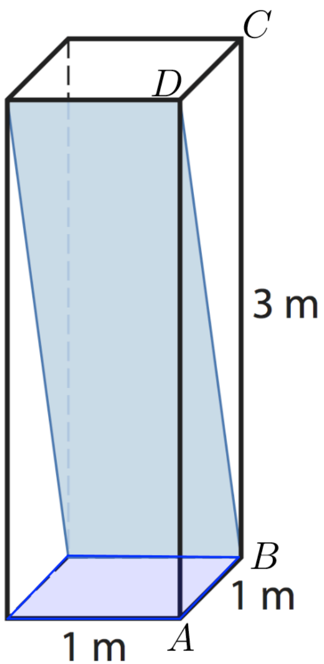
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)$$

$$= 32{,}626...^\circ \approx 33^\circ$$

Vastaus 33°

248

Suorakulmaisen särmiön päätytahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma on päätytahkon lävistäjän DB ja pohjasärmän AB välinen kulma, joka voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABD.

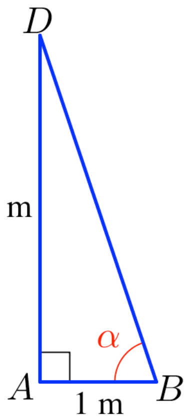


Ratkaistaan kulma α suorakulmaisesta kolmiosta *ABD*.

$$\tan\alpha = \frac{3}{1}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(3)$$

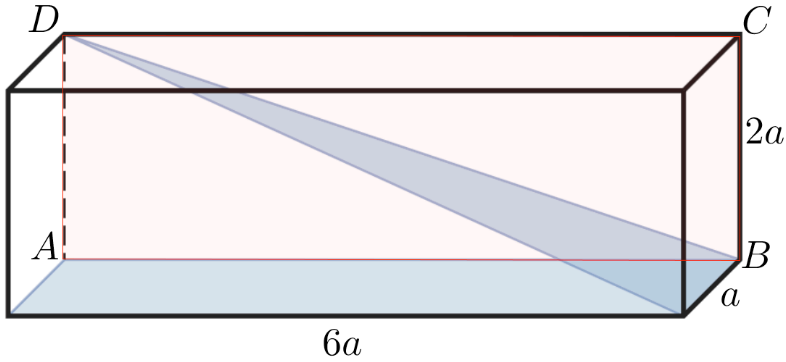
$$= 71{,}565...^\circ \approx 72^\circ$$



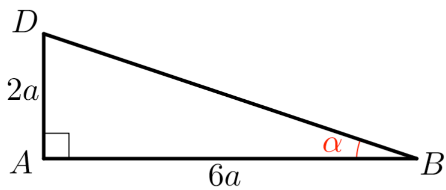
Vastaus 72°

249

a) Merkitään suorakulmaisen särmiön pohjan leveyttä kirjaimella a. Tällöin pohjan pituus on $6a$ ja särmiön korkeus $2a$.



Suorakulmaisen särmiön tahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma on päätytahkon lävistäjän DB ja pohjasärmän AB välinen kulma, joka voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta ABD.

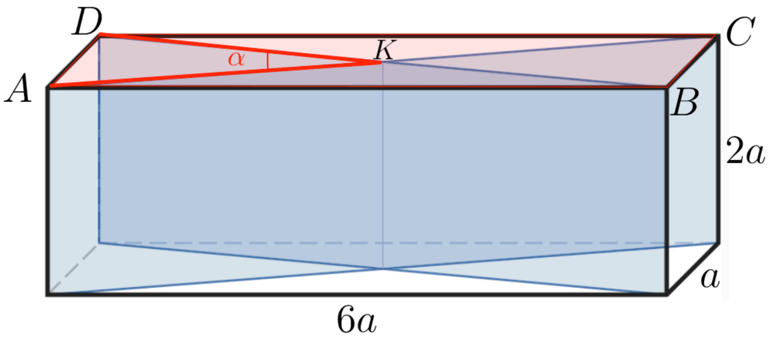


$$\tan\alpha = \frac{2\cancel{a}}{6\cancel{a}} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= 18{,}434...^\circ \approx 18{,}4^\circ$$

b) Suorakulmaisen särmiön tahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan. Tasojen välinen kulma on suorakulmion $ABCD$ lävistäjien välinen kulma, joka voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta DAK.



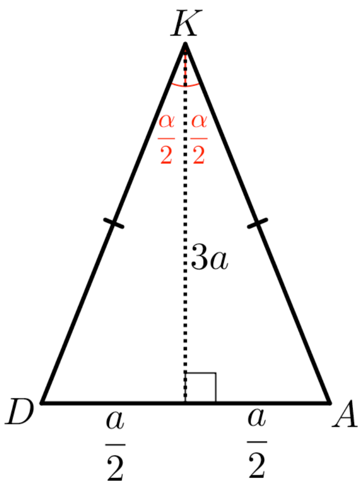
Koska kolmio DAK on tasakylkinen, niin huippukulman puolittaja jakaa kolmion DAK kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Ratkaistaan tasojen välinen kulma α.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{3a} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 9{,}462...^\circ \qquad \Big| \cdot 2$$

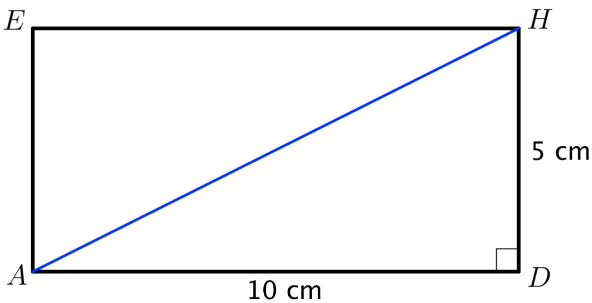
$$\alpha = 18{,}924... \approx 18{,}9^\circ$$



Vastaus a) 18,4° b) 18,9°

250

a) Sivutahkon lävistäjän AH pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ADH Pythagoraan lauseella.



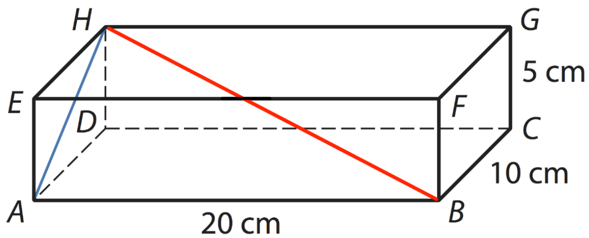
$$|AH|^2 = |AD|^2 + |DH|^2$$

$$|AH|^2 = 10^2 + 5^2$$

$$|AH| = \pm\sqrt{125} = \pm 11{,}180... \text{ (cm)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|AH| \approx 11{,}2 \text{ cm}$.

b) Avaruuslävistäjän HB pituus voidaan laskea särmien pituuksien avulla.



$$|HB|^2 = 20^2 + 10^2 + 5^2$$

$$|HB| = \pm\sqrt{525} = \pm 22{,}912\ldots \text{ (cm)}$$

Lävistäjän pituus on positiivinen, joten $|HB| \approx 22{,}9 \text{ cm}$.

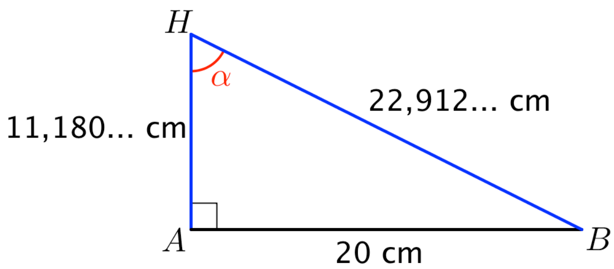
Tapa 2
Avaruuslävistäjän pituus voidaan laskea myös suorakulmaisesta kolmiosta ABH Pythagoraan lauseella.

$$|HB|^2 = |AB|^2 + |AH|^2 \qquad \text{a-kohta: } |AH|^2 = 125$$

$$HB^2 = 20^2 + 125$$

$$|HB| = \pm\sqrt{525} = \pm 22{,}912\ldots \text{ (cm)}$$

c) Lävistäjien AH ja HB välinen kulma voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta ABH.



Kulma α voidaan ratkaista esimerkiksi tangentin avulla.

$$\tan\alpha = \frac{20}{11{,}180...}$$

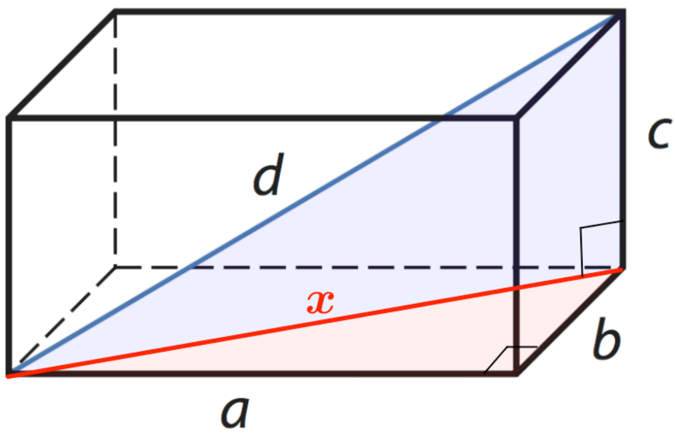
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{20}{11{,}180...}\right) = 60{,}794...^{\circ} \approx 60{,}8^{\circ}$$

Huomautus:
Koska kolmiosta tiedetään kaikkien sivujen pituudet voidaan kulma α ratkaista myös kosinin tai sinin avulla.

Vastaus a) 11,2 cm b) 22,9 cm c) 60,8°

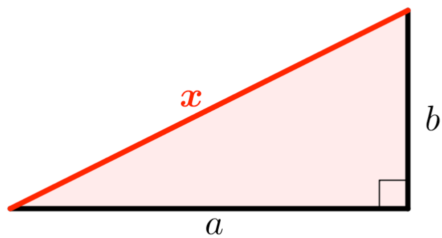
251

Avaruuslävistäjän pituus d voidaan laskea käyttämällä Pythagoraan lausetta kaksi kertaa.

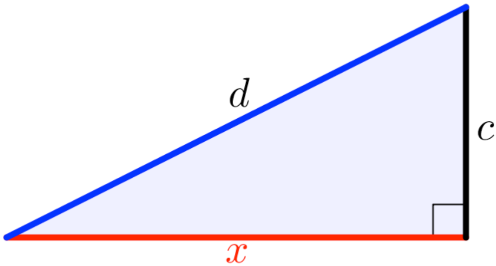


Lasketaan ensin pohjan lävistäjän pituuden neliö x^2.

$$x^2 = a^2 + b^2$$



Lasketaan seuraavaksi avaruuslävistäjän pituus d.



$$d^2 = x^2 + c^2 \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan } x^2 = a^2 + b^2$$

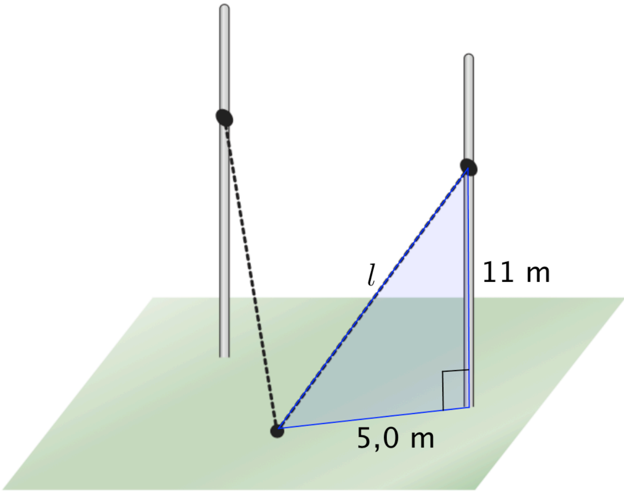
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. □

252

Lasketaan ensin tukivaijerin pituus l.



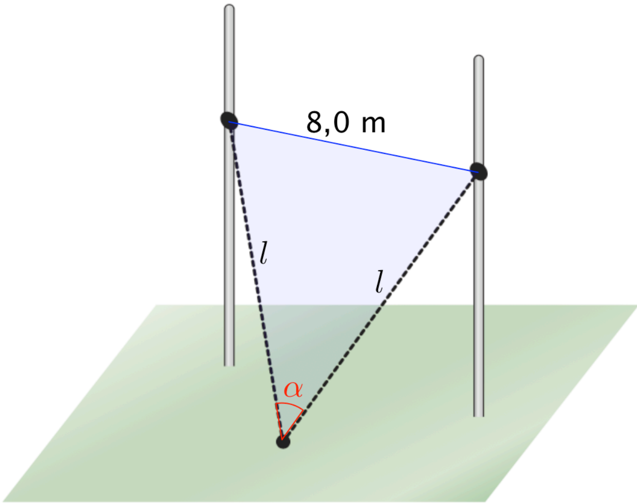
$$l^2 = 5^2 + 11^2$$

$$l^2 = 146$$

$$l = \pm\sqrt{146}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $l = \sqrt{146}$.

Lasketaan seuraavaksi vaijereiden välinen kulma kosinilauseella.



$$8{,}5^2 = l^2 + l^2 - 2 \cdot l \cdot l \cdot \cos\alpha$$

$$72{,}25 = 2l^2 - 2l^2 \cos\alpha \qquad \Big| \text{ Sijoitetaan } l^2 = 146$$

$$72{,}25 = 2 \cdot 146 - 2 \cdot 146 \cos\alpha$$

$$292 \cos\alpha = 292 - 72{,}25 \qquad \Big| : 292$$

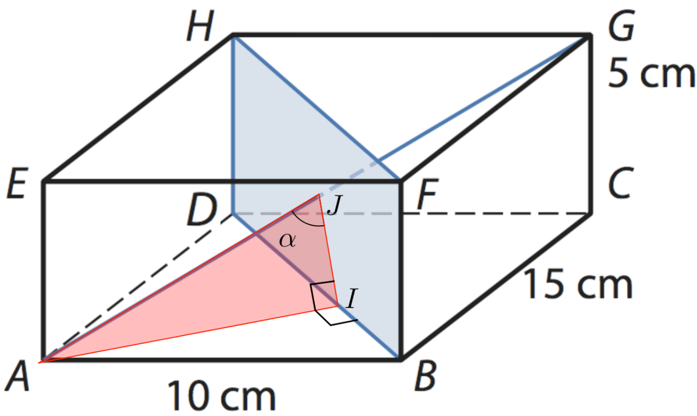
$$\cos\alpha = \frac{219{,}75}{292}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{219{,}75}{292}\right) = 41{,}186...^\circ \approx 41^\circ$$

Vastaus 41°

253

Pahvilevyn $BFHD$ ja tikun AG välinen kulma on janan AJ ja sen sen tasolla $BFHD$ olevan kohtisuoran projektiojanan IJ välinen kulma α. Kulma voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta AIJ.



Jana AJ on puolet avaruuslävistäjästä AG. Lasketaan avaruuslävistäjän AG pituus.

$$|AG|^2 = 10^2 + 15^2 + 5^2$$

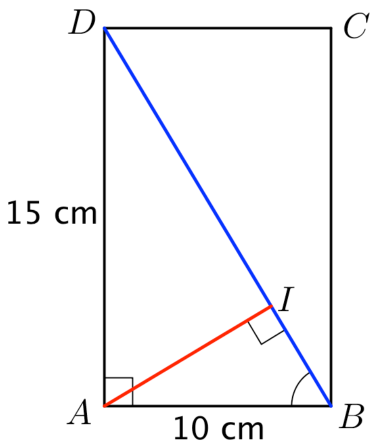
$$|AG|^2 = 350$$

$$|AG| = \pm\sqrt{350} = \pm 18{,}708... \text{ (cm)}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $|AG| = 18{,}708... \text{ cm}$.

Siten $|AJ| = \dfrac{18{,}708... \text{ cm}}{2} = 9{,}354... \text{ cm}$.

Lasketaan seuraavaksi janan AI pituus suorakulmiosta $ABCD$.



Lävistäjän DB pituus on $|DB| = \sqrt{10^2 + 15^2} = \sqrt{325}$.

Kolmiot ABI ja ABD ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla:

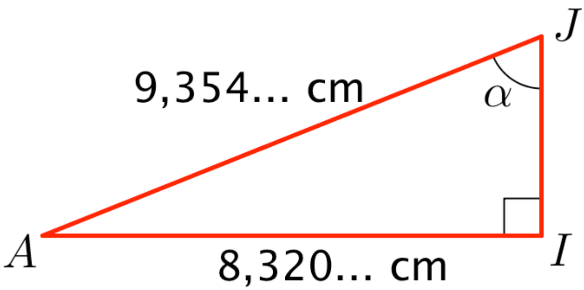
- suorat kulmat
- yhteinen kulma B.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan janan AI pituus.

$$\frac{|AI|}{15} = \frac{10}{\sqrt{325}} \qquad \Big| \cdot 15$$

$$|AI| = \frac{150}{\sqrt{325}} = 8{,}320\ldots \text{ (cm)}$$

Lasketaan kysytyn kulman α suuruus suorakulmaista kolmiosta *AIJ*.



$$\sin\alpha = \frac{8{,}320...}{9{,}354...}$$

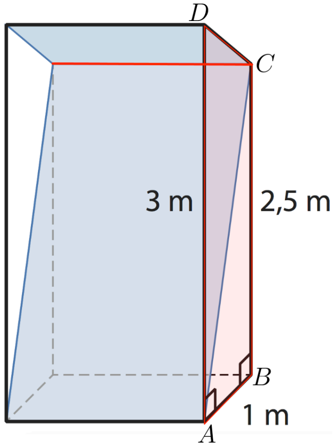
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{8{,}320...}{9{,}354...}\right)$$

$$\alpha = 62{,}810...^\circ \approx 62{,}8^\circ$$

Vastaus 62,8°

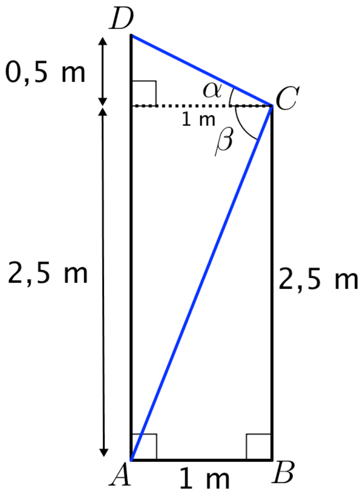
254

Särmiön päätytahko $ABCD$ on kohtisuorassa tasojen leikkaussuoraa vastaan.



Piirretään mallikuva päätytahkosta $ABCD$.

Päätytahkon sisällä oleva tasojen välinen kulma $\sphericalangle DCA = \alpha + \beta$ voidaan laskea kahdesta suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\tan\alpha = \frac{0,5}{1} = 0,5$$

$$\alpha = \tan^{-1} 0,5 = 26,565...^\circ$$

$$\tan\beta = \frac{2,5}{1} = 2,5$$

$$\beta = \tan^{-1} 2,5 = 68,198...^\circ$$

Täten kulman DCA suuruudeksi saadaan

$$\sphericalangle DCA = 26{,}565...^{\circ} + 68{,}198...^{\circ} = 94{,}763...^{\circ} \approx 95^{\circ}.$$

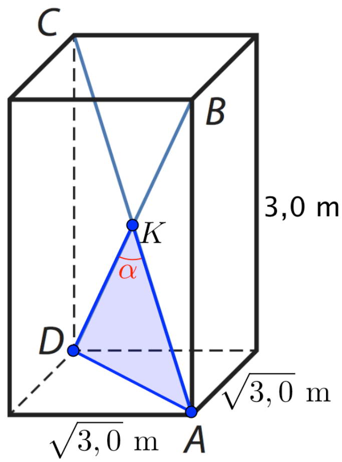
Koska kulma DCA on yli 90°, niin tasojen välinen kulma on sen vieruskulma eli

$$180^{\circ} - 95^{\circ} = 85^{\circ}.$$

Vastaus 85°

255

Koska pohja on neliö ja sen pinta-ala on 3,0 m^2, niin sen sivun pituus on $\sqrt{3{,}0}$ m .



Janojen DK ja AK pituudet ovat samat, koska ne ovat avaruuslävistäjän puolikkaita. Täten kysytty kulma α voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta DAK.

Lasketaan sivujen DK ja AK pituus. Lasketaan ensin avaruuslävistäjän pituus.

$$d^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2$$

$$d^2 = 15$$

$$d = \pm\sqrt{15} \ \text{(m)}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $d = \sqrt{15}$ m .

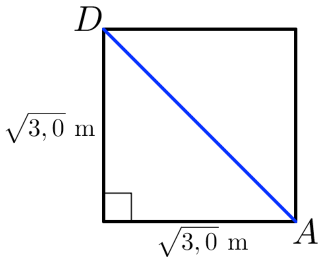
Täten $|DK| = |AK| = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$ m .

Lasketaan kolmion kolmannen sivun eli sivun DA pituus. DA on pohjaneliön lävistäjä.

$$|DA|^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$|DA|^2 = 6$$

$$|DA| = \pm\sqrt{6} \quad \text{(m)}$$



Koska pituus on positiivinen, niin $|DA| = \sqrt{6}$ m.

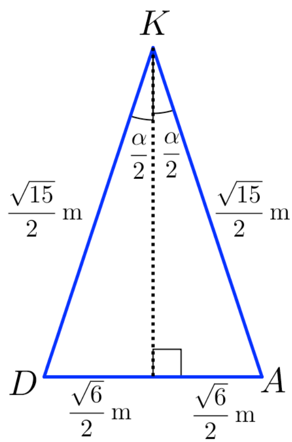
Koska kolmio DAK on tasakylkinen, niin huippukulmasta piirretty kulman puolittaja jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon. Lasketaan kysytyn kulman α suuruus.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = 39{,}231...^\circ \qquad \Big| \cdot 2$$

$$\alpha = 78{,}463...^\circ \approx 78^\circ$$



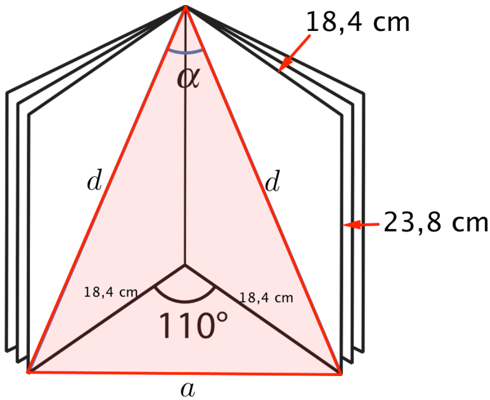
Vastaus $\quad$ 78°

Huomautus

Avaruuslävistäjien leikkauspisteen etäisyys pohjasta on puolet suorakulmaisen särmiön korkeudesta. Viimeisen kohdan suorakulmaisesta kolmiosta tiedetään täten myös toisen kateetin pituus, joka on 1,5 m. Kysytty kulma voitaisiin siis ratkaista myös kosinin tai tangentin avulla.

256

Kysytty kulma α voidaan laskea tasakylkisestä kolmiosta, jonka kyljet ovat kirjan sivun lävistäjiä d ja kanta a.



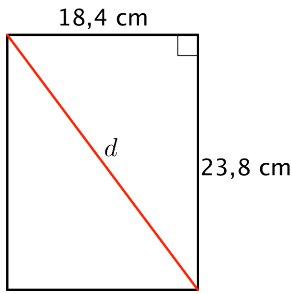
Lasketaan ensin pituus d eli kirjan sivun lävistäjän pituus.

$$d^2 = 23{,}8^2 + 18{,}4^2$$

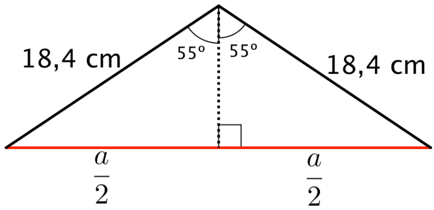
$$d^2 = 905$$

$$d = \pm\sqrt{905} = \pm 30{,}083..\ \text{(m)}$$

Pituus on positiivinen, joten $d = 30{,}083...$.



Lasketaan pituus a tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on 110°. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja jakaa kolmion kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi ja puolittaa kannan a.



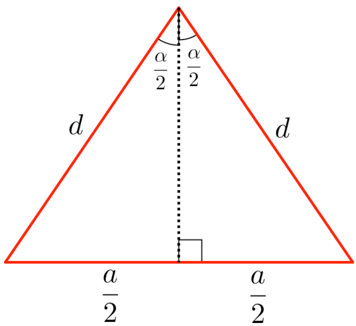
$$\sin 55^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{18{,}4}$$

$$\sin 55^\circ = \frac{a}{36{,}8} \qquad \Big| \cdot 36{,}8$$

$$a = 36{,}8 \cdot \sin 55^\circ$$

$$= 30{,}144\ldots \text{ (cm)}$$

Lasketaan kysytyn kulman α suuruus tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on α. Huippukulman puolittaja jakaa kolmion kahteen suorakulmaiseen kolmioon ja puolittaa kannan pituuden.



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{d} = \frac{a}{2d} \qquad a = 30{,}144\ldots \text{ ja } d = 30{,}083\ldots$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{30{,}144\ldots}{2 \cdot 30{,}083\ldots}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{30{,}144\ldots}{2 \cdot 30{,}083\ldots}\right) = 30{,}0677\ldots^\circ \qquad \Big| \cdot 2$$

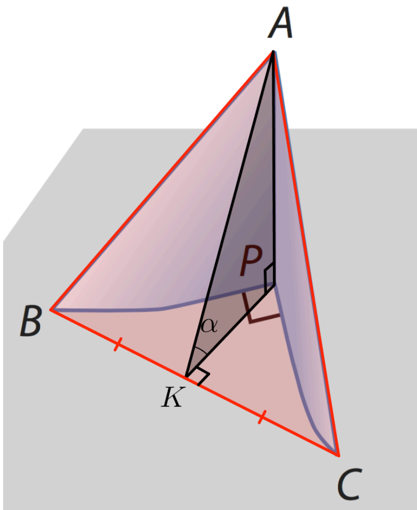
$$\alpha = 60{,}135\ldots^\circ \approx 60{,}1^\circ$$

Vastaus 60,1°

257

a)

Tason ABC ja pöydän välinen kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta KPA, jossa piste K on sivun BC keskipiste.



Sivun KA pituus on servietin korkeus eli 16 cm.

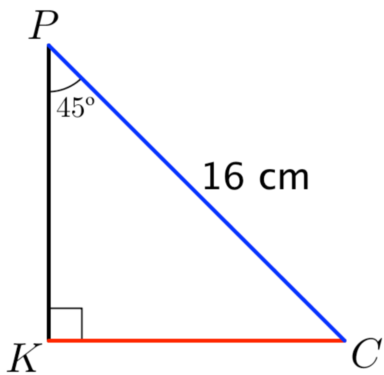
Sivun KP pituus voidaan laskea suorakulmaisesta kolmiosta KCP.

Lasketaan ensin sivun KP pituus. Sivun PC pituus on puolet servietin leveydestä eli 16 cm. Kulma CPK on puolet tasakylkisen kolmion BCP huippukulmasta 90° eli 45°.

$$\cos 45° = \frac{|KP|}{16} \qquad |\cdot 16$$

$$|KP| = 16 \cdot \cos 45°$$

$$= 11{,}313... \text{ (cm)}$$

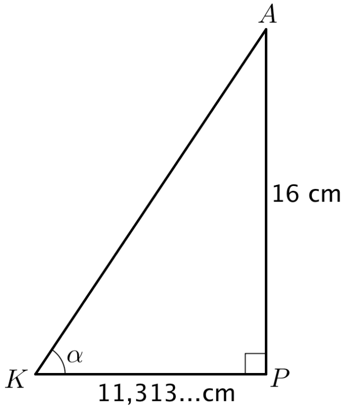


Lasketaan kulman α suuruus suorakulmaisesta kolmiosta KPA.

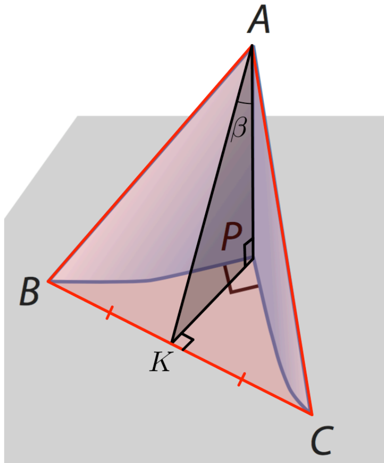
$$\tan\alpha = \frac{16}{11,313...}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{16}{11,313...}\right)$$

$$= 54,735...^\circ \approx 54,7^\circ$$



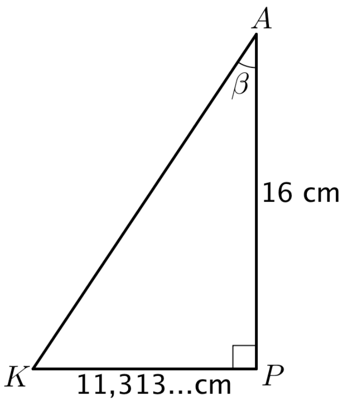
b) Myös tason ABC ja janan AP välinen kulma voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta KPA.



$$\tan\alpha = \frac{11{,}313...}{16}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{11{,}313...}{16}\right)$$

$$= 35{,}264...° \approx 35{,}2°$$



Tapa 2

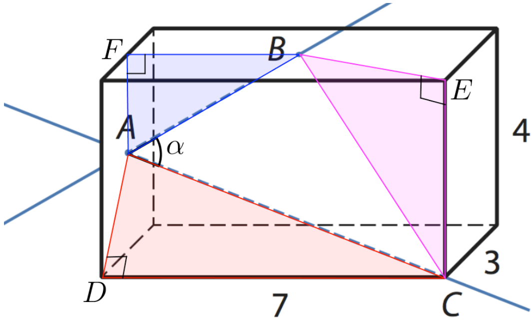
Kulman β suuruus voidaan ratkaista myös kolmion kulmien summan avulla.

$$\beta = 180° - 90° - 54{,}7° = 35{,}3°$$

Vastaus a) 54,7° b) 35,3°

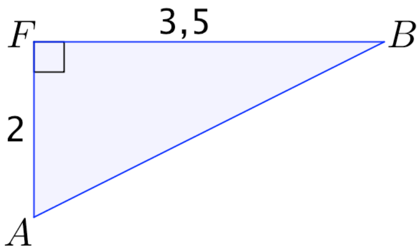
258

Lasketaan kolmion ABC sivujen pituudet kuvaan piirrettyjen suorakulmaisten kolmioiden avulla.



Kysytty kulma α voidaan määrittää sen jälkeen kosinilauseella.

Lasketaan sivun AB pituus.



$$|AB|^2 = 2^2 + 3{,}5^2$$

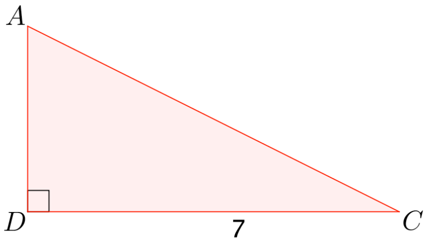
$$|AB|^2 = 16{,}25$$

$$|AB| = \pm\sqrt{16{,}25}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $|AB| = \sqrt{16{,}25}$.

Lasketaan sivun AC pituus.

Sivun AD pituus on puolet päätytahkon lävistäjästä. Koska päätytahkon sivun mitat ovat 3 ja 4, on sen lävistäjän pituus



$$d_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

Siis $|AD| = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

Nyt voidaan laskea sivun AC pituus.

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$$

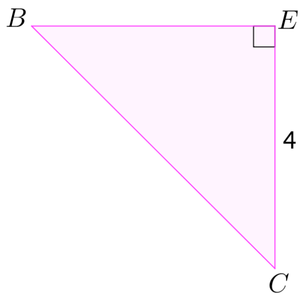
$$|AC|^2 = 2{,}5^2 + 7^2$$

$$|AC|^2 = 55{,}25$$

$$|AC| = \pm\sqrt{55{,}25}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $|AC| = \sqrt{55{,}25}$.

Lasketaan sivun BC pituus.



Sivun BE pituus on puolet ylätahkon lävistäjästä. Koska ylätahkon sivun mitat ovat 7 ja 3, on sen lävistäjän pituus

$$d_2 = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}\,.$$

Siis $|BE| = \dfrac{\sqrt{58}}{2}$.

Nyt voidaan laskea sivun BC pituus.

$$|BC|^2 = |BE|^2 + |EC|^2$$

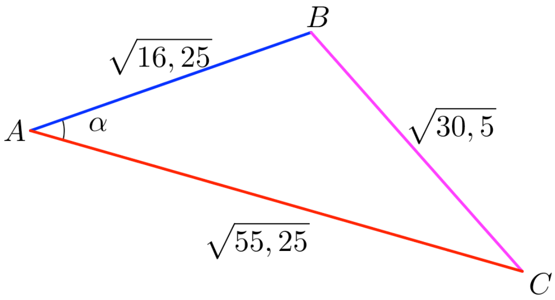
$$|BC|^2 = \left(\frac{\sqrt{58}}{2}\right)^2 + 4^2$$

$$|BC|^2 = 30{,}5$$

$$|BC| = \pm\sqrt{30{,}5}$$

Koska pituus on positiivinen, niin $|BC| = \sqrt{30{,}5}$.

Lasketaan kulman α suuruus kolmiosta ABC kosinilauseella.



$$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |AB||AC| \cos\alpha$$

$$30,5 = 16,25 + 55,25 - 2 \cdot \sqrt{16,25}\sqrt{55,25} \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{16,25 + 55,25 - 30,5}{2 \cdot \sqrt{16,25}\sqrt{55,25}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{16,25 + 55,25 - 30,5}{2 \cdot \sqrt{16,25}\sqrt{55,25}}\right) = 46,830...^{\circ} \approx 47^{\circ}$$

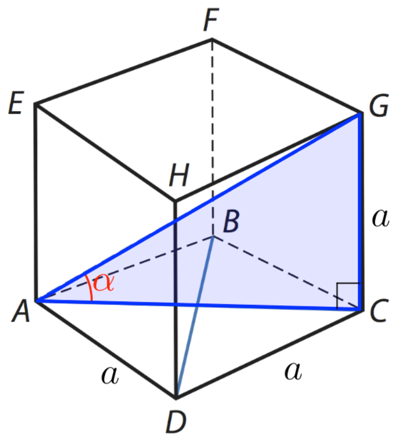
Vastaus 47°

Huomautus
Kosinilauseella muodostetun yhtälön voi ratkaista myös laskimella. Tällöin ratkaisu täytyy rajoittaa välille $[0^{\circ}, 180^{\circ}]$, koska kolmion kulma on aina tällä välillä. Komento saattaa näyttää esimerkiksi tältä:

$$\text{solve}(30.5 = 16.25 + 55.25 - 2 \cdot \sqrt{16.25}\sqrt{55.25} \cos(x), x) \mid 0 < x < 180$$

259

Kysytty kulma α voidaan määrittää suorakulmaisesta kolmiosta ACG.



Merkitään kuution särmän pituutta kirjaimella a. Tällöin pohjan lävistäjän pituus on

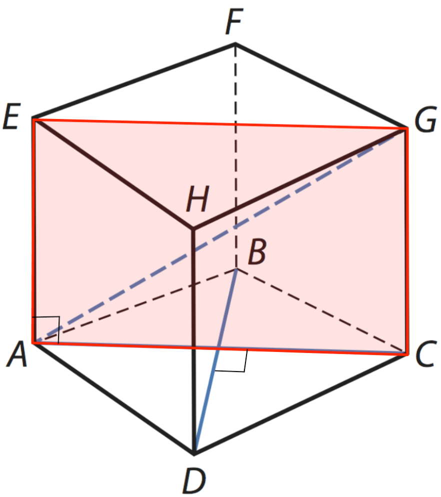
$$
\begin{aligned}
|AC| &= \sqrt{a^2+a^2} \\
&= \sqrt{2a^2} \qquad |\, a>0 \\
&= a\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan kulman α suuruus.

$$\tan\alpha = \frac{\overset{1}{\cancel{a}}}{\underset{1}{\cancel{a}}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 35{,}264\ldots^\circ \approx 35{,}3^\circ$$

Avaruuslävistäjä AG on suorakulmion $ACGE$ lävistäjä eli avaruuslävistäjä on kuution kärkipisteiden A, C, G ja E kautta kulkevassa tasossa. Tämä taso on kohtisuorassa pohjaa $ADCB$ vastaan ja leikkaa pohjan pitkin lävistäjää AC.



Koska pohja on neliö, sen lävistäjät AC ja BD ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Täten taso on kohtisuorassa lävistäjää BD vastaan. Siis tasossa kulkevan lävistäjän AG ja pohjan lävistäjän BD suuntien välinen kulma on 90°.

Vastaus $\sphericalangle(AG, AC) = 35{,}3^\circ$, $\sphericalangle(AG, BD) = 90^\circ$

260

a) $A = 4\pi r^2 \qquad \big| \, r = 11 \text{ cm}$

$= 4 \cdot \pi \cdot 11^2$

$= 4 \cdot \pi \cdot 121$

$= 484\pi$

$= 1520{,}5...$

$\approx 1500 \ (\text{cm}^2)$

Jalkapallon pinta-ala on 1500 cm^2.

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \big| \, r = 11 \text{ cm}$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot 11^3$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot 1331$

$= 5575{,}2...$

$\approx 5600 \ (\text{cm}^3)$

Jalkapallon tilavuus on 5600 cm^3.

Vastaus a) 1500 cm^2 b) 5600 cm^3

261

a) $A = 4\pi r^2$ $\quad\Big|\ A = 4070\ \text{cm}^2$

$$4070 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{4070}{4 \cdot \pi}$$

$$r = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{4070}{4 \cdot \pi}}$$

$$= 17{,}99...$$

$$\approx 18{,}0\ \text{(cm)}$$

Rantapallon säde on 18,0 cm.

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad\Big|\, V = 74 \text{ L} = 74 \text{ dm}^3$

$$74 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad \Big|\cdot 3$$

$$3 \cdot 74 = 4\pi \cdot r^3 \quad \Big|: 4\pi$$

$$r^3 = \frac{3 \cdot 74}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 74}{4\pi}}$$

$$= 2{,}60...$$

$$\approx 2{,}6 \;\; \text{(dm)}$$

Rantapallon säde on 2,6 dm = 26 cm.

Vastaus a) 18,0 cm b) 26 cm

262

a) $A = 4\pi r^2$ $\quad\Big|\; A = 1660\ \text{m}^2$

$$1660 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$r^2 = \frac{1660}{4 \cdot \pi}$$

$$r = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{1660}{4 \cdot \pi}}$$

$$= 11{,}49\ldots\ \text{(m)}$$

Kuumailmapallon halkaisija on

$$2 \cdot r = 2 \cdot 11{,}49\ldots\ \text{m} = 22{,}9\ldots\ \text{m} \approx 23\ \text{m}\ .$$

b) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Big| \, r = 11{,}49\ldots \text{ m}$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot (11{,}49\ldots)^3$

$= 6359{,}68\ldots$

$\approx 6360 \ \ (\text{m}^3)$

Kuumailmapallon tilavuus on 6360 m^3.

Vastaus a) 23 m b) 6360 m^3

263

Lasketaan umpinaisen rautapallon massa ja verrataan sitä tutkittavan pallon massaan.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Big|\, r = 15\ \text{cm}$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3\ (\text{cm}^3)$$

Tiheys on massa jaettuna tilavuudella eli $\rho = \frac{m}{V}$.
Massa saadaan siis kertomalla tiheys tilavuudella eli $m = \rho V$.

$$m = \rho V \qquad \left|\, \begin{array}{l} \rho = 7{,}87\ \text{g/cm}^3 \\ V = \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3\ \text{cm}^3 \end{array}\right.$$

$$= 7{,}87 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 15^3$$

$$= 111259{,}5...\ (\text{g})$$

Umpinaisen rautapallon massa on

$111259{,}5...\ \text{g} = 111{,}2...\ \text{kg} > 93\ \text{kg}$.

Siis tutkittavan pallon täytyy olla ontto.

Vastaus Pallo on ontto.

264

Olkoon pallon alkutilanteessa pallon säde r ja tilavuus V.

Lopuksi pallon säde on R ja tilavuus $1{,}15V$.

a) Muodostetaan yhtälö.

$$1{,}15V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Big| \text{ Sijoitetaan } V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

$$1{,}15 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Big| \cdot \frac{3}{4\pi}$$

$$1{,}15 \cdot r^3 = R^3 \quad \Big| : r^3$$

$$\frac{R^3}{r^3} = 1{,}15$$

$$\frac{R}{r} = \sqrt[3]{1{,}15} = 1{,}0476... = 104{,}76...\ \%$$

Säde kasvoi $104{,}76...\ \% - 100\ \% = 4{,}76...\ \% \approx 4{,}8\ \%$.

b) Lasketaan lopputilanteen pinta-alan $A_2 = 4\pi R^2$ ja alkuperäisen pinta-alan $A_1 = 4\pi r^2$ suhde.

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{4\pi R^2}{4\pi r^2}$$

$$= \frac{R^2}{r^2}$$

$$= \left(\frac{R}{r}\right)^2 \qquad \left| \ \frac{R}{r} = \sqrt[3]{1,15} \right.$$

$$= (\sqrt[3]{1,15})^2$$

$$= 1,0976...$$

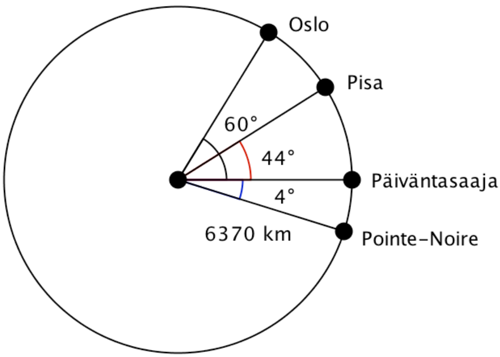
$$= 109,76...\ \%$$

Pallon pinta-ala kasvoi $109,76...\ \% - 100\ \% = 9,76\ \% \approx 9,8\ \%$

Vastaus a) 4,8 % b) 9,8 %

265

Piirretään Maan poikkileikkauskuva 12. itäisen pituuspiirin kohdalta.



a) Lasketaan matka Oslosta Pisaan pitkin ympyrän kaarta.
Keskuskulma on $60° - 44° = 16°$.

Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha = 16° \\ r = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{16°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

$$= 1778{,}8...$$

$$\approx 1800 \text{ (km)}$$

Matka Oslosta Pisaan on 1800 km.

b) Lasketaan matka Oslosta Pointe-Noireen pitkin ympyrän kaarta. Keskuskulma on $60° + 4° = 64°$.

Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha = 64° \\ r = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{64°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

$$= 7115{,}3...$$

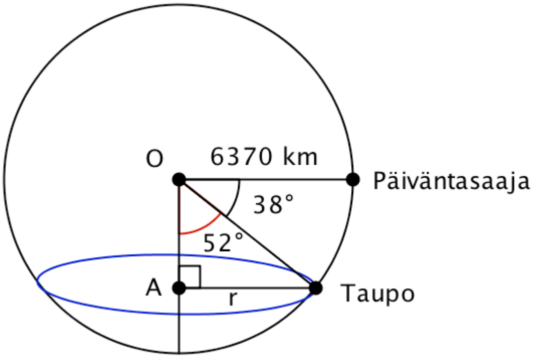
$$\approx 7100 \text{ (km)}$$

Matka Oslosta Pointe-Noireen on 7100 km.

Vastaus a) 1800 km b) 7100 km

266

Maailmanmatkaaja kiertää Maan pitkin 38. eteläistä leveyspiiriä.



Lasketaan 38. eteläisen leveyspiirin säde suorakulmaisesta kolmiosta *OAT*. Terävä kulma on $90° - 38° = 52°$.

$$\sin 52° = \frac{r}{6370}$$

$$r = 6370 \cdot \sin 52° = 5019{,}6... \text{ (km)}$$

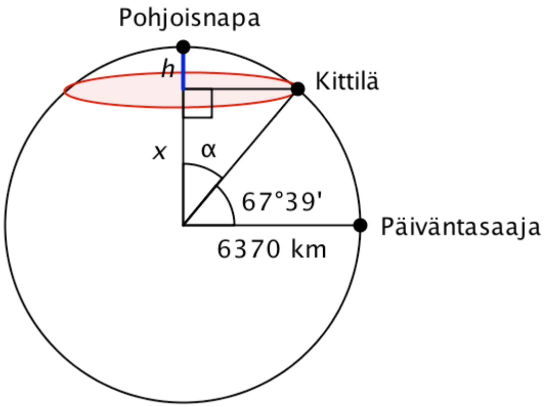
38. Leveyspiirin pituus on

$$p = 2\pi r = 2\pi \cdot 6370 \cdot \sin 52° = 31539{,}2... \approx 31500 \text{ (km)}.$$

Matkaaja on kulkenut 31500 km matkan.

Vastaus 31500 km

267



Lasketaan Kittilän leveyspiirin kautta kulkevan pikkuympyrän keskipisteen etäisyys pohjoisnavasta. Tämän avulla saadaan laskettua Kittilän pohjoispuolisen pallokalotin pinta-ala.

$$67°\,39' = 67° + \frac{39°}{60} = 67,65°$$

$$\alpha = 90° - 67,65° = 22,35°$$

$$\cos 22,35° = \frac{x}{6370}$$

$$x = 6370 \cdot \cos 22,35° \text{ (km)}$$

Pallokalotin pinta-alan osuus koko Maan pinta-alasta on

$$\frac{A_{kalotti}}{A_{Maapallo}} = \frac{\cancel{2}\,\cancel{\pi}\,\cancel{r}\,h}{\underset{2}{\cancel{4}}\,\cancel{\pi}\,r^{\cancel{2}}}$$

$$\left| \begin{aligned} A_{kalotti} &= 2\pi r h \\ A_{Maapallo} &= 4\pi r^2 \end{aligned} \right.$$

$$\left| \begin{aligned} r &= 6370 \text{ km} \\ h &= r - x \\ &= 6370 - 6370 \cdot \cos 22{,}35^\circ \\ &= 6370 \cdot (1 - \cos 22{,}35^\circ) \text{ (km)} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{h}{2r}$$

$$= \frac{\cancel{6370} \cdot (1 - \cos 22{,}35^\circ)}{2 \cdot \cancel{6370}}$$

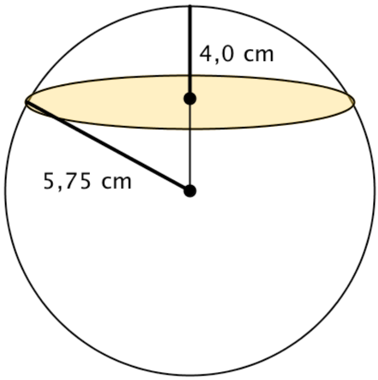
$$= \frac{1 - \cos 22{,}35^\circ}{2}$$

$$= 0{,}0375... = 3{,}75...\ \% \approx 3{,}8\ \%$$

Kittilän leveyspiirin pohjoispuolella on 3,8 % Maan pinta-alasta.

Vastaus 3,8 %

268



Greippipallon säde on $\dfrac{11{,}5\text{ cm}}{2} = 5{,}75\text{ cm}$.

Segmentin tilavuus on

$$V_s = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) \qquad \left|\begin{array}{l} h = 4{,}0\text{ cm} \\ r = 5{,}75\text{ cm} \end{array}\right.$$

$$= \pi \cdot 4{,}0^2\left(5{,}75 - \frac{4{,}0}{3}\right)$$

$$= 222{,}005\ldots \approx 220\ (\text{cm}^3).$$

Koko greipin tilavuus:

$$V_p = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad \Big| \, r = 5{,}75 \text{ cm}$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}75^3$$

$$= 796{,}328... \ (\text{cm}^3)$$

Arvio greippisegmentin massalle saadaan tilavuuksien suhteen avulla:

$$m_s = \frac{V_s}{V_p} \cdot 165 \text{ g}$$

$$= \frac{222{,}005...}{796{,}328...} \cdot 165 \text{ g}$$

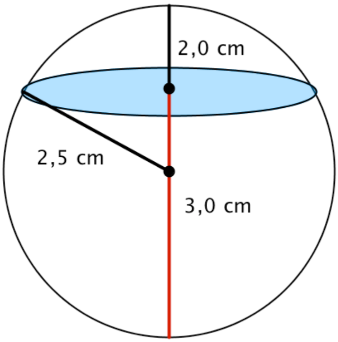
$$= 0{,}2787... \cdot 165 \text{ g}$$

$$= 45{,}99... \text{ g} \approx 46 \ g$$

Greippisegmentin tilavuus on 220 cm^3 ja massa 46 g.

Vastaus 220 cm^3 ja 46 g

269



Styroxpallosta on veden alla 5,0 cm – 2,0 cm = 3,0 cm.

a) Lasketaan veden alla olevan segmentin pinta-alan suhde koko pallon pinta-alaan.

$$\frac{A_s}{A_p} = \frac{\cancel{2}\,\cancel{\pi}\,\cancel{r}\,h}{\underset{2}{\cancel{4}}\,\cancel{\pi}\,r^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{h}{2r} \qquad \left| \begin{array}{l} h = 3{,}0 \text{ cm} \\ r = 2{,}5 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{3{,}0}{2 \cdot 2{,}5}$$

$$= \frac{3{,}0}{5{,}0}$$

$$= 0{,}6 = 60\ \%$$

Veden alla on 60 % styroxpallon pinta-alasta.

b) Lasketaan veden alla olevan segmentin tilavuuden suhde koko pallon tilavuuteen.

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{\cancel{\pi} h^2\left(r-\dfrac{h}{3}\right)}{\dfrac{4}{3}\cancel{\pi} r^3}$$

$$= \frac{h^2\left(r-\dfrac{h}{3}\right)}{\dfrac{4}{3}r^3} \qquad \left| \begin{array}{l} h = 3{,}0 \text{ cm} \\ r = 2{,}5 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{3{,}0^2 \cdot \left(2{,}5-\dfrac{3{,}0}{3}\right)}{\dfrac{4}{3}\cdot 2{,}5^3}$$

$$= 0{,}648$$

$$= 64{,}8\ \% \approx 65\ \%$$

Veden alla on 65 % styroxpallon tilavuudesta.

Vastaus a) 60 % b) 65 %

270

Lasketaan pallon säde pinta-alan avulla.

$$A = 4\pi r^2$$

$$r^2 = \frac{A}{4\pi}$$

$$r = {}_{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{A}{4\pi}}$$

$$\left| \begin{aligned} A &= 3{,}65\ \text{m}^2 = 3{,}65 \cdot (10\ \text{dm})^2 \\ &= 365\ \text{dm}^2 \end{aligned} \right.$$

$$= \sqrt{\frac{365}{4\pi}}$$

$$= 5{,}389...\ (\text{dm})$$

Pallon tilavuus saadaan laskettua säteen avulla.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\left| r = \sqrt{\frac{365}{4\pi}} \right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\sqrt{\frac{365}{4\pi}} \right)^3$$

$$= 655{,}71... \approx 656\ (\text{dm}^3)$$

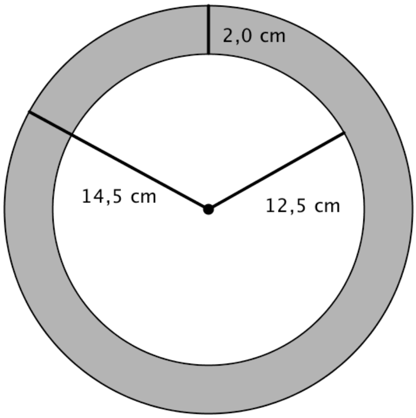
Tilavuus on $656\ \text{dm}^3 = 656\ \text{L}$.

Vastaus 656 L

271

Betonipallon ulkosäde on $r_u = \dfrac{29\text{ cm}}{2} = 14{,}5\text{ cm}$.

Onton sisäosan säde on $r_s = 14{,}5\text{ cm} - 2{,}0\text{ cm} = 12{,}5\text{ cm}$.



Betoniosan tilavuus V_b saadaan vähentämällä koko pallon tilavuudesta V_u onton sisäosan tilavuus V_s.

$$V_b = V_u - V_s$$

$$= \frac{4}{3}\pi r_u^3 - \frac{4}{3}\pi r_s^3 \qquad \left| \begin{array}{l} r_u = 14{,}5\text{ cm} \\ r_s = 12{,}5\text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot 14{,}5^3 - \frac{4}{3}\pi \cdot 12{,}5^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi \cdot (14{,}5^3 - 12{,}5^3)$$

$$= 4588{,}81...\ (\text{cm}^3)$$

Tiheys on massa jaettuna tilavuudella eli $\rho = \dfrac{m}{V}$.

Ratkaisemalla tästä massa saadaan $m = \rho V$.

Betonin massa on

$$m = \rho V \qquad \left|\; \begin{aligned} \rho &= 2100\ \mathrm{kg/m^3} \\ V &= 4588{,}81\ldots\mathrm{cm^3} \\ &= 4588{,}81\ldots \cdot \left(\frac{\mathrm{m}}{100}\right)^3 \\ &= \frac{4588{,}81\ldots\ \mathrm{m^3}}{1000000} \\ &= 0{,}00458881\ldots\ \mathrm{m^3} \end{aligned} \right.$$

$$= 2100\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}} \cdot 0{,}00458881\ldots\ \mathrm{m^3}$$

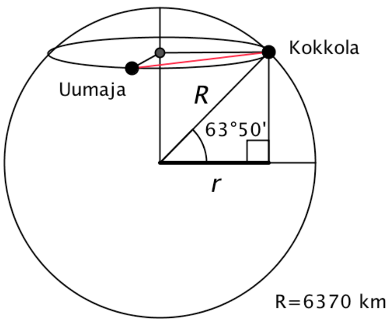
$$= 9{,}63\ldots\ \mathrm{kg} \approx 9{,}6\ \mathrm{kg}.$$

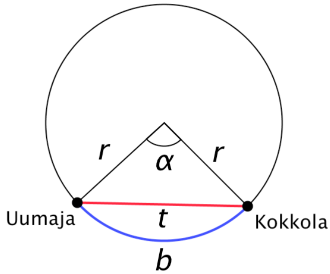
Betonipallon massa on 9,6 kg.

Vastaus 9,6 kg

272

Piirretään Maan poikkileikkauskuva pitkin Kokkolan pituuspiiriä. Piirretään myös poikkileikkauskuva pitkin Kokkolan ja Uumajan yhteistä leveyspiiriä.





a-kohdassa kysytään pikkuympyrän kaaren pituutta *b*, jonka laskemiseksi on ensin selvitettävä pikkuympyrän eli $63°50'$ leveyspiirin säde r.
b-kohdassa tarvitaan kaaren b lisäksi tunnelin pituus t, eli Kokkolan ja Uumajan välistä kaarta vastaavan pikkuympyrän jänteen pituus.

a) Leveyspiirin $63°50'$ säde saadaan suorakulmaisesta kolmiosta kosinin avulla.

$$\cos 63°50' = \frac{r}{R} \qquad \left| \begin{array}{l} 63°50' = 63{,}8333...° \\ R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$r = 6370 \cdot \cos 63{,}8333...°$$

$$= 2809{,}06... \text{ (km)}$$

Lasketaan kaaren pituus b.

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r \qquad \left| \begin{aligned} r &= 2809{,}06... \text{ km} \\ \alpha &= 23°8' - 20°16' \\ &= 23{,}133...° - 20{,}266...° \\ &= 2{,}866...° \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{2{,}866...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 2809{,}06...$$

$$= 140{,}5453...$$

$$\approx 141 \text{ (km)}$$

Matka on 141 km.

b) Lasketaan kosinilauseella tunnelin pituus t.

$$t^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos\alpha$$

$$= 2r^2 - 2r^2 \cos\alpha \qquad \left| \begin{aligned} r &= 2809{,}06... \text{ km} \\ \alpha &= 2{,}866...° \end{aligned} \right.$$

$$= 2 \cdot 2809{,}06...^2 - 2 \cdot 2809{,}06...^2 \cdot \cos 2{,}866...°$$

$$= 140{,}5307... \text{ (km)}$$

Lasketaan kaaren pituuden b ja tunnelin pituuden t erotus.

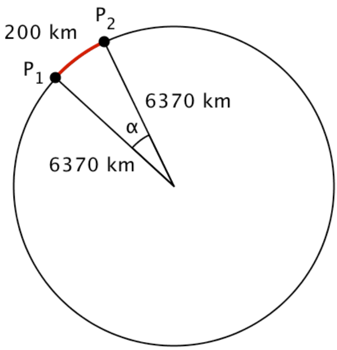
$$b - t = 140{,}5453... - 140{,}5307... = 0{,}0146... \approx 0{,}015 \text{ (km)}.$$

Matka lyhenee 0,015 km = 15 m.

Vastaus a) 141 km b) 15 m

273

1) Olkoon lähtöpiste P_1. Ensin lennetään pohjoiseen pitkin isoympyrää, joka on pituuspiiri $23°45'$. Lasketaan leveyspiiri, johon päädytään, kun lähtöpiste P_1 on leveyspiirillä $61°30'$ $(= 61{,}5°)$.



$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$\alpha = \frac{360° \cdot b}{2\pi r} \qquad \left| \begin{array}{l} b = 200 \text{ km} \\ r = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

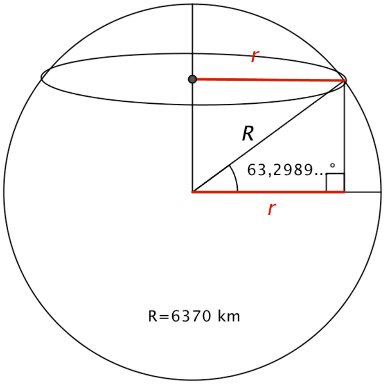
$$= \frac{360° \cdot 200}{2\pi \cdot 6370}$$

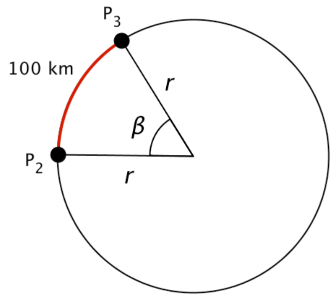
$$= 1{,}7989...°$$

Päädytään leveyspiirille $61{,}5° + 1{,}7989...° = 63{,}2989...°$ pisteeseen P_2.

2) Seuraavaksi edetään 100 km itään pitkin pikkuympyrää eli leveyspiiriä $63,2989...°$. Lasketaan pituuspiiri, johon päädytään, kun lähdetään alkuperäisellä pituuspiirillä $23°45'$ $(=23,75°)$ olevasta pisteestä P_2.

Lasketaan leveyspiirin $63,2989...°$ säde.





$$\cos 63,2989...° = \frac{r}{R}$$

$$r = R\cos 63,2989...° \qquad \Big| \; R = 6370 \text{ km}$$

$$= 6370 \cdot \cos 63,2989...°$$

$$= 2862,2687... \text{ (km)}$$

Lasketaan pituuspiiri, johon päädytään, kun edetään 100 km itään.

$$b = \frac{\beta}{360°} \cdot 2\pi r$$

$$\beta = \frac{360° \cdot b}{2\pi r} \qquad \left| \begin{array}{l} r = 2862{,}2687\ldots \text{ km} \\ b = 100 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{360° \cdot 100}{2\pi \cdot 2862{,}2687\ldots}$$

$$= 2{,}0017\ldots°$$

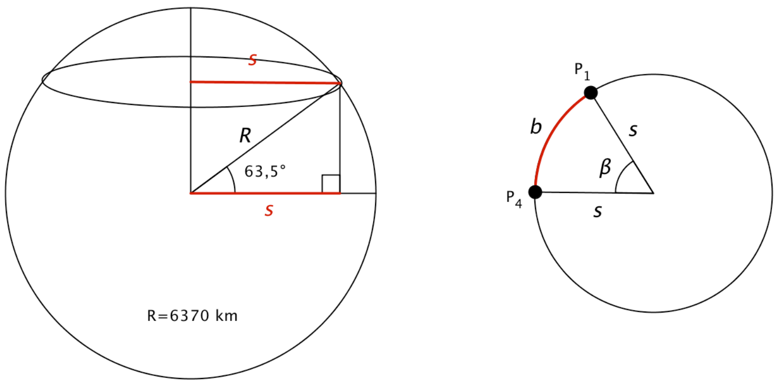
Päädytään pisteeseen P_3 pituuspiirillä

$23{,}57° + 2{,}0017\ldots° = 25{,}5717\ldots°$.

3) Edetään pisteestä P_3 lähtien 200 km etelään pitkin pituuspiiriä $25{,}5717\ldots°$ pisteeseen P_4, jolloin päädytään alkuperäisen lähtöpisteen P_1 kanssa samalle leveyspiirille $61{,}5°$.

4) Jotta päästäisiin takaisin lähtöpisteeseen P_1, on päästävä alkuperäiselle pituuspiirille $23{,}75°$, jolloin siirrytään leveyspiirillä $61{,}5°$ keskuskulmaa $\beta = 2{,}0017\ldots°$ vastaavan kaaren verran länteen.

Lasketaan leveyspiirin $61{,}5°$ säde s. Selvitetään sen jälkeen tämän leveyspiiriympyrän kaaren pituus b, jotta päästään takaisin lähtöpisteeseen P_1 pituuspiirillä $23{,}75°$.



$$\cos 63{,}5° = \frac{s}{6370}$$

$$s = 6370 \cdot \cos 61{,}5° = 3039{,}5013... \text{ km}$$

Lasketaan kaaren pituus b.

$$b = \frac{\beta}{360°} \cdot 2\pi s \qquad \left| \begin{array}{l} \beta = 2{,}0017...° \\ s = 3039{,}5013... \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2{,}0017...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 3039{,}5013...$$

$$= 106{,}19...$$

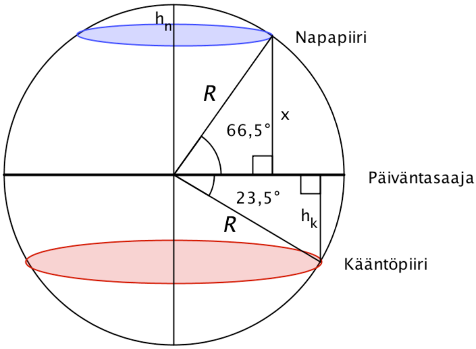
$$\approx 106 \text{ (km)}$$

Viimeisellä etapilla on lennettävä 106 km länteen.

Vastaus 106 km

274

Piirretään Maan poikkileikkaus ja tarkastellaan isoympyrää, jonka säde on R (Maan säde).

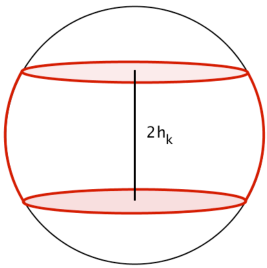


1) Kääntöpiirien väliin jää troopinen alue. Tämä on pallovyöhyke, jonka korkeus on $2h_k$.

$$\sin 23{,}5° = \frac{h_k}{R}$$

$$h_k = R\sin 23{,}5°$$

$$A_T = 2\pi rh \quad \left| \begin{array}{l} r = R \\ h = 2h_k = 2R\sin 23{,}5° \end{array} \right.$$



$$= 2\pi \cdot R \cdot 2R\sin 23{,}5°$$

$$= 4\pi R^2 \sin 23{,}5°$$

Trooppisen alueen osuus Maan pinta-alasta:

$$\frac{A_T}{A_M} = \frac{\cancel{4\pi R^2}\,\sin 23{,}5°}{\cancel{4\pi R^2}} = \sin 23{,}5° = 0{,}3987... \approx 39{,}9\ \%$$

2) Napapiirien pohjois- ja eteläpuolille jää napa-alueet.
Nämä ovat pallosegmenttejä, joiden korkeus on h_n.

$$h_n = R - x \qquad \left|\; \begin{aligned} &\sin 66{,}5° = \frac{x}{R} \\ &x = R\sin 66{,}5° \end{aligned}\right.$$

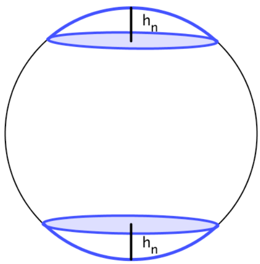
$$= R - R\sin 66{,}5° = R\cdot(1-\sin 66{,}5°)$$

$$A_N = 2\cdot A_{kalotti}$$

$$= 2\cdot 2\pi rh \qquad \left|\; \begin{aligned} &r = R \\ &h = h_n = R\cdot(1-\sin 66{,}5°) \end{aligned}\right.$$

$$= 4\pi R\cdot R\cdot(1-\sin 66{,}5°)$$

$$= 4\pi R^2\cdot(1-\sin 66{,}5°)$$

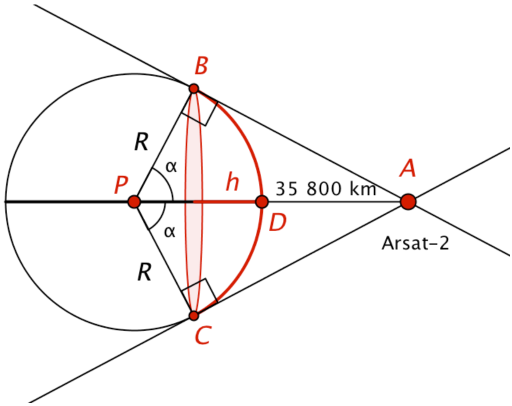


Napa-alueiden osuus Maan pinta-alasta:

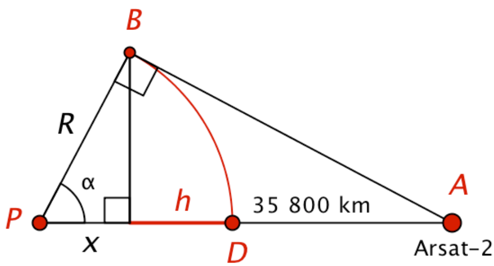
$$\frac{A_N}{A_M} = \frac{4\pi R^2(1-\sin 66{,}5°)}{4\pi R^2} = 1-\sin 66{,}5° = 0{,}0829... \approx 8{,}3\ \%$$

Vastaus napa-alueet 8,3 %, trooppinen alue 39,9 %

275



Maa jää kahden satelliitin kautta piirretyn tangenttisuoran väliin. Lasketaan tangenttien leikkauspisteiden välistä kaarta *CDB* vastaavan keskuskulman puolikas α, jonka avulla voidaan laskea vastaavan pallokalotin korkeus h.



$$\cos\alpha = \frac{R}{R+35\,800} \qquad \Big|\, R = 6370 \text{ km}$$

$$= \frac{6370}{6370+35\,800}$$

$$= 0{,}151...$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0{,}151... = 81{,}311...^\circ$$

$$h = R - x \qquad \left|\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{x}{R} \\ x = R\cos\alpha \end{array}\right.$$

$$= R - R\cos\alpha$$

$$= R(1-\cos\alpha) \qquad \left|\begin{array}{l} R = 6370 \text{ km} \\ \alpha = 81{,}311...^\circ \end{array}\right.$$

$$= 6370 \cdot (1-\cos 81{,}311...^\circ)$$

$$= 5407{,}77... \text{ (km)}$$

Satelliitista nähtävän pallokalotin pinta-alan suhde koko Maan pinta-alaan:

$$\frac{A_K}{A_M} = \frac{2\cancel{\pi}\,\cancel{r}\,h}{4\cancel{\pi}\,r^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{h}{2r} \qquad \left|\begin{array}{l} r = R = 6370 \text{ km} \\ h = 5407{,}77... \text{km} \end{array}\right.$$

$$= \frac{5407{,}77...}{2 \cdot 6370}$$

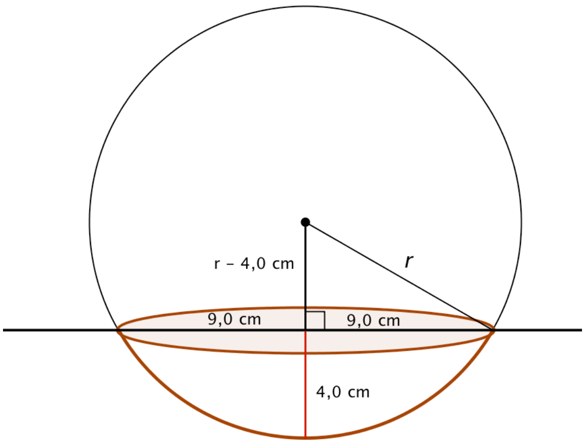
$$= 0{,}4244...$$

$$\approx 42{,}4\ \%$$

Satelliitista voidaan nähdä 42,4 % Maan pinta-alasta.

Vastaus 42,4 %

276



Syntynyt kuoppa on pallosegmentti, jonka korkeus on 4,0 cm. Kuopan tilavuuden selvittämiseksi on ensin laskettava pallon säde r.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö.

$$r^2 = (r-4{,}0)^2 + 9{,}0^2$$

$$r^2 = r^2 + 2\cdot r\cdot(-4{,}0) + (-4{,}0)^2 + 81$$

$$r^2 = r^2 - 8r + 16 + 81$$

$$8r = 97$$

$$r = \frac{97}{8} = 12{,}125 \text{ (cm)}$$

Pallosegmentin tilavuus on

$$V = \pi h^2\left(r - \frac{h}{3}\right) \qquad \left|\begin{array}{l} r = 12{,}125\ \text{cm} \\ h = 4{,}0\ \text{cm} \end{array}\right.$$

$$= \pi \cdot 4{,}0^2 \cdot \left(12{,}125 - \frac{4{,}0}{3}\right)$$

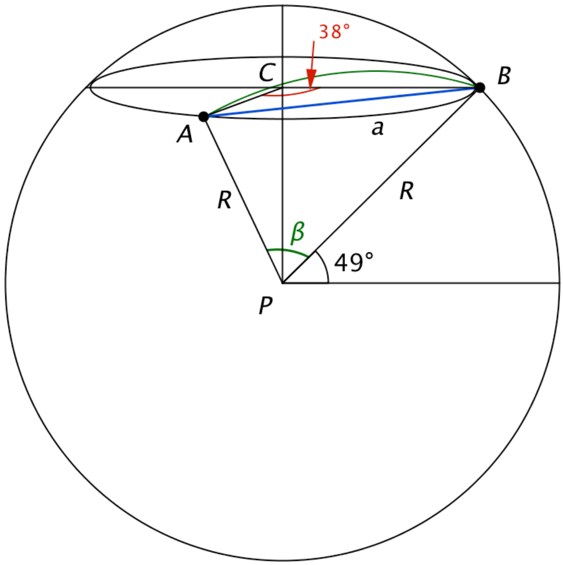
$$= 542{,}44...$$

$$\approx 540\ (\text{cm}^3)$$

Kuopan tilavuus on 540 cm^3.

Vastaus 540 cm^3

277



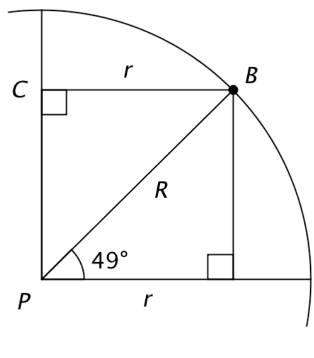
a) Paikkakuntien A ja B välimatka a mitattuna pitkin 49. leveyspiiriä on pikkuympyrän $38°$ keskuskulmaa vastaavan kaaren pituus. Lasketaan ensin 49. leveyspiirin säde suorakulmaisen kolmion PBC avulla.

$$\cos 49° = \frac{r}{R}$$

$$r = R\cos 49° \quad \Big| \; R = 6370 \text{ km}$$

$$= 6370 \cdot \cos 49°$$

$$= 4179{,}09... \text{ km}$$



Lasketaan kaaren pituus a.

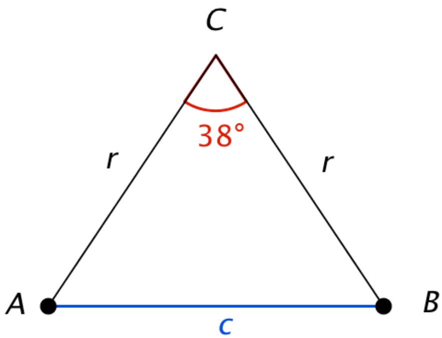
$$a = \frac{38°}{360°} \cdot 2\pi r \qquad \Big| \, r = 4179{,}09... \text{ km}$$

$$= \frac{38°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 4179{,}09...$$

$$= 2771{,}681... \approx 2770 \text{ (km)}$$

Paikkakuntien A ja B välimatka pitkin 49. leveyspiiriä on 2770 km.

b) Paikkakuntien A ja B lyhin välimatka Maan pintaa pitkin mitattuna on R-säteisen isoympyrän keskuskulmaa β vastaavan kaaren pituus. Lasketaan ensin janan AB pituus tasakylkisestä kolmiosta ABC.



$$c^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 38°$$

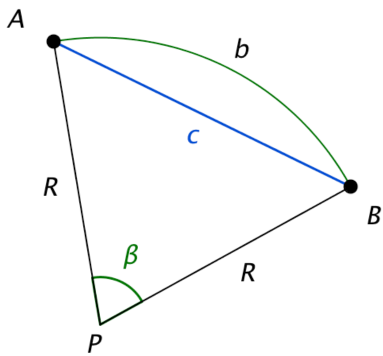
$$= 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 38° \qquad \Big| \, r = 4179{,}09... \text{ km}$$

$$= 2 \cdot 4179{,}09...^2 - 2 \cdot 4179{,}09...^2 \cdot \cos 38°$$

$$= 7\,404\,718{,}02...$$

$$c = {}_{(}\pm_{)}\sqrt{7404718{,}02...} = 2721{,}16... \text{ (km)}$$

Lasketaan kulma β tasakylkisestä kolmiosta APB kosinilauseen avulla.



$$c^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{c^2 - R^2 - R^2}{-2 \cdot R \cdot R}$$

$$= \frac{c^2 - 2R^2}{-2 \cdot R^2} \qquad \left| \begin{array}{l} c = 2721{,}16\ldots \text{ km} \\ R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2721{,}16\ldots^{\ 2} - 2 \cdot 6370^2}{-2 \cdot 6370^2}$$

$$= 0{,}9087\ldots°$$

$$\beta = \cos^{-1} 0{,}9087\ldots° = 24{,}665\ldots°$$

Isoympyrän keskuskulmaa β vastaavan kaaren pituus on

$$b = \frac{\beta}{360°} \cdot 2\pi r \qquad \left| \begin{array}{l} \beta = 24{,}665...° \\ r = R = 6370 \text{ km} \end{array} \right.$$

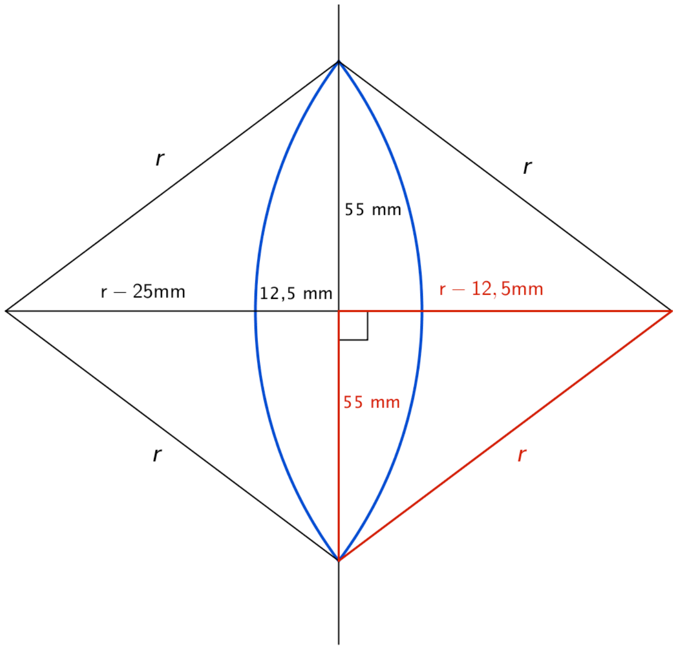
$$= \frac{24{,}665...°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370$$

$$= 2742{,}28... \approx 2740 \text{ (km)}$$

Paikkakuntien A ja B välinen lyhin etäisyys Maan pintaa pitkin mitattuna on 2740 km.

Vastaus a) 2770 km b) 2740 km

278



Määritetään linssin kaarevuussäde suorakulmaisen kolmion avulla (piirretty punaisella).

$$r^2 = (r - 12{,}5)^2 + 55^2$$

$$r^2 = r^2 + 2 \cdot r \cdot (-12{,}5) + (-12{,}5)^2 + 55^2$$

$$r^2 = r^2 - 25r + 156{,}25 + 3025$$

$$25r = 3181{,}25$$

$$r = \frac{3181{,}25}{25} = 127{,}25 \text{ (mm)}$$

Linssin tilavuus saadaan pallosegmentin tilavuuden kaavan avulla.

$$V_{linssi} = 2V_{segmentti}$$

$$= 2 \cdot \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3} \right) \qquad \left| \begin{array}{l} h = 12{,}5 \text{ mm} \\ r = 127{,}25 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$= 2 \cdot \pi \cdot 12{,}5^2 \cdot \left(127{,}25 - \frac{12{,}5}{3} \right)$$

$$= 120\ 836{,}778... \ (\text{mm}^3)$$

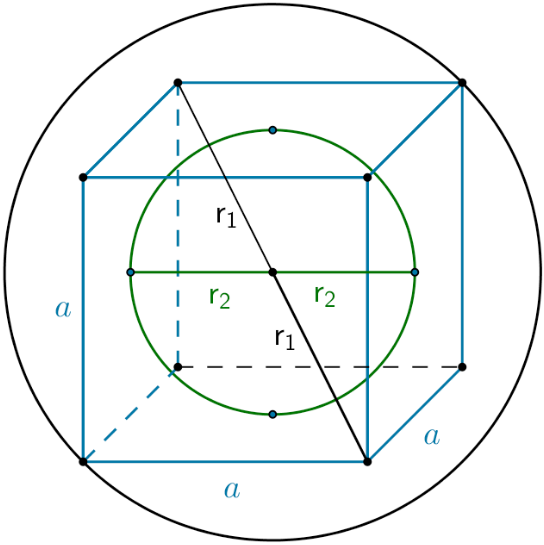
Linssin tilavuus on

$$120\ 836{,}778... \text{ mm}^3 = 120{,}836... \text{ cm}^3 \approx 120 \text{ cm}^3 .$$

Vastaus 120 cm^3

279

a)



Olkoon uloimman pallon P_1 säde r_1 ja seuraavan pallon P_2 säde r_2 jne.

Ensimmäisen kuution N_1 avaruuslävistäjä on sama kuin sen ympäri piirretyn pallon P_1 halkaisija. Merkitään ensimmäisen kuution sivusärmää kirjaimella a ja muodostetaan yhtälö.

$$2r_1 = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$2r_1 = \sqrt{3a^2}$$

$$2r_1 = \sqrt{3}|a| \qquad \Big|\, a > 0$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Ensimmäisen kuution N_1 sisään piirretyn pallon P_2 halkaisija on sama kuin kuution särmä. Muodostetaan yhtälö.

$$2r_2 = a$$

$$r_2 = \frac{a}{2}$$

Pallojen säteiden suhde on

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} : \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\cancel{a}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}\,\cancel{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Vastaavasti aina $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, joka ei riipu indeksistä n. Siis pallojen säteet muodostavat geometrisen jonon, jossa ensimmäinen termi on r_1 ja suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Pallojen pinta-aloille saadaan suhdeluku

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{4\pi r_n^2}{4\pi r_{n-1}^2} = \frac{r_n^2}{r_{n-1}^2} = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Siis pallojen pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdeluku on $q = \frac{1}{3}$.

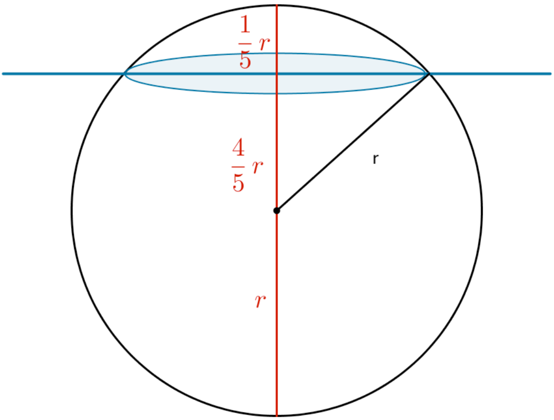
c) Pallojen tilavuuksille saadaan suhdeluku

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_n^3}{\frac{4}{3}\pi r_{n-1}^3} = \frac{r_n^3}{r_{n-1}^3} = \left(\frac{r_n}{r_{n-1}}\right)^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Siis pallojen pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdeluku on $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Vastaus a) $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $q = \frac{1}{3}$ c) $q = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

280



Kelluva pallo syrjäyttää painonsa verran vettä. Veden pinnan kautta kulkeva taso jakaa pallon kahteen ympyräsegmenttiin. Alemman, veden alla olevan segmentin korkeus on

$$r+\frac{4}{5}r=\frac{9}{5}r\,.$$

Veden alla olevan segmentin tilavuus on

$$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right) \qquad \Big|\, h=\frac{9}{5}r$$

$$=\pi\left(\frac{9}{5}r\right)^2\left(r-\frac{\frac{9}{5}r}{3}\right)$$

$$= \pi \cdot \frac{9^2}{5^2} r^2 \cdot \left(r - \frac{9}{5} r \cdot \frac{1}{3} \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{9^2}{5^2} r^2 \cdot \left(\frac{15}{15} r - \frac{9}{15} r \right)$$

$$= \pi \cdot \frac{9^2}{5^2} r^2 \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} r$$

$$= \frac{162}{125} \pi r^3$$

Pallon tiheys saadaan jakamalla pallon massa sen tilavuudella. Pallon massa on vedenalaisen osan tilavuus kerrottuna veden tiheydellä.

$$\rho = \frac{m_{pallo}}{V_{pallo}} \qquad \left| \; m_{pallo} = V_{segmentti} \cdot \rho_{vesi} \right.$$

$$= \frac{V_{segmentti} \cdot \rho_{vesi}}{V_{pallo}} \qquad \left| \; \begin{array}{l} V_{segmentti} = \dfrac{162}{125} \cdot \pi r^3 \\[2ex] \rho_{vesi} = 1{,}00 \cdot 10^3 \, kg / m^3 \\[2ex] V_{pallo} = \dfrac{4}{3} \pi r^3 \end{array} \right.$$

$$= \frac{\frac{162}{125} \cdot \cancel{\pi r^3} \cdot 1{,}00 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{\frac{4}{3} \cancel{\pi r^3}}$$

$$= \frac{\frac{162}{125}}{\frac{4}{3}} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

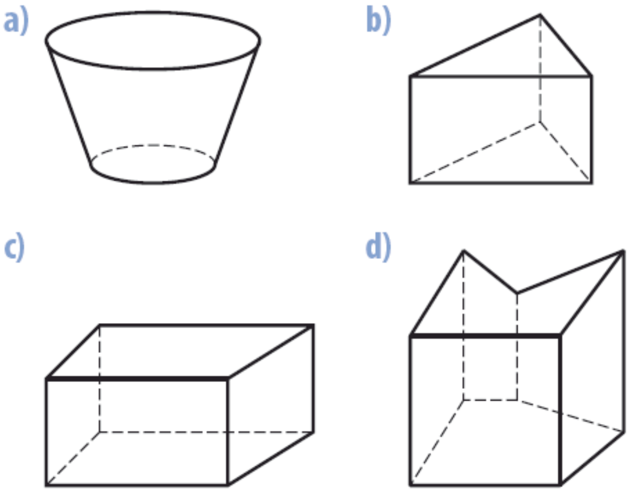
$$= \frac{162}{125} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$= 972 \text{ kg/m}^3$$

Pallon tiheys on 972 kg/m^3.

Vastaus 972 kg/m^3

281

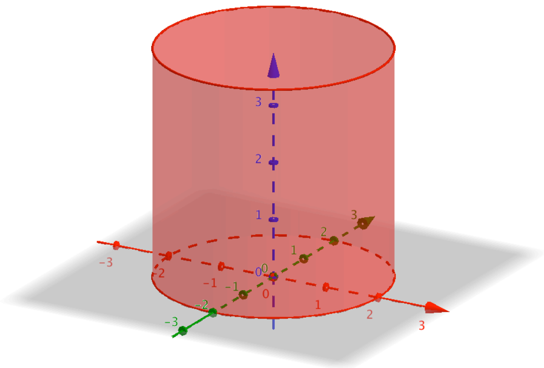


Lieriössä oltava kaksi samanlaista pohjaa, joten lieriöitä ovat b ja c.

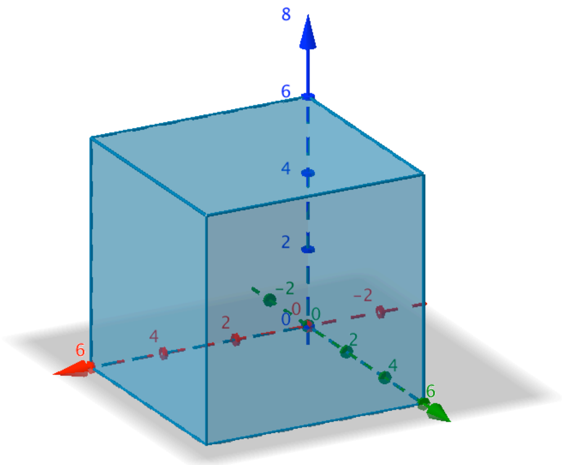
Vastaus b ja c

282

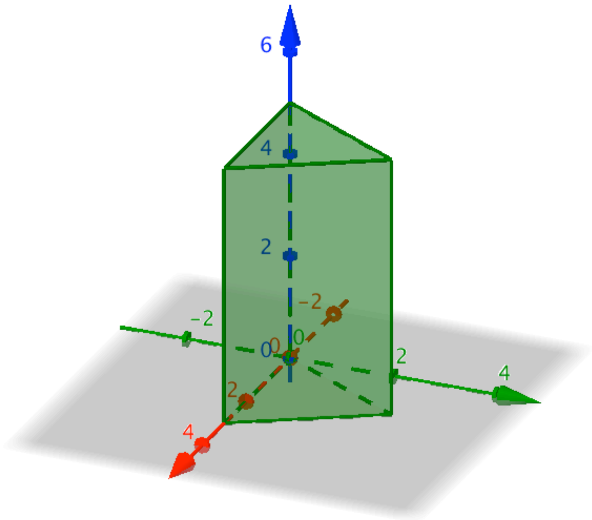
a)



b)

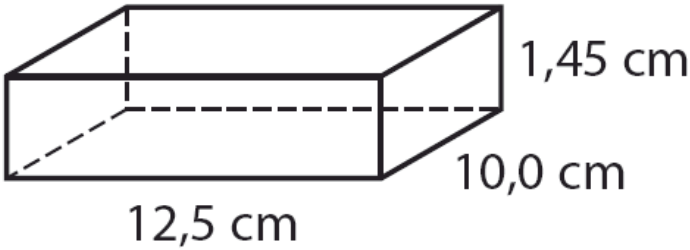


c)



283

a)



Tilavuus on

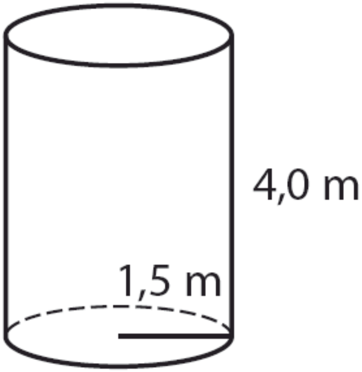
$$V = 1{,}25 \text{ dm} \cdot 1{,}00 \text{ dm} \cdot 0{,}145 \text{ dm}$$

$$= 0{,}18125 \text{ dm}^3$$

$$\approx 0{,}181 \text{ L}$$

Suorakulmaisen särmiön tilavuus on 0,181 L.

b)



Tilavuus on

$$V = A_p h \qquad \left| \; A_p = \pi r^2 \right.$$

$$= \pi r^2 \cdot h \qquad \left| \; \begin{array}{l} r = 1{,}5 \text{ m} = 15 \text{ dm} \\ h = 4{,}0 \text{ m} = 40 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 15^2 \cdot 40$$

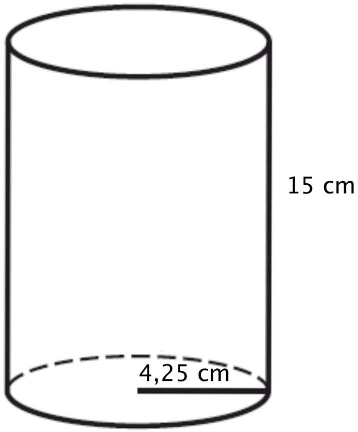
$$= 28\,274{,}3...$$

$$\approx 28\,000 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Suoran ympyrälieriön tilavuus on 28 000 dm^3 = 28 000 L.

Vastaus a) 0,181 L b) 28 000 L

284



Tölkin tilavuus:

$$V = A_p h \qquad \left| \; A_p = \pi r^2 \right.$$

$$= \pi r^2 h \qquad \left| \; \begin{aligned} & r = \frac{8{,}5 \text{ cm}}{2} = 4{,}25 \text{ cm} \\ & h = 15 \text{ cm} \end{aligned} \right.$$

$$= \pi \cdot 4{,}25^2 \cdot 15$$

$$= 851{,}17... \approx 850 \ (\text{cm}^3)$$

Tölkin kokonaispinta-ala:

$$A = 2A_p + A_v \qquad \left| \begin{array}{l} A_p = \pi r^2 \\ A_v = 2\pi rh \end{array} \right.$$

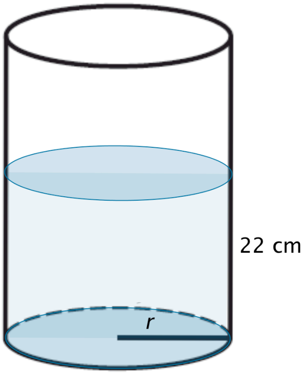
$$= 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi rh \qquad \left| \begin{array}{l} r = \dfrac{8{,}5 \text{ cm}}{2} = 4{,}25 \text{ cm} \\ h = 15 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= 2\pi \cdot 4{,}25^2 \cdot 15 + 2\pi \cdot 4{,}25 \cdot 15$$

$$= 514{,}04... \approx 510 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus 850 cm^3, 510 cm^2

285



Muodostetaan yhtälö veden tilavuuden avulla.

$$V = A_p h$$

$$V = \pi r^2 h \qquad \left| \begin{array}{l} V = 5{,}0 \text{ L} = 5{,}0 \text{ dm}^3 \\ h = 22 \text{ cm} = 2{,}2 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$5{,}0 = \pi \cdot r^2 \cdot 2{,}2$$

$$r^2 = \frac{5{,}0}{\pi \cdot 2{,}2}$$

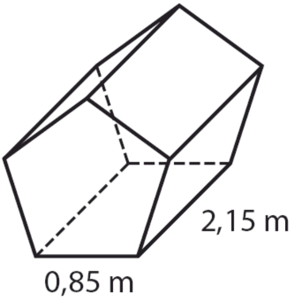
$$r = _{(}\pm_{)} \sqrt{\frac{5{,}0}{\pi \cdot 2{,}2}}$$

$$= 0{,}8505... \text{ (dm)}$$

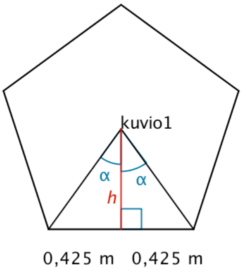
Pohjan halkaisija on $2r = 2 \cdot 0{,}8505... \text{ dm} = 1{,}701... \text{ dm} \approx 17 \text{ cm}$.

Vastaus 17 cm

286



Lasketaan ensin särmiön pohjana olevan säännöllisen viisikulmion pinta-ala A_p.



$$\frac{0{,}85\text{ m}}{2} = 0{,}425\text{ m}$$

$$\tan\alpha = \frac{0{,}425}{h}$$

$$h = \frac{0{,}425}{\tan\alpha} \qquad \Bigg| \; \alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{5} = 36^\circ$$

$$= \frac{0{,}425}{\tan 36^\circ}$$

$$= 0{,}584...\text{ (m)}$$

$$A_p = 5\cdot A_{kolmio} = 5\cdot\frac{0{,}85\cdot 0{,}584...}{2} = 1{,}243...\text{ (m}^2\text{)}$$

Särmiön kokonaispinta-ala on

$$A = 2 \cdot A_p + A_{vaippa} \qquad \left| \begin{array}{l} A_p = 1{,}243\ldots \text{ m}^2 \\ A_{vaippa} = 5 \cdot A_{sivutahko} \end{array} \right.$$

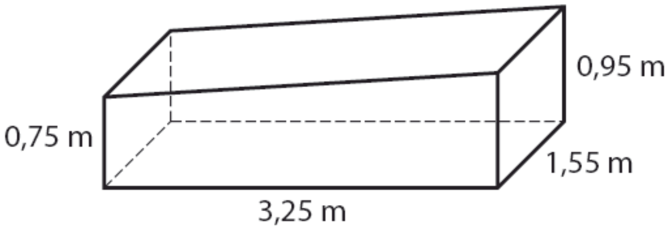
$$= 2 \cdot 1{,}243\ldots + 5 \cdot 0{,}85 \cdot 2{,}15$$

$$= 11{,}623\ldots$$

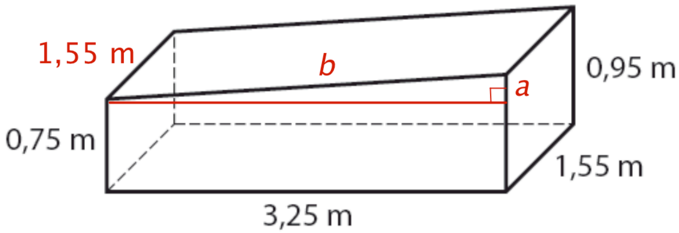
$$\approx 12 \ (\text{m}^2).$$

Vastaus 12 m^2

287



Lasketaan kantena vinossa olevan suorakulmion sivun pituus b.



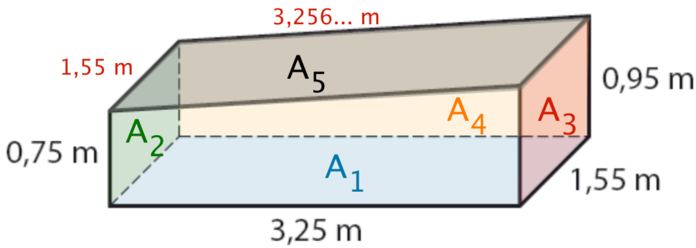
Muodostetaan yhtälö Pythagoraan lauseen avulla.

$$b^2 = 3{,}25^2 + a^2 \qquad \left|\begin{array}{l} a = 0{,}95\text{ m} - 0{,}75\text{ m} \\ = 0{,}20\text{ m} \end{array}\right.$$

$$= 3{,}25^2 + 0{,}20^2$$

$$= 10{,}6025$$

$$b = {}_{(}\pm{}_{)}\sqrt{10{,}6025} = 3{,}256\ldots\ (\text{m})$$



Lasketaan kokonaispinta-ala.

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + 2 \cdot A_4 + A_5$$

$$A_1 = 3,25 \cdot 1,55 = 5,0375$$

$$A_2 = 0,75 \cdot 1,55 = 1,1625$$

$$A_3 = 0,95 \cdot 1,55 = 1,4725$$

$$2 \cdot A_4 = 2 \cdot \frac{0,75 + 0,95}{2} \cdot 3,25$$

$$= 5,525$$

$$A_5 = 1,55 \cdot 3,256... = 5,047...$$

$$= 5,0375 + 1,1625 + 1,4725 + 5,525 + 5,047...$$

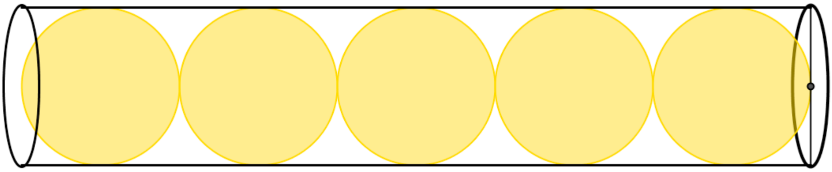
$$= 18,244...$$

$$\approx 18 \text{ (m}^2\text{)}$$

Särmiön kokonaispinta-ala on 18 m^2.

Vastaus 18 m^2

288



Olkoon tennispallon säde r.

Lieriön tilavuus:

$$V_{lieriö} = A_p h \qquad \left| \begin{array}{l} A_p = \pi r^2 \\ h = 10r \end{array} \right.$$

$$= \pi r^2 \cdot 10r$$

$$= 10\pi r^3$$

Pallojen tilavuus:

$$V_{pallot} = 5 \cdot V_{pallo} \qquad \left| \; V_{pallo} = \frac{4}{3}\pi r^3 \right.$$

$$= 5 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{20}{3}\pi r^3$$

Tilavuuksien suhde:

$$\frac{V_{pallot}}{V_{lieriö}} = \frac{\frac{20}{3}\cancel{\pi r^3}}{10\cancel{\pi r^3}} = \frac{\frac{20}{3}}{10} = \frac{20}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{2}{3}$$

Saadaan

$$V_{pallot} = \frac{2}{3} V_{lieriö} \quad .$$

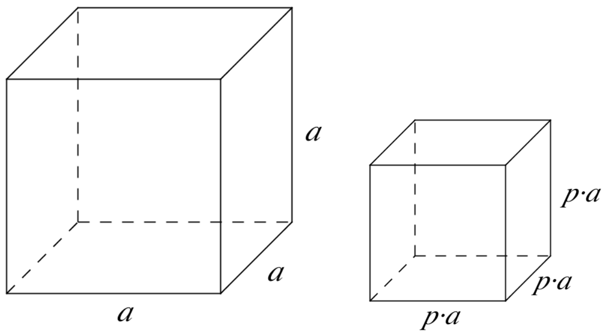
Tyhjä osuus:

$$V_{lieriö} - V_{pallot} = V_{lieriö} - \frac{2}{3} V_{lieriö} = \frac{1}{3} V_{lieriö}$$

Pakkauksen tilavuudesta $\frac{1}{3}$ on tyhjää.

Vastaus $\frac{1}{3}$

289



Olkoon alkuperäisen kuution särmän pituus a.
Kuutio pienennetään siten, että särmän pituudeksi tulee $p \cdot a$.

Alkuperäinen kokonaispinta-ala:

$$A_1 = 6a^2.$$

Kokonaispinta-ala pienennyksen jälkeen:

$$A_2 = 6 \cdot (p \cdot a)^2 = 6p^2a^2.$$

Muodostetaan yhtälö tilavuuksien suhteen avulla.

Tilavuus pienenee 36 %, joten uusi tilavuus on 100 % – 36 % = 64 % alkuperäisestä tilavuudesta.

$$\frac{A_2}{A_1} = 64\ \%$$

$$\frac{6p^2a^2}{6a^2} = 0{,}64$$

$$p^2 = 0{,}64$$

$$p = _{(}\pm_{)}\sqrt{0{,}64} = 0{,}8$$

Alkuperäinen tilavuus:

$$V_1 = a^3$$

Tilavuus pienennyksen jälkeen:

$$V_2 = (pa)^3 = p^3a^3 = 0{,}8^3a^3$$

Tilavuuksien suhde:

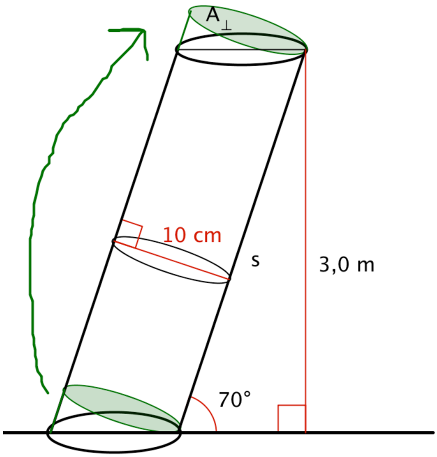
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{0{,}8^3a^3}{a^3} = 0{,}8^3 = 0{,}512 = 51{,}2\%\,.$$

Uusi tilavuus on 51,2 % alkuperäisestä tilavuudesta, joten tilavuus pienenee

$$100\ \% - 51{,}2\ \% = 48{,}8\ \% \approx 49\ \%\,.$$

Vastaus 49 %

290



Putki on vino lieriö, jonka kohtisuora poikkileikkaus on ympyrä.

Ajatellaan, että putki katkaistaan kohtisuorasti ja esimerkiksi alapäästä siirretään pala yläpäähän. Näin saadaan suora ympyrälieriö, jonka pohjan halkaisija on 10 cm eli pohjan säde on 5,0 cm.

Saadun suoran ympyrälieriön pituus on sama kuin alkuperäisen vinon lieriön sivujanan pituus s.

$$\sin 70° = \frac{3{,}0}{s}$$

$$s = \frac{3{,}0}{\sin 70°} = 3{,}192\ldots\ \text{(m)}$$

Putken tilavuus on

$$V = A_{\perp} s \qquad \left| \begin{array}{l} A_{\perp} = \pi r^2 = \pi \cdot 5{,}0^2 \ \text{cm}^2 \\ s = 3{,}192... \ \text{m} = 319{,}2... \ \text{cm}^2 \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 5{,}0^2 \cdot 319{,}2...$$

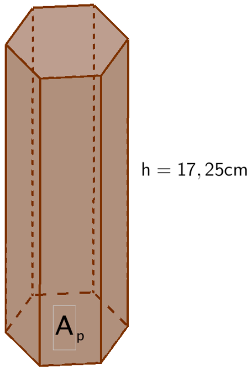
$$= 25\,074{,}09... \ (\text{cm}^2)$$

Putken tilavuus on

25 074,09… cm^3 = 25,07… dm^3 ≈ 25 dm^3 (= 25 L).

Vastaus 25 dm^3

291



Säännöllisen kuusisivuisen särmiön tilavuus on $2{,}5\text{ L} = 2{,}5\text{ dm}^3$ ja sen korkeus on 17,25 cm = 1,725 dm.

Muodostetaan yhtälö.

$$V = A_p h$$

$$A_p = \frac{V}{h} \qquad \left| \begin{array}{l} V = 2{,}5\text{ dm}^3 \\ h = 1{,}725\text{ dm} \end{array} \right.$$

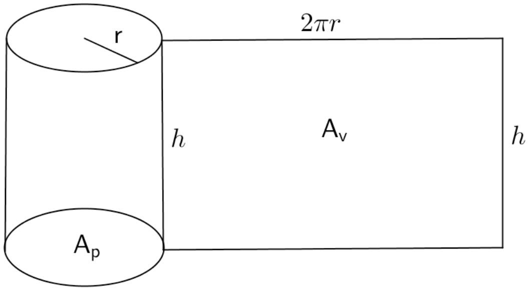
$$= \frac{2{,}5}{1{,}725}$$

$$= 1{,}449...\ (\text{dm}^2)$$

Särmiön pohjan pinta-ala on 1,449… dm^2 = 144,9… $\text{cm}^2 \approx 140\text{ cm}^2$.

Vastaus 140 cm^3

292



Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan lieriön korkeus h.

$$A_v = 2\pi rh$$

$$h = \frac{A_v}{2\pi r}$$

$$A_p = \pi r^2$$

$$r^2 = \frac{A_p}{\pi}$$

$$r = (\pm)\sqrt{\frac{A_p}{\pi}}$$

$$h = \frac{A_v}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{A_p}{\pi}}}$$

$$A_v = 39{,}1\ \text{cm}^2$$

$$A_p = 1730\ \text{mm}^2 = 17{,}3\ \text{cm}^2$$

$$= \frac{39{,}1}{2\pi \cdot \sqrt{\frac{17{,}3}{\pi}}} = 2{,}651...\ (\text{cm})$$

Lieriön tilavuus on

$$V = A_p h \qquad \left| \begin{array}{l} A_p = 1730 \text{ mm}^2 = 17{,}3 \text{ cm}^2 \\ h = 2{,}651... \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= 17{,}3 \cdot 2{,}651...$$

$$= 45{,}87... \text{ (cm}^3\text{)}$$

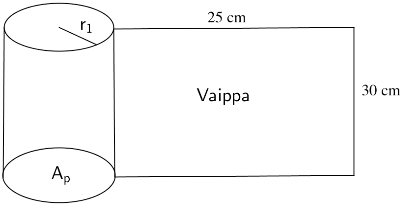
Tilavuus on 45,87… cm^3 = 45,87… ml ≈ 46 ml.

Vastaus 46 ml

293

Lieriön korkeus voi olla joko 30 cm (tapaus 1) tai 25 cm (tapaus 2).

Tapaus 1:



$$2\pi r_1 = 25$$

$$r_1 = \frac{25}{2\pi} = 3{,}978... \text{ (cm)}$$

$$V_1 = A_p h$$

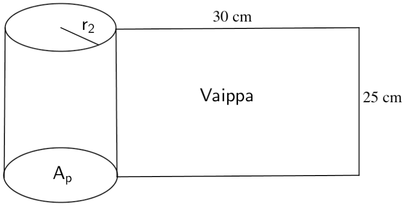
$$= \pi r_1^2 h \qquad \left| \begin{array}{l} r_1 = 3{,}978... \text{ cm} \\ h = 30 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 3{,}978...^2 \cdot 30$$

$$= 1492{,}077...$$

$$\approx 1500 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Tapaus 2:



$$2\pi r_2 = 30$$

$$r_2 = \frac{30}{2\pi} = 4{,}774... \text{ (cm)}$$

$$V_2 = A_p h$$

$$= \pi r_2^2 h \qquad \left| \begin{array}{l} r_2 = 4{,}774... \text{ cm} \\ h = 25 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \pi \cdot 4{,}774...^2 \cdot 25$$

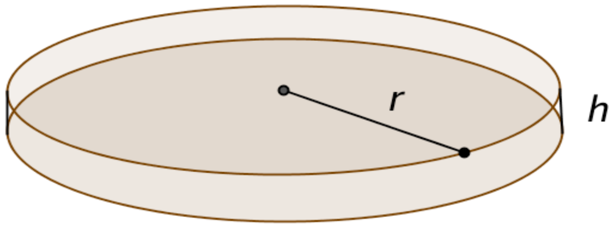
$$= 1790{,}49...$$

$$\approx 1800 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Lieriön tilavuus on 1500 cm^3 tai 1800 cm^3.

Vastaus 1500 cm^3 tai 1800 cm^3

294



Öljylautta on likimain suora ympyrälieriö, jonka säde on r ja paksuus h.

Määritetään öljylautan säde lautan ympärysmitan avulla.

$$p = 2\pi r$$

$$r = \frac{p}{2\pi} \qquad \Big|\, p = 576 \text{ m}$$

$$= \frac{576}{2\pi}$$

$$= 91{,}67... \text{ (m)}$$

Öljylautan tilavuus saadaan massan ja tiheyden avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho} \qquad \left|\begin{array}{l} m = 1250 \text{ kg} \\ \rho = 700 \text{ kg/m}^3 \end{array}\right.$$

$$= \frac{1250}{700}$$

$$= 1{,}785... \ (\text{m}^3)$$

Tilavuuden lausekkeen avulla saadaan ratkaistua kysytty öljylautan paksuus h.

$$V = \pi r^2 h$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \qquad \left| \begin{array}{l} r = 91{,}67\ldots \text{ m} \\ V = 1{,}785\ldots \text{ m}^3 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1{,}785\ldots}{\pi \cdot 91{,}67\ldots^2}$$

$$= 6{,}76\ldots \cdot 10^{-5}$$

$$= 0{,}0000676\ldots \text{ (m)}$$

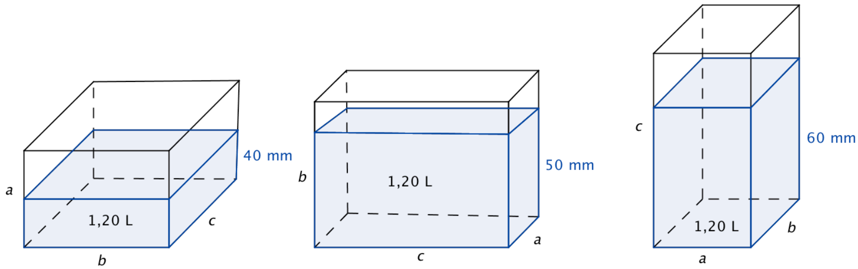
Öljylautan paksuus on

$$h = 0{,}0000676\ldots \text{ m} = 0{,}0676\ldots \text{ mm} \approx 0{,}07 \text{ mm}.$$

Vastaus 0,07 mm

295

Olkoon lasisen särmiön mitat desimetreinä a, b ja c.



40 mm = 0,40 dm 50 mm = 0,50 dm 60 mm = 0,60 dm

Veden määrä on 1,20 L = 1,20 dm^3.
Vesitilavuus voidaan laskea kolmella eri tavalla (mitat desimetreinä).

$b \cdot c \cdot 0{,}40 = 1{,}20 \qquad a \cdot c \cdot 0{,}50 = 1{,}20 \qquad a \cdot b \cdot 0{,}60 = 1{,}20$

On laskettava säiliön tilavuus $V = a \cdot b \cdot c$.
Kerrotaan kaikki kolme yhtälöä puolittain keskenään.

$$(b \cdot c \cdot 0{,}40) \cdot (a \cdot c \cdot 0{,}50) \cdot (a \cdot b \cdot 0{,}60) = 1{,}20 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}20$$

$$a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}60 = 1{,}20^3$$

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = \frac{1{,}20^3}{0{,}40 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}60}$$

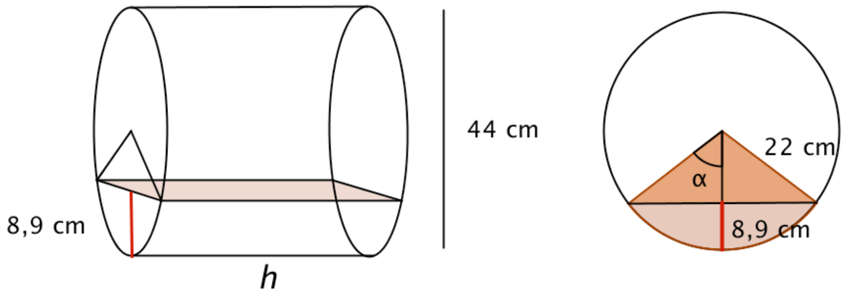
$$(a \cdot b \cdot c)^2 = 14{,}4$$

$$abc = _{(}\pm_{)}\sqrt{14{,}4} = 3{,}794... \text{ (dm}^3\text{)}$$

Säiliön tilavuus on 3,794… dm^3 = 3,794… L ≈ 3,8 L.

Vastaus 3,8 L

296



Selvitetään tynnyrin korkeus h tilavuuden lausekkeen avulla.

$$V = A_p h$$

$$h = \frac{V}{A_p} \qquad \left| \; A_p = \pi r^2 \right.$$

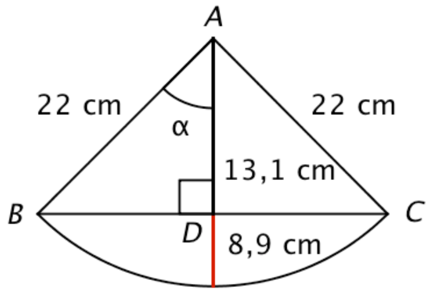
$$= \frac{V}{\pi r^2} \qquad \left| \; \begin{aligned} &V = 200\ \text{L} = 200\ \text{dm}^3 \\ &r = 22\ \text{cm} = 2{,}2\ \text{dm} \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{200}{\pi \cdot 2{,}2^2}$$

$$= 13{,}153...\ (\text{dm})$$

Polttoainekerroksen poikkileikkaus on ympyräsegmentti. Selvitetään segmentin pinta-ala.

Suorakulmaisen kolmion ABD kateetin AD pituus on
22 cm – 8,9 cm = 13,1 cm.



$$\cos\alpha = \frac{13{,}1}{22} = 0{,}595...$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0{,}595... = 53{,}425...^\circ$$

$$A_{segmentti} = A_{sektori} - A_{kolmio}$$

$$= \frac{2\alpha}{360} \cdot \pi r^2 - \frac{1}{2} r \cdot r \cdot \sin(2\alpha) \qquad \left| \begin{array}{l} \alpha = 53{,}425...^\circ \\ r = 22 \text{ cm} = 2{,}2 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{2 \cdot 53{,}425...^\circ}{360} \cdot \pi \cdot 2{,}2^2 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}2^2 \cdot \sin(2 \cdot 53{,}425...^\circ)$$

$$= 2{,}2001... \text{ (dm}^2\text{)}$$

Polttoaineen tilavuus on

$$V_{polttoaine} = A_{segmentti} \cdot h \qquad \left| \begin{array}{l} A_{segmentti} = 2{,}2001\ldots\ \mathrm{dm}^2 \\ h = 13{,}153\ldots\ \mathrm{dm} \end{array} \right.$$

$$= 2{,}2001\ldots \cdot 13{,}153\ldots$$

$$= 28{,}939\ldots\ (\mathrm{dm}^3)$$

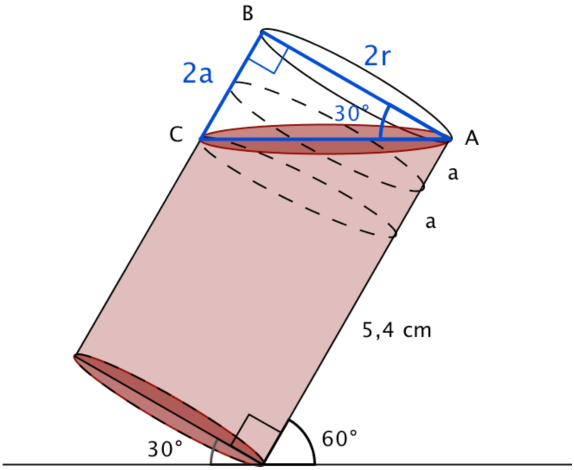
Polttoainetta on tynnyrissä 28,939… dm^3 = 28,939… L.

Tynnyrin ja polttoaineen yhteishinta on

$$1{,}32\ \frac{€}{L} \cdot 28{,}939\ldots\ \mathrm{L} + 17{,}99\ € = 56{,}190\ldots\ € \approx 56{,}19\ €$$

Vastaus 56,19 €

297



Mehun alkuperäinen korkeus mukissa ennen kallistamista on kuvan merkinnöillä 5,4 cm – a.

Lasketaan mukin pohjan säde r.

$$V = A_p h \qquad \Big|\, A_p = \pi r^2$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$r^2 = \frac{V}{\pi h}$$

$$r = {\scriptstyle(\pm)}\sqrt{\frac{V}{\pi h}} \qquad \left|\begin{array}{l} V = 2{,}5\ \text{dl} = 250\ \text{ml} = 250\ \text{cm}^3 \\ h = 5{,}4\ \text{cm} \end{array}\right.$$

$$= \sqrt{\frac{250}{\pi \cdot 5{,}4}} = 3{,}838...\ (\text{cm})$$

Lasketaan tarvittava mitta a suorakulmaisesta kolmiosta ABC.

$$\tan 30° = \frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}r}$$

$$a = r\tan 30° \qquad \Big| \, r = 3{,}838... \text{ cm}$$

$$= 3{,}838... \cdot \tan 30°$$

$$= 2{,}216... \text{ (cm)}$$

Lasketaan mehun tilavuus.

$$V_{mehu} = A_p \cdot h \qquad \Big| \, A_p = \pi r^2$$

$$= \pi r^2 \cdot h \qquad \left| \begin{array}{l} r = 3{,}838... \text{ cm} \\ h = 5{,}4 \text{ cm} - 2{,}216... \text{ cm} = 3{,}183... \text{ cm} \end{array} \right.$$

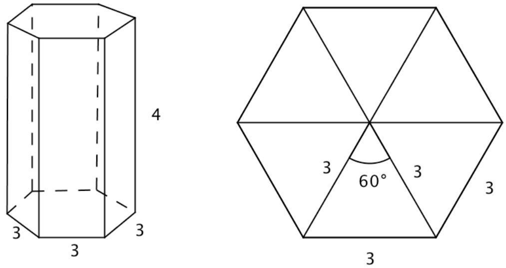
$$= \pi \cdot (3{,}838...)^2 \cdot 3{,}183...$$

$$= 147{,}391... \text{ (cm}^3\text{)}$$

Mehua on 147,391… cm^3 = 147,391… ml = 1,5 dl.

Vastaus 1,5 dl

298



Pohjana oleva säännöllinen kuusikulmio voidaan jakaa kuuteen tasasivuiseen kolmioon, joissa kaikki sivut ovat pituudeltaan 3 ja kulmat 60°.

Lasketaan särmiön tilavuus.

$$V = A_p h$$

$$= 6A_{kolmio} \cdot h \qquad \left| \begin{array}{l} A_{kolmio} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \\ h = 4 \end{array} \right.$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4$$

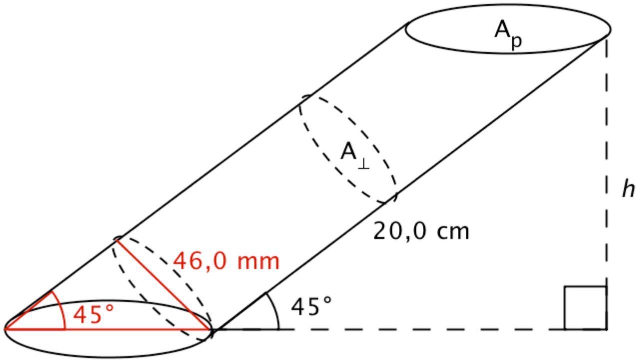
$$= 4 \cdot 27 \cdot \sin 60^\circ \qquad \left| \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \right.$$

$$= 4 \cdot 27 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 54\sqrt{3}$$

Vastaus $54\sqrt{3}$

299



Kun poikkileikkaukseltaan pyöreästä tangosta sahataan vino lieriö, pohjat eivät ole ympyröitä (vaan ellipsejä).

Vinon lieriön pinta-alan ja vaipan selvittämiseksi lasketaan ensin lieriön tilavuus ajattelemalla, että lieriön päästä siirretään kohtisuoraan katkaistu pala toiseen päähän, jolloin saadaan suora ympyrälieriö. Vinon lieriön pohjan ala saadaan korkeuden h ja tilavuuden avulla.

Tangon poikkileikkauksen säde r:

$$r = \frac{46{,}0\text{ mm}}{2} = 23{,}0\text{ mm} = 2{,}3\text{ cm}$$

Lieriön tilavuus V:

$$V = A_\perp \cdot s \qquad \left|\begin{array}{l} A_\perp = \pi r^2 = \pi \cdot 2{,}3^2\text{ cm}^2 \\ s = 20{,}0\text{ cm} \end{array}\right.$$

$$= \pi \cdot 2{,}3^2 \cdot 20{,}0$$

$$= 332{,}380...\ (\text{cm}^3)$$

Lieriön korkeus h:

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{20{,}0}$$

$$h = 20{,}0 \cdot \sin 45^\circ$$

$$= 14{,}142\ldots \text{ (cm)}$$

Lieriön pohjan ala A_p:

$$V = A_p h$$

$$A_p = \frac{V}{h} \qquad \left| \begin{array}{l} V = 332{,}380\ldots \text{ cm}^3 \\ h = 14{,}142\ldots \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{332{,}380\ldots}{14{,}142\ldots}$$

$$= 23{,}502\ldots \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lieriön vaipan ala A_v:

$$A_v = ps \qquad \left| \begin{array}{l} p = 2\pi r = 2\pi \cdot 2{,}3 \text{ cm} \\ s = 20{,}0 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= 2\pi \cdot 2{,}3 \cdot 20{,}0$$

$$= 289{,}026\ldots \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lieriön pinta-ala A:

$$A = 2 \cdot A_p + A_v$$

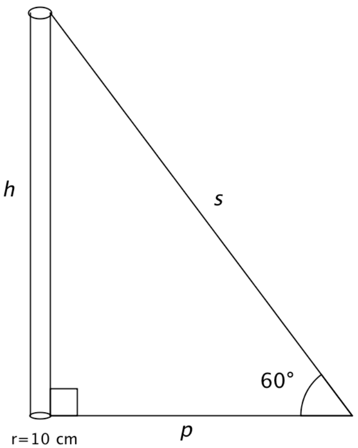
$$= 2 \cdot 23{,}502... + 289{,}026...$$

$$= 336{,}032... \approx 336\ (\text{cm}^3)$$

Lieriön kokonaispinta-ala on 336 cm^3.

Vastaus 336 cm^3

300



Kuvitellaan, että lipputangon ympärille kierrettyyn naruun on kiinnitetty kolmion muotoinen paperi.

Kun paperi rullataan auki, naru kulkee pitkin hypotenuusaa suorakulmaisessa kolmiossa, jossa toinen kateetti on pituudeltaan lipputangon korkeus h ja toinen kateetti 12 kertaa lipputangon ympärysmitta p.

Kolmion terävä kulma on 60°.

$$p = 12 \cdot 2\pi r = 12 \cdot 2\pi \cdot 10 = 753{,}982\ldots \text{ (cm)}$$

$$\tan 60° = \frac{h}{p}$$

$$h = p \tan 60° = 753{,}982\ldots \cdot \tan 60° = 1305{,}935\ldots \text{ (cm)}$$

$$\cos 60° = \frac{p}{s}$$

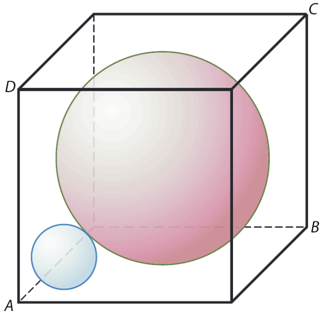
$$s = \frac{p}{\cos 60°} = \frac{753,982...}{\cos 60°} = 1507,964...\ \text{(cm)}$$

Lipputangon korkeus on h = 1305,935… cm ≈ 13 m.

Narun pituus on s = 1507,964… cm ≈ 15 m.

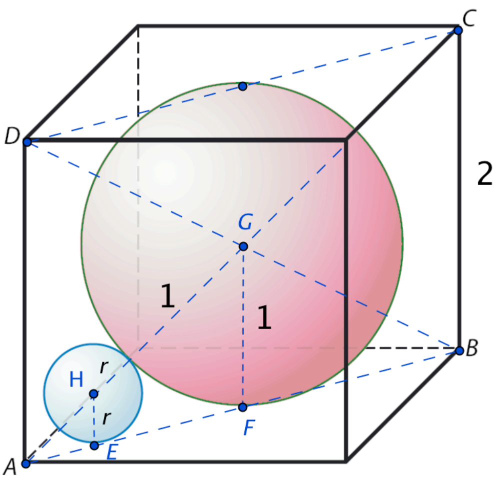
Vastaus tanko 13 m, naru 15 m

301

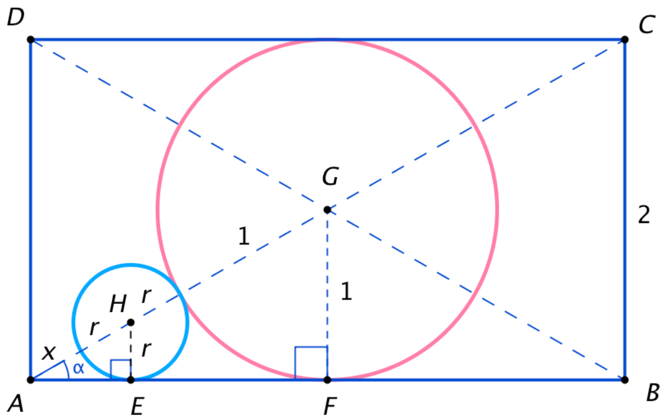


Punaisen pallon säde on 1 (puolet kuution särmän pituudesta 2). Punaisen pallon keskipiste on kuution avaruuslävistäjällä ja pallo sivuaa ala- ja ylätahkoa niiden keskipisteessä, joka on myös tahkojen lävistäjien keskipiste.

Sinisen pallon keskipiste on kuution avaruuslävistäjällä ja pallo sivuaa alatahkoa sen lävistäjällä. Sininen pallo sivuaa punaista palloa kuution avaruuslävistäjän pisteessä. Merkitään sinisen pallon sädettä kirjaimella r.



Piirretään tilanteesta poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee kärkien *A*, *B, C* ja *D* kautta.



Syntyy yhdenmuotoiset suorakulmaiset kolmiot AFG ja AEH (kk, kulma α on yhteinen ja molemmissa suora kulma).

Kuution sivutahkon lävistäjän pituus on

$$\left|AB\right| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}\ .$$

Kuution avaruuslävistäjän pituus on

$$\left|AC\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}\ .$$

Kolmioiden AFG ja AEH sivuista tiedetään seuraavaa:

- $\left|EH\right| = r$ | Sinisen pallon säde
- $\left|FG\right| = 1$ | Punaisen pallon säde

- $|AG| = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ | Puolet kuution avaruuslävistäjästä.

- $|AH| = x + r = |AG| - (r+1) = \sqrt{3} - r - 1$

Muodostetaan yhtälö.

$$(\sin\alpha =) \quad \frac{|EH|}{|AH|} = \frac{|FG|}{|AG|}$$

$$\frac{r}{\sqrt{3} - r - 1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}\,r = \sqrt{3} - r - 1$$

$$\sqrt{3}\,r + r = \sqrt{3} - 1$$

$$r(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{3} - 1$$

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

Saatiin sinisen pallon säteeksi $r = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$.

Tämä voidaan vielä sieventää:

$$r = {}^{\sqrt{3}-1)}\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} = \frac{3 - 2\cdot\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Vastaus Sinisen pallon säde on $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ eli $2 - \sqrt{3}$.

302

Lasketaan puupallon säde R määrittämällä ensin pallon tilavuus tiheyden ja massan avulla.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$V = \frac{m}{\rho} \qquad \left| \; V = \frac{4}{3}\pi R^3 \right.$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{m}{\rho}$$

$$R^3 = \frac{3m}{4\pi\rho}$$

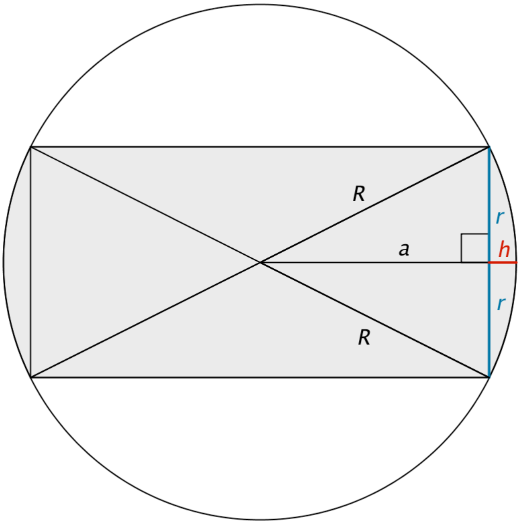
$$R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} \qquad \left| \; \begin{array}{l} m = 2{,}95 \text{ g} = 0{,}00295 \text{ kg} \\ \rho = 520 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 0{,}00295}{4\pi \cdot 520}}$$

$$= 0{,}01106... \text{ (m)}$$

Pallon säde on 0,01106… m = 1,106… cm = 11,06… mm.

Pallon läpi porattavan reiän säde on $\frac{4{,}5 \text{ mm}}{2} = 2{,}25 \text{ mm}$.



Pois porattava osa koostuu suorasta ympyrälieriöstä ja kahdesta pallosegmentistä. Kuvan merkinnöillä lieriön pohjan säde $r = 2{,}25$ mm ja korkeus $2a$. Pallosegmentin korkeus on h ja pallon säde on $R = 11{,}06\ldots$ mm.

Suorakulmaisen kolmion avulla saadaan laskettua kateetti a.

$$R^2 = a^2 + r^2$$

$$a^2 = R^2 - r^2$$

$$a = _{(}\pm_{)}\sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{(11{,}06\ldots)^2 - 2{,}25^2} = 10{,}83\ldots \text{ (mm)}$$

Tästä saadaan laskettua h.

$$h = R - a = 11{,}06\ldots - 10{,}83\ldots = 0{,}231\ldots \text{ (mm)}$$

Lasketaan pois poratun osan tilavuus.

$$V = V_{lieriö} + 2 \cdot V_{pallosegmentti}$$

$$= \pi r^2 \cdot 2a + 2 \cdot \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$

$$= \pi \cdot 2{,}25^2 \cdot 2 \cdot 10.83... + 2 \cdot \pi \cdot (0{,}231...)^2 \left(11{,}06... - \frac{0{,}231...}{3} \right)$$

$$= 348{,}26... \text{ (mm}^3\text{)}$$

Lasketaan pois poratun osan massa.

$$m = \rho V$$

$$\left| \begin{aligned} \rho &= 520 \text{ kg/m}^3 = 520 \cdot \frac{1000 \text{ g}}{10^9 \text{ mm}^3} \\ &= 520 \cdot \frac{\text{g}}{10^6 \text{ mm}^3} = \frac{520}{10^6} \text{ g/mm}^3 \\ V &= 348{,}26... \text{ mm}^3 \end{aligned} \right.$$

$$= \frac{520}{10^6} \cdot 348{,}26...$$

$$= 0{,}181... \text{ (g)}$$

Pois poratun massan suhde alkuperäiseen pallon massaan:

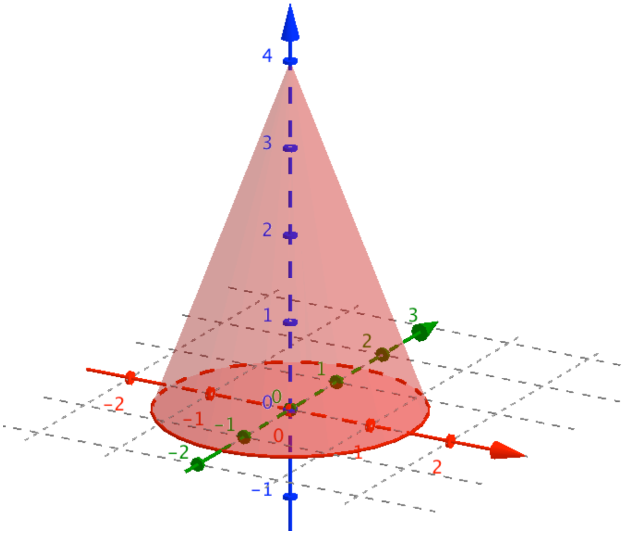
$$\frac{0{,}181... \text{ g}}{2{,}95 \text{ g}} = 0{,}0613... = 6{,}13... \,\% \approx 6{,}1 \,\%$$

Vastaus Pallon massa pienenee 6,1 %.

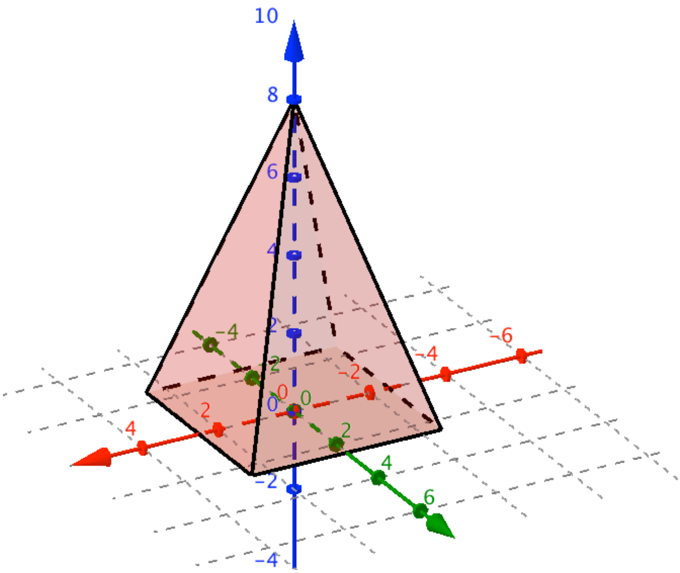
303

Piirrä tarvittaessa ensin sopivat kärkipisteet koordinaattien avulla.

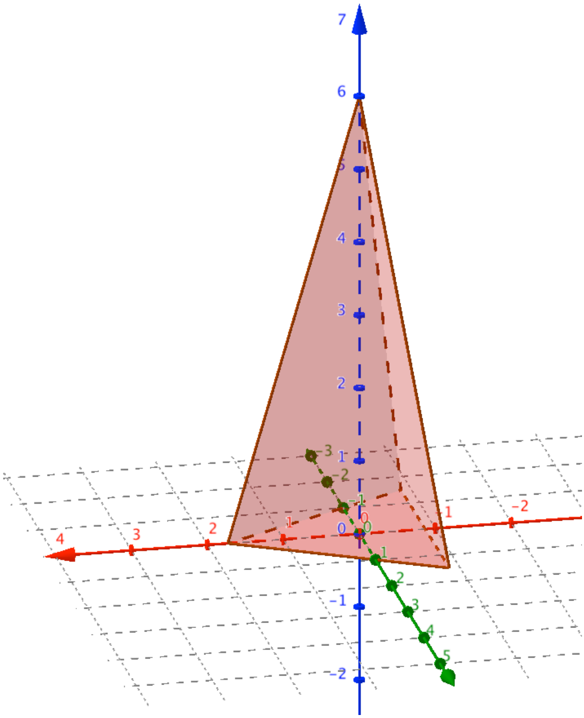
a)



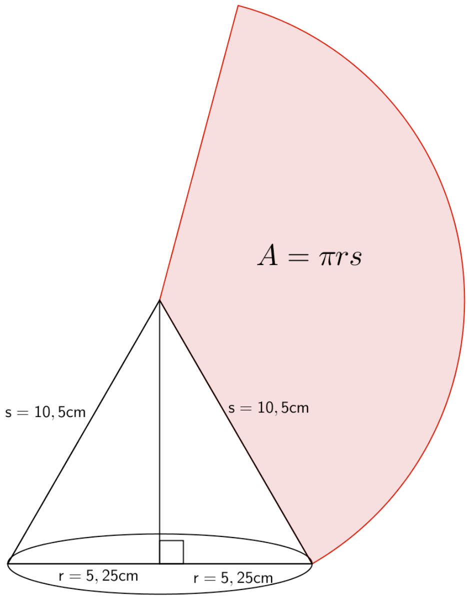
b)



c)



304



Kartion pohjan säde on $r = \dfrac{10{,}5\text{ cm}}{2} = 5{,}25\text{ cm}$.

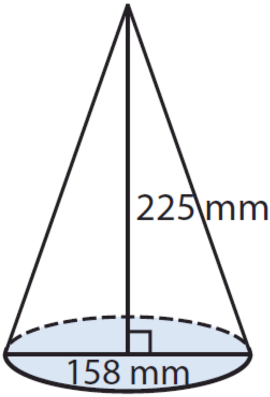
Sivujana on 10,5 cm.

Kartion vaipan pinta-ala on

$$A = \pi rs = \pi \cdot 5{,}25 \cdot 10{,}5 = 173{,}18\ldots \approx 173\ (\text{cm}^2).$$

Vastaus 173 cm^2

305



Kartion pohjan säde on $r = \frac{158 \text{ mm}}{2} = 79 \text{ mm} = 7{,}9 \text{ cm} = 0{,}79 \text{ dm}^3$.

Kartion korkeus on $h = 225 \text{ mm} = 22{,}5 \text{ cm} = 2{,}25\text{dm}^3$.

Kartion tilavuus on

$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}79^2 \cdot 2{,}25$$

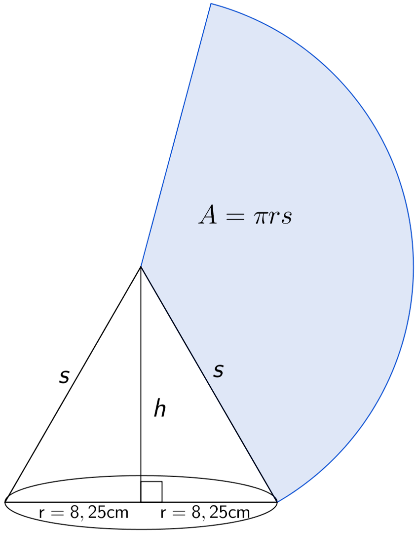
$$= 1{,}470...$$

$$\approx 1{,}47 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Tilavuus on $1{,}47 \text{ dm}^3 = 1{,}47 \text{ L}$.

Vastaus 1,47 L

306



a) Kartion tilavuus on $V = 5{,}45\ \text{L} = 5{,}45\ \text{dm}^3$.

Toisaalta $V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$.

Muodostetaan yhtälö.

$$V = 5{,}45$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = 5{,}45$$

$$h = \frac{3 \cdot 5{,}45}{\pi r^2} \qquad \Big| \, r = 8{,}25 \text{ cm} = 0{,}825 \text{ dm}$$

$$= \frac{3 \cdot 5{,}45}{\pi \cdot 0{,}825^2} = 7{,}646... \text{ (dm)}$$

Kartion korkeus on 7,646… dm = 76,46… cm ≈ 76,5 cm.

b) Lasketaan Pythagoraan lauseen avulla kartion sivujanan pituus s.

$$s^2 = h^2 + r^2$$

$$= (76,46...)^2 + 8,25^2$$

$$= 5914,88... \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$s = _{(}\pm_{)}\sqrt{5914,88...} = 76,908... \text{ (cm)}$$

Kartion vaipan pinta-ala on

$$A_v = \pi r s$$

$$= \pi \cdot 8,25 \cdot 76,908...$$

$$= 1993,31...$$

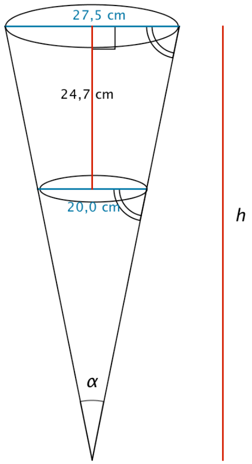
$$\approx 1990 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vaipan pinta-ala on 1990 cm^2.

Vastaus a) 76,5 cm b) 1990 cm^2

307

Täydennetään katkaistu ympyräkartio kokonaiseksi kartioksi.



Poikkileikkauksen pieni ja iso tasakylkinen kolmio ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa kulma α on yhteinen ja samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret). Muodostetaan yhtälö vastinjanojen suhteiden avulla ja lasketaan kokonaisen kartion korkeus h.

$$\frac{h}{h-24{,}7}=\frac{27{,}5}{20{,}0}$$

$$20{,}0\cdot h=27{,}5\cdot(h-24{,}7)$$

$$20{,}0\cdot h=27{,}5\cdot h-27{,}5\cdot 24{,}7$$

$$27{,}5\cdot h-20{,}0\cdot h=27{,}5\cdot 24{,}7$$

$$(27{,}5-20{,}0)\cdot h=27{,}5\cdot 24{,}7$$

$$h=\frac{27{,}5\cdot 24{,}7}{27{,}5-20{,}0}=90{,}566\ldots\ \text{(cm)}$$

Katkaistun kartion tilavuus saadaan vähentämällä koko kartion tilavuudesta katkaistun kärkiosan tilavuus.

$$V = V_{koko} - V_{kärki}$$

$$= \frac{1}{3}A_{ylä}h - \frac{1}{3}A_{ala}\cdot(h-24{,}7)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{27{,}5}{2}\right)^2\cdot 90{,}566... - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{20{,}0}{2}\right)^2\cdot(90{,}566... - 24{,}7)$$

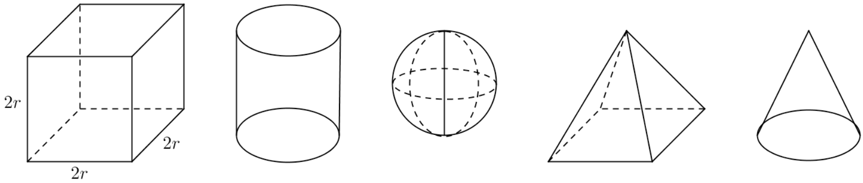
$$= \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 13{,}75^2\cdot 90{,}566... - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 10{,}0^2\cdot 65{,}866...$$

$$= 11033{,}37...\ (\text{cm}^3)$$

Ämpärin tilavuus on 11033,37… cm^3 = 11,03337 dm^3 ≈ 11,0 L.

Vastaus 11,0 L

308



Olkoon kuution muotoisen pakkauslaatikon särmä $2r$.

- Umpinaisen kuution särmä on $2r$.
- Suoran ympyrälieriön korkeus on $2r$ ja pohjan halkaisija $2r$.
- Pallon halkaisija on $2r$.
- Säännöllisen nelisivuisen pyramidin korkeus on $2r$ ja pohjana on neliö, jonka sivun pituus on $2r$.
- Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on $2r$ ja korkeus $2r$.

Kappaleiden massat (painot) suhtautuvat kuten niiden tilavuudet, koska umpinaiset kappaleet on valmistettu samasta materiaalista.

- Kuutio on suurin, pakkauslaatikkoon ei jää yhtään tyhjää tilaa.
- Suora ympyrälieriö mahtuu kuution sisään.
- Pallo mahtuu suoran ympyrälieriön sisään.
- Suora ympyräkartio mahtuu pyramidin sisään.

Verrataan pallon ja pyramidin tilavuuksien lausekkeita.

Pallon tilavuus on $V_{pallo} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Pyramidin tilavuus on $V_{pyramidi} = \frac{1}{3}\cdot(2r)^2\cdot 2r = \frac{8}{3}r^3 = \frac{4}{3}\cdot 2\cdot r^3$.

Koska $\pi > 2$, niin

$$V_{pallo} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 > \frac{4}{3} \cdot 2 \cdot r^3 = V_{pyramidi},$$

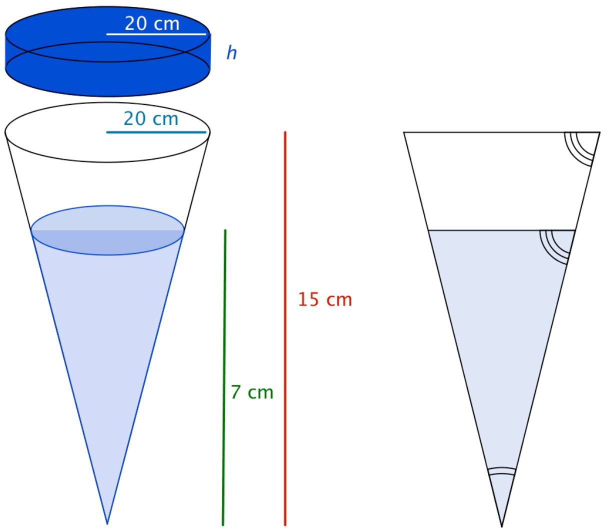
joten pyramidi on tilavuudeltaan palloa pienempi.

Kappaleiden massat pienimmästä suurimpaan ovat:

1. suora ympyräkartio
2. säännöllinen nelisivuinen pyramidi
3. pallo
4. suora ympyrälieriö
5. kuutio

Vastaus suora ympyräkartio, säännöllinen nelisivuinen pyramidi, pallo, suora ympyrälieriö, kuutio

309



Sadevesimittariin päätyy suoran ympyrälieriön muotoinen vesipatsas, joka täyttää kärjellään seisovaan kartioon 7 cm korkean kartion muotoisen vesikerroksen.

Kysytty sademäärä on suoran ympyrälieriön korkeus h.

Suoran ympyrälieriön tilavuus on $V_{lieriö} = A_p h = \pi \cdot 20^2 \cdot h$.

Pystysuorassa seisova kartio ja sen sisällä oleva kartion mallinen vesikerros ovat yhdenmuotoisia (kaikki poikkileikkaukset ovat tasakylkisiä kolmioita, joilla on yhteinen kulma kartion kärjessä ja samankohtaiset kulmat kartion sivujanan ja pohjaympyrän halkaisijan välillä ovat yhtä suuret).

Kartion vesiosan ja koko tilavuuden suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_{vesi}}{V_{kartio}} = \left(\frac{7}{15}\right)^3 \qquad \left| V_{vesi} = V_{lieriö} \right.$$

$$\frac{V_{lieriö}}{V_{kartio}} = \left(\frac{7}{15}\right)^3 \qquad \left| \begin{array}{l} V_{lieriö} = \pi \cdot 20^2 \cdot h \\ V_{kartio} = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 15 \end{array} \right.$$

$$\frac{\cancel{\pi} \cdot \cancel{20^2} \cdot h}{\frac{1}{3}\cancel{\pi} \cdot \cancel{20^2} \cdot 15} = \left(\frac{7}{15}\right)^3$$

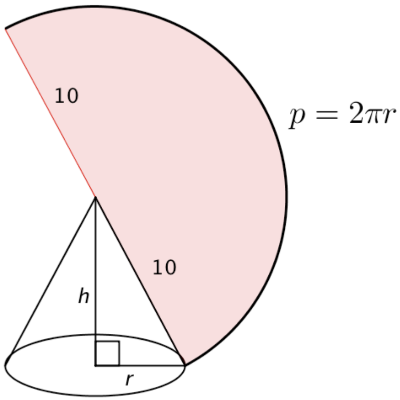
$$\frac{h}{5} = \left(\frac{7}{15}\right)^3$$

$$h = 5 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^3 = 0{,}508... \quad \text{(cm)}$$

Sademäärä oli 0,508… cm = 5,08… mm ≈ 5 mm.

Vastaus 5 mm

310



Kysessä on suora ympyräkartio.

Kartion tilavuuden laskemiseksi on selvitettävä kartion korkeus ja pohjaympyrän säde.

Vaippana olevan puoliympyrän kaaren pituus on yhtä suuri kuin kartion pohjaympyrän piiri. Muodostetaan yhtälö.

$$2\pi r = \frac{180°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 10 \qquad \big| : 2\pi$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot 10$$

$$r = 5$$

Lasketaan kartion korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$10^2 = r^2 + h^2$$

$$\begin{aligned} h^2 &= 10^2 - r^2 && \Big| \, r = 5 \\ &= 10^2 - 5^2 \\ &= 75 \end{aligned}$$

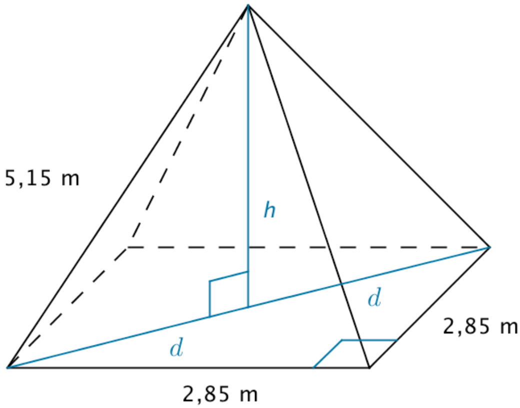
$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

Lasketaan kartion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3} \\ &= \frac{125\sqrt{3}}{3}\pi \end{aligned}$$

Vastaus $\quad \dfrac{125\sqrt{3}}{3}\pi$

311



Lasketaan pohjan lävistäjän puolikkaan pituus *d*.

$$(2d)^2 = 2{,}85^2 + 2{,}85^2$$

$$4d^2 = 2 \cdot 2{,}85^2$$

$$d = {}_{(}\pm{}_{)}\sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}85^2}{4}} = 2{,}015\ldots \text{ (m)}$$

Lasketaan pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$5{,}15^2 = d^2 + h^2$$

$$h = {}_{(}\pm{}_{)}\sqrt{5{,}15^2 - d^2}$$

$$= \sqrt{5{,}15^2 - (2{,}015\ldots)^2}$$

$$= 4{,}739\ldots \text{ (m)}$$

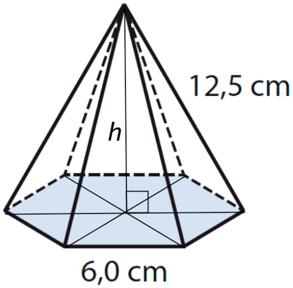
Lasketaan pyramidin tilavuus.

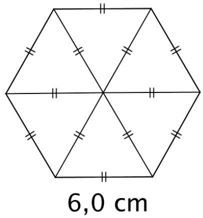
$$V = \frac{1}{3} A_p \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 2{,}85^2 \cdot 4{,}739... = 12{,}831... \approx 12{,}8 \ (\mathrm{m}^3)$$

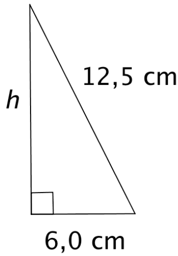
Pyramidin tilavuus on 12,8 m^3.

Vastaus 12,8 m^3

312







Lasipyramidin pohja on säännöllinen kuusikulmio. Kun pohja jaetaan kuuteen kolmioon, muodostuu kuusi tasasivuista kolmiota, joiden kaikki sivut ovat pituudeltaan 6,0 cm ja kulmat 60°.

Lasketaan pyramidin korkeus Pythagoraan lauseen avulla.

$$
\begin{aligned}
12{,}5^2 &= 6{,}0^2 + h^2 \\
h^2 &= 12{,}5^2 - 6{,}0^2 \\
h &= {}_{(\pm)}\sqrt{12{,}5^2 - 6{,}0^2} \\
&= 10{,}965...\ (\text{cm})
\end{aligned}
$$

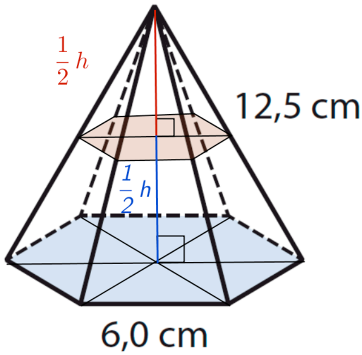
Lasketaan pyramidin pohjan ala.

$$A_p = 6 \cdot A_{kolmio} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6{,}0 \cdot 6{,}0 \cdot \sin 60° = 93{,}530...\ (\text{cm}^2)$$

Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p h = \frac{1}{3} \cdot 93{,}530... \cdot 10{,}965... = 341{,}881...\ (\text{cm}^3)$$

Kun pyramidi täytetään korkeuden puoliväliin, täyttämättä jää alkuperäisen pyramidin kanssa yhdenmuotoinen pyramidi, jonka korkeus on puolet alkuperäisen pyramidin korkeudesta.



Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{V_{tyhjä}}{V_{pyramidi}} = \left(\frac{\frac{1}{2}\cancel{h}}{\cancel{h}}\right)^3$$

$$V_{tyhjä} = \frac{1}{2^3} \cdot V_{pyramidi} = \frac{1}{8} V_{pyramidi}$$

Hiekkaa tarvitaan

$$V_{pyramidi} - V_{tyhjä} = V_{pyramidi} - \frac{1}{8} V_{pyramidi}$$

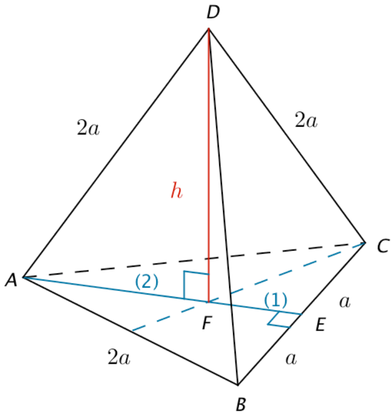
$$= \frac{7}{8} V_{pyramidi}$$

$$= \frac{7}{8} \cdot 341{,}881...$$

$$= 299{,}146... \approx 300 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vastaus 300 cm^3 (= 0,30 L)

313



Merkitään säännöllisen tetraedrin sivusärmän pituutta $2a$:lla.

Tetraedrin korkeus on huipun ja pohjakolmion painopisteen välinen etäisyys $|DF|$.

Lasketaan ensin pohjakolmion mediaanin pituus $|AE|$ suorakulmaisesta kolmiosta ABE .Pohjakolmio on tasasivuinen kolmio, joten mediaani on samalla pohjakolmion korkeusjana ja kolmio ABE suorakulmainen.

$$(2a)^2 = a^2 + |AE|^2$$

$$|AE|^2 = 4a^2 - a^2$$

$$|AE| = _{(}\pm_{)}\sqrt{3a^2} = \sqrt{3}|a| = \sqrt{3}a$$

Tetraedrin korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta *AFD*.

$$(2a)^2 = |AF|^2 + |DF|^2$$

$$\left| \begin{aligned} &|DF|^2 = h^2 \\ &|AF|^2 = \left(\frac{2}{3}|AE|\right)^2 = \frac{4}{9}\cdot(\sqrt{3}a)^2 \\ &\qquad = \frac{4\cdot 3}{9}\cdot a^2 = \frac{4}{3}a^2 \end{aligned} \right.$$

$$4a^2 = \frac{4}{3}a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - \frac{4}{3}a^2 = \frac{8}{3}a^2$$

$$h = \sqrt{\frac{8}{3}a^2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}a = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$$

Tetraedrin tilavuus on 1,20 L = 1,20 dm^3.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan a.

$$V = \frac{1}{3}A_p h$$

$$\left| \begin{aligned} &V = 1{,}20\ \mathrm{dm}^3,\ \ h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \\ &A_p = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot \sin 60^\circ \end{aligned} \right.$$

$$1{,}20 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\sin 60^\circ\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

Yhtälön voi ratkaista laskimella

$$1,20 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{6\sqrt{3}} \cdot \sin 60° \cdot a^3 \quad \Bigg| \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$1,20 = \frac{\cancel{2} \cdot 2\sqrt{2}}{3\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}} \cdot a^3$$

$$a^3 = \frac{1,20 \cdot 3}{2\sqrt{2}}$$

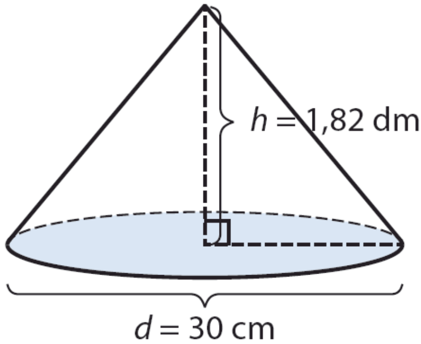
$$a = \sqrt[3]{\frac{1,20 \cdot 3}{2\sqrt{2}}} = 1,0837... \text{ (dm)}$$

Tetraedrin särmä on

$$2a = 2 \cdot 1,0837... \text{ dm} = 2,1674... \text{ dm} \approx 21,7 \text{ cm} .$$

Vastaus 21,7 cm

314



$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h \qquad \left| \begin{array}{l} r = \dfrac{30 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm} = 1{,}5 \text{ dm} \\ h = 1{,}82 \text{ dm} \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 1{,}82$$

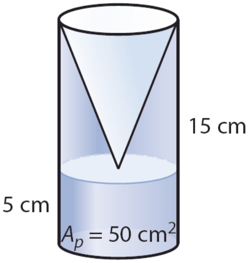
$$= 4{,}28...$$

$$\approx 4{,}3 \text{ (dm}^3\text{)}$$

Tilavuus on 4,3 dm^3 = 4,3 L.

Vastaus 4,3 L

315



Lasketaan maljakon lasiosan tilavuus.

$$V_{lasi} = V_{lieriö} - V_{kartio}$$

$$= A_p h_{lieriö} - \frac{1}{3} A_p h_{kartio} \qquad \left| \begin{array}{l} h_{lieriö} = 15 \text{ cm} \\ h_{kartio} = 15 \text{ cm} - 5 \text{ cm} = 10 \text{ cm} \end{array} \right.$$

$$= 50 \cdot 15 - \frac{1}{3} \cdot 50 \cdot 10 = 583{,}333... \text{ (cm}^3\text{)}$$

Lasketaan maljakon massa.

$$m = \rho V \qquad \left| \rho = 2250 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 2250 \cdot \frac{1000\text{g}}{100^3 \ \text{cm}^3} = 2{,}250 \ \frac{\text{g}}{c\text{m}^3} \right.$$

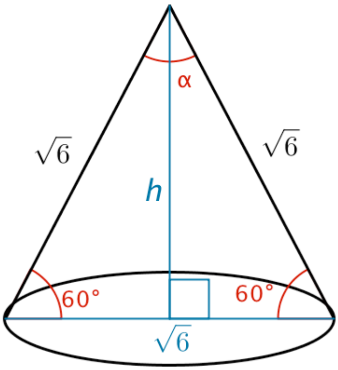
$$= 2{,}250 \cdot 583{,}333...$$

$$= 1312{,}5... \text{ (g)}$$

Maljakon massa on 1312,5… g ≈ 1,3 kg.

Vastaus 1,3 kg

316



Pohjan ja sivujanan välinen kulma on 60°, joten myös huippukulman α on oltava 60° $(\alpha = 180° - 60° - 60° = 60°)$.

Kartion poikkileikkaus on tasasivuinen kolmio, joten pohjan halkaisija on yhtä pitkä kuin sivujana eli $\sqrt{6}$.

Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$\sqrt{6}^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = \sqrt{6}^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = 6 - \frac{6}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$$

$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Kartion tilavuus:

$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}$$

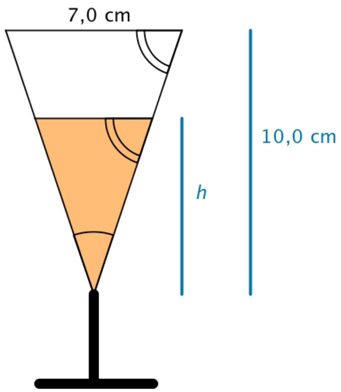
$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \pi \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overset{\sqrt{2})}{=} \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$$

Vastaus Kartion tilavuus on $\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$.

317



Kuhunkin lasiin tulee mehua $V_{mehu} = \dfrac{7{,}5\text{ dl}}{9} = 0{,}8333...\text{ dl}$.

Lasin yläosan säde on $r = \dfrac{7{,}0\text{ cm}}{2} = 3{,}5\text{ cm}$.

Lasin poikkileikkauskuviossa on kaksi yhdenmuotoista tasakylkistä kolmiota (kk, huippukulma yhteinen, samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{V_{mehu}}{V_{lasi}} = \left(\frac{h}{10,0}\right)^3$$

$$h^3 = 10,0^3 \cdot \frac{V_{mehu}}{V_{lasi}}$$

$$\left| \begin{aligned} V_{mehu} &= 0,8333\ldots \text{ dl} \\ &= 83,33\ldots \text{ ml} = 83,33\ldots \text{ cm}^3 \\ \mathrm{V}_{lasi} &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3,5^2 \cdot 10,0 \text{ cm}^3 \end{aligned} \right.$$

$$= 1000 \cdot \frac{83,33\ldots}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3,5^2 \cdot 10,0}$$

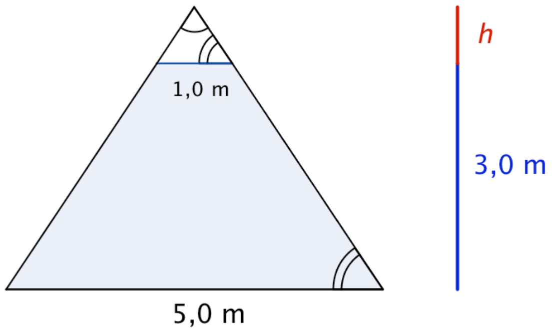
$$= 649,61\ldots\ (\text{cm}^3)$$

$$h = \sqrt[3]{649,61\ldots} = 8,66\ldots\ = 8,7\ (\text{cm})$$

Mehun pinta nousee laseissa 8,7 cm korkeuteen.

Vastaus 8,7 cm

318



Täydennetään säännölliseen nelisivuiseen pyramidiin puuttuva huippu. Piirretään pyramidin poikkileikkaus. Syntyvät kaksi tasakylkistä kolmiota ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma on yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Vastinjanojen pituuksien suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{h}{h+3,0}=\frac{1,0}{5,0}$$

$$5,0\cdot h=1,0\cdot(h+3,0)$$

$$5,0\cdot h=h+3,0$$

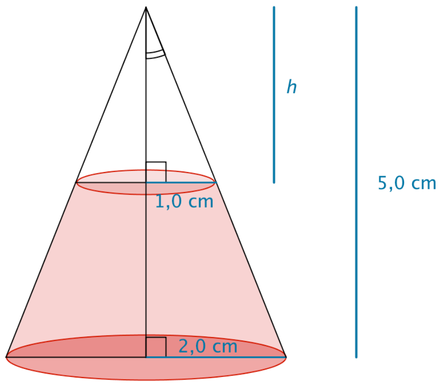
$$4,0\cdot h=3,0$$

$$h=\frac{3,0}{4,0}=0,75\ (\mathrm{m})$$

Pyramidin lopullinen korkeus on $3,0\ \mathrm{m}+0,75\ \mathrm{m}=3,75\ \mathrm{m}\approx 3,8\ \mathrm{m}$.

Vastaus 3,8 m

319



Piirretään alkuperäinen suora ympyräkartio ja sille korkeusjana sekä katkaisukohta. Tutkitaan kartion poikkileikkauskuviota.
Alkuperäinen kartio ja pois katkaistu osa ovat yhdenmuotoisia, joten leikkauskuvion kaksi suorakulmaista kolmiota ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulman puolikas on yhteinen ja molemmissa suora kulma).

Lasketaan pois katkaistun osan korkeus.

Vastinjanojen pituuksien suhde on vakio.

$$\frac{h}{5{,}0}=\frac{1{,}0}{2{,}0}$$

$$h=\frac{5{,}0\cdot 1{,}0}{2{,}0}=2{,}5\ \text{(cm)}$$

a) Katkaistun kartion tilavuus V_k saadaan vähentämällä alkuperäisen kartion tilavuudesta V_1 pois katkaistun huipun tilavuus V_2.

$$
\begin{aligned}
V_k &= V_1 - V_2 \\
&= \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}0^2 \cdot 5{,}0 - \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}0^2 \cdot 2{,}5 \\
&= 18{,}325... \\
&\approx 18\ (\text{cm}^3)
\end{aligned}
$$

b) Katkaistun kartion vaipan pinta-ala A_k saadaan vähentämällä alkuperäisen kartion vaipan pinta-alasta A_1 pois katkaistun osan vaipan pinta-ala A_2.

Lasketaan ensin alkuperäisen kartion sivujana s_1 ja pois katkaistun kartion sivujana s_2.

$$s_1^2 = 2{,}0^2 + 5{,}0^2 = 29{,}0$$

$$s_1 = _{(}\pm_{)}\sqrt{29{,}0}$$

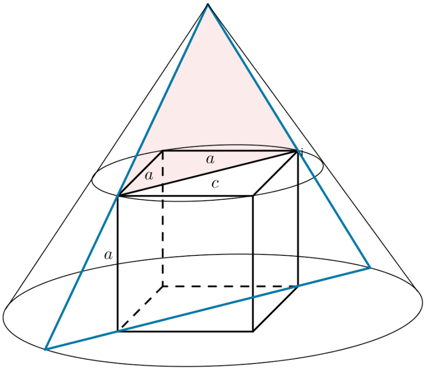
$$s_2^2 = 1{,}0^2 + 2{,}5^2 = 7{,}25$$

$$s_2 = _{(}\pm_{)}\sqrt{7{,}25}$$

$$
\begin{aligned}
A_k &= A_1 - A_2 \\
&= \pi r_1 s_1 - \pi r_2 s_2 \\
&= \pi \cdot 2{,}0 \cdot \sqrt{29{,}0} - \pi \cdot 1{,}0 \cdot \sqrt{7{,}25} \\
&= 25{,}376... \\
&\approx 25\ (\text{cm}^2)
\end{aligned}
$$

Vastaus a) 18 cm^2 b) 25 cm^2

320

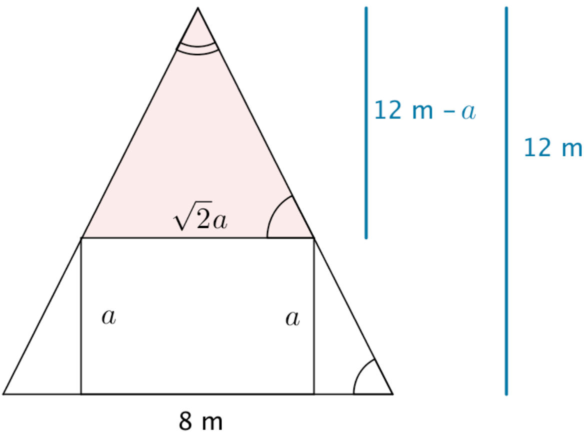


Piirretään tilanteesta poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee pitkin kuution ylä- ja alatahkojen lävistäjiä. Kuution ylätahkon kärjet ovat kartion vaipalla. Merkitään kuution särmää kirjaimella a.

Tahkon lävistäjän pituus on $\sqrt{2}a$:

$$c^2 = a^2 + a^2$$

$$c = _{(\pm)}\sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$



Poikkileikkauskuvioon syntyy kaksi tasakylkistä kolmiota, jotka ovat yhdenmuotoiset (kk, huippukulma yhteinen ja samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Vastinjanojen suhde on vakio.
Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan kuution särmän pituus a.

$$\frac{\sqrt{2}a}{8} = \frac{12-a}{12}$$

$$12\cdot\sqrt{2}a = 8\cdot(12-a)$$

$$12\sqrt{2}a = 8\cdot 12 - 8a$$

$$12\sqrt{2}a + 8a = 12\cdot 8$$

$$(12\sqrt{2}+8)a = 96$$

$$a = \frac{96}{12\sqrt{2}+8} = 3{,}844...\ \text{(m)}$$

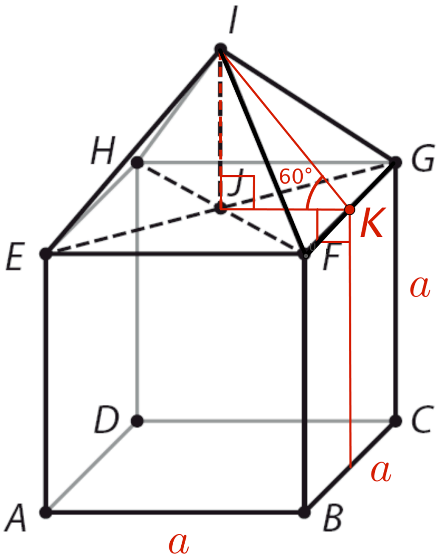
Lasketaan kuution tilavuus.

$$V = a^3 = \left(\frac{96}{12\sqrt{2}+8}\right)^3 = 56{,}823... \approx 57\ (\text{m}^3)$$

Kuution tilavuus on 57 m^3.

Vastaus 57 m^3

321



Lasketaan kattona olevan säännöllisen neliöpohjaisen pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta *KIJ*.

$\sphericalangle IKJ = 150° - 90° = 60°$

$$\tan 60° = \frac{|IJ|}{|JK|}$$

$$|IJ| = |JK| \tan 60° \qquad \left| \begin{array}{l} |JK| = \dfrac{a}{2} \\ \tan 60° = \sqrt{3} \end{array} \right.$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

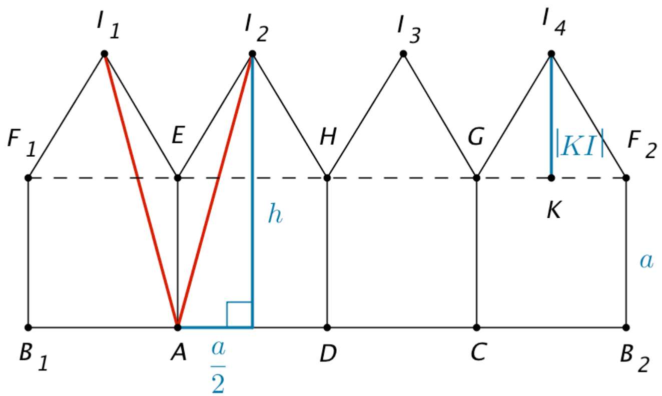
a) Huoneen korkeus on

$$a + \frac{\sqrt{3}}{2}a = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a$$

b) Huoneen tilavuus on

$$\begin{aligned} V &= V_{kuutio} + V_{pyramidi} \\ &= a^3 + \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= a^3 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a^3 \\ &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)a^3 \end{aligned}$$

c) Lyhimmän sähköjohdon pituuden selvittämiseksi piirretään huone levitettynä tasoon niin, että seinän sisäpinta näkyy.



Lyhin matka pisteiden A ja I välillä on suora reitti AI_1 tai AI_2, jotka ovat yhtä pitkiä, mutta kulkevat viereisillä seinillä.

Lasketaan janan AI_2 pituus suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseen avulla. Tarvittava kattopyramidin tahkon korkeus $|KI|$ saadaan edellisen kuvan kolmiosta KIJ.

$$\cos 60° = \frac{|JK|}{|KI|}$$

$$|KI| = \frac{|JK|}{\cos 60°} \qquad \left| \begin{array}{l} |JK| = \dfrac{a}{2} \\ \cos 60° = \dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{1} = a$$

$$|AI_2|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \qquad \left| \begin{array}{l} h = a + |KI| \\ \quad = a + a = 2a \end{array} \right.$$

$$= \frac{a^2}{4} + (2a)^2 = \frac{a^2}{4} + 4a^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{16}{4}a^2 = \frac{17}{4}a^2$$

$$|AI_2| = (\pm)\sqrt{\frac{17}{4}a^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}a$$

Johdon pituus on $\dfrac{\sqrt{17}}{2}a$.

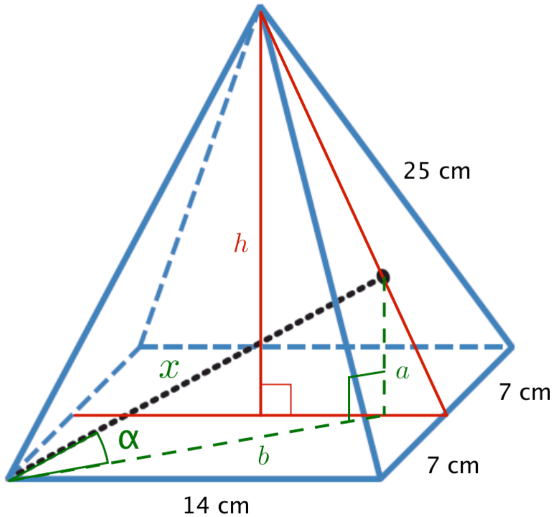
Vastaus

a) $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)a$

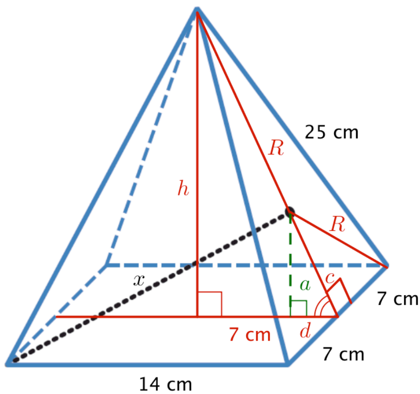
b) $\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)a^3$

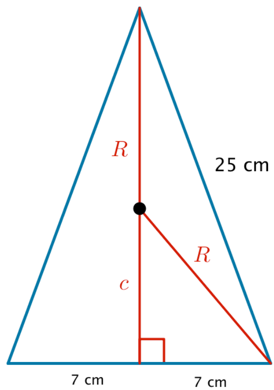
c) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}a$

322



Tavoitteena on laskea poratun reiän pituus x sekä reiän ja pohjan välinen kulma α suorakulmaisen kolmion kateettien a ja b avulla. Reiän aloituskohta on kolmion keskipisteessä, joka on yhtä kaukana sivutahkona olevan kolmion kärjistä.





Lasketaan ensin sivutahkon korkeus (kuvan merkinnöillä $R + c$). Tämän avulla saadaan pienen suorakulmaisen kolmion kateetin pituus c. Yhdenmuotoisten kolmioiden avulla saadaan pienen suorakulmaisen kolmion kateetit a ja d.

- Sivutahkon korkeus:

$$25^2 = (R+c)^2 + 7^2$$

$$R+c = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24 \text{ (cm)}$$

- Reiän aloituskohdan etäisyys sivutahkon kannasta:

$$R^2 = c^2 + 7^2$$

$$(24-c)^2 = c^2 + 7^2$$

$$24^2 - 2\cdot 24\cdot c + c^2 = c^2 + 7^2$$

$$c = \frac{7^2 - 24^2}{-2\cdot 24} = \frac{527}{48} \approx 10{,}97... \text{ (cm)}$$

- Pyramidin korkeus:

$$(R+c)^2 = h^2 + 7^2$$

$$h = \sqrt{(R+c)^2 - 7^2} = \sqrt{24^2 - 7^2} = \sqrt{527} \approx 22{,}95... \text{ (cm)}$$

- Pyramidin poikkileikkauskuvion suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk, molemmissa suora kulma ja terävä kulma yhteinen). Vasinjanojen suhde on vakio. Lasketaan pienen suorakulmaisen kolmion kateetti a.

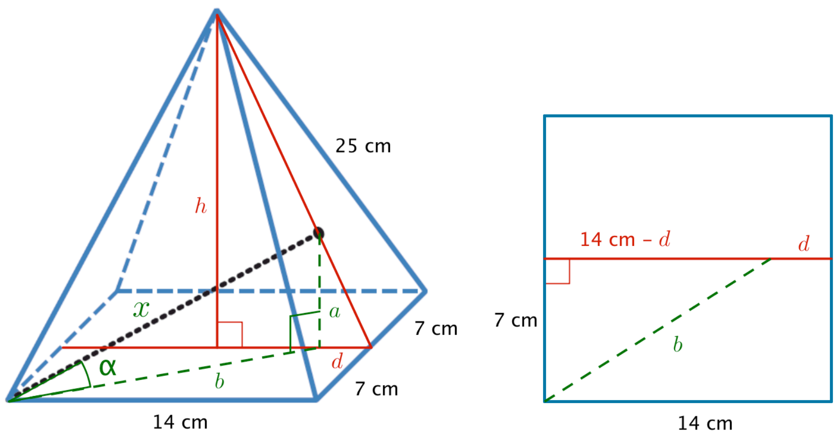
$$\frac{a}{h} = \frac{c}{R+c}$$

$$a = \frac{h \cdot c}{R+c} = \frac{\sqrt{527} \cdot \frac{527}{48}}{24} = 10{,}501\ldots \text{ (cm)}$$

- Pienen suorakulmaisen kolmion kateetti d pyramidin pohjalla:

$$c^2 = a^2 + d^2$$

$$d = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{\left(\frac{527}{48}\right)^2 - (10{,}501\ldots)^2} = 3{,}202\ldots \text{ (cm)}$$



- Pyramidin pohjalla olevan suorakulmaisen kolmion kateetti b:

$$b^2 = 7^2 + (14 - d)^2$$

$$b = \sqrt{7^2 + (14-d)^2} = \sqrt{7^2 + (14 - 3{,}202\ldots)^2} = 12{,}868\ldots \text{ (cm)}$$

- Poratun reiän pituus x sekä pohjan ja reiän välinen kulma α.

$$x^2 = a^2 + b^2$$

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(10{,}501...)^2 + (12{,}868...)^2} = 16{,}609... \approx 17 \text{ (cm)}$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

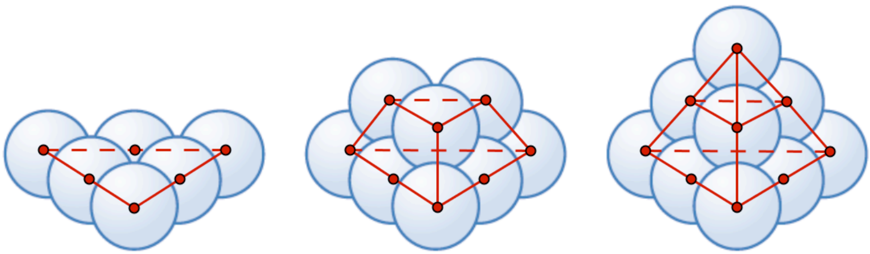
$$\alpha = \tan^{-1}\frac{a}{b} = \tan^{-1}\frac{10{,}501...}{12{,}868...} = 39{,}21...^\circ \approx 39^\circ$$

Poratun reiän pituus on 17 cm.

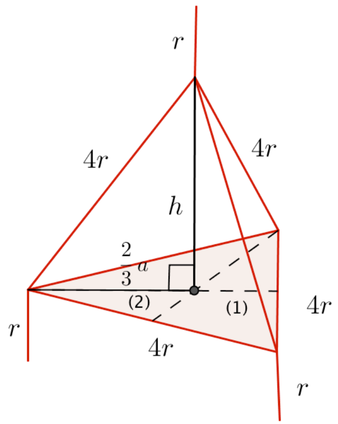
Reiän ja pohjan välinen kulma on 39°.

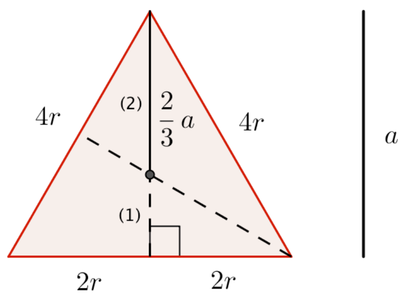
Vastaus pituus 17 cm, kulma 39°

323



Yhdistetään *r*-säteisten pallojen keskipisteet janoilla ja tutkitaan muodostuvaa säännöllistä kolmisivuista pyramidia (säännöllinen tetraedri), jonka särmän pituus on 4*r*.





Pallopyramidin korkeus on keskipisteiden yhdysjanojen muodostaman pyramidin korkeus lisättynä kahdella pallon säteellä eli 10 cm = *h* + 2*r*. Pyramidin korkeusjana on pyramidin huipun ja pohjakolmion painopisteen välinen jana.

Lasketaan pohjakolmion korkeus. Pohjakolmio on tasasivuinen, joten mediaanit ovat samalla korkeusjanoja.

$$(4r)^2 = (2r)^2 + a^2$$

$$a^2 = 16r^2 - 4r^2$$

$$a = {\scriptstyle(}\pm{\scriptstyle)}\sqrt{12r^2} = 2\sqrt{3}\,r$$

Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspiste, joka jakaa mediaanit 2 : 1 huipusta lukien.
Lasketaan pyramidin korkeus suorakulmaisesta kolmiosta.

$$(4r)^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = 16r^2 - \frac{4}{9}a^2$$

$$= 16r^2 - \frac{4}{9}\cdot(2\sqrt{3}r)^2$$

$$= {}^{3)}16r^2 - \frac{4}{\cancel{9}_{3}}\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot r^2$$

$$= \frac{3\cdot 16}{3}r^2 - \frac{16}{3}r^2$$

$$= \frac{2\cdot 16}{3}r^2$$

$$h = {\scriptstyle(}\pm{\scriptstyle)}\sqrt{\frac{2\cdot 16}{3}r^2} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r$$

Muodostetaan yhtälö pallopyramidin korkeuden avulla ja ratkaistaan pallon säde *r*.

$$h + 2r = 10$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r + 2r = 10$$

$$4\sqrt{2}r + 2\sqrt{3}r = 10\sqrt{3}$$

$$r = \frac{10\sqrt{3}}{4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \overset{(2 \qquad \sqrt{3})}{=} \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

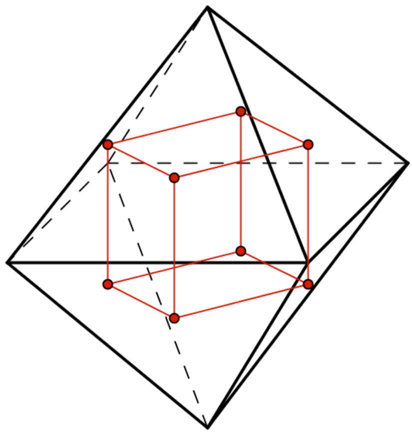
$$= \frac{5 \cdot 3}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3}^2} = \frac{15}{3 + 2\sqrt{6}} = 1{,}89\ldots \approx 1{,}9 \text{ (cm)}$$

Pallon säde on $\frac{15}{3 + 2\sqrt{6}}$ cm $\approx 1{,}9$ cm .

Vastaus $\frac{15}{3 + 2\sqrt{6}}$ cm $\approx 1{,}9$ cm

324

Säännöllisessä oktaedrissa on kahdeksan tahkoa, joten syntyvässä kappaleessa on kahdeksan kärkeä. Kuutio on Platonin kappaleista ainoa, jossa on kahdeksan kärkeä.
Syntyvän kappaleen on siis oltava kuutio.

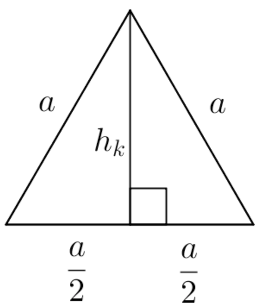


Oktaedrin tahkot ovat tasasivuisia kolmioita, joiden sivun pituus on a. Lasketaan sivutahkon korkeus.

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_k^2$$

$$h_k^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

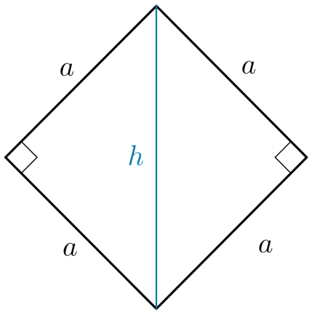
$$h_k = (\pm)\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$



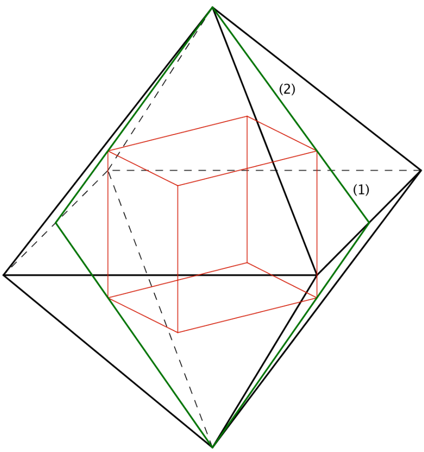
Lasketaan oktaedrin korkeus kärjestä vastakkaiseen kärkeen.
Oktaedrin kärkien kautta piirretty poikkileikkaus on neliö.

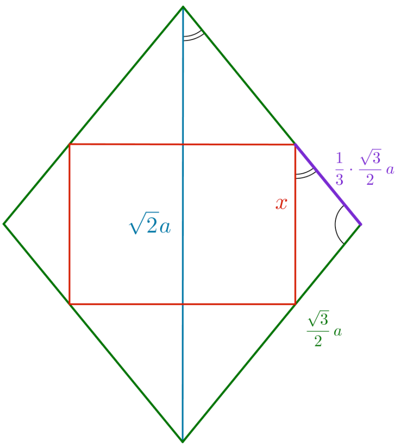
$$h^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$h = \sqrt{2}a$$



Piirretään kappaleesta poikkileikkaus pitkin tasoa, joka kulkee kuution ylä- ja alatahkojen lävistäjien kautta. Kuution kärjet ovat tahkojen painopisteissä eli mediaanien leikkauspisteissä Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Tasasivuisen kolmion mediaani on samalla kolmion korkeusjana, joten mediaanin pituus on $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.





Poikkileikkauskuvioon muodostuu yhdenmuotoiset tasakylkiset kolmiot (kk, huippukulma yhteinen, samankohtaiset kulmat yhtä suuret).

Vastinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}{\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}a}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{3}$$

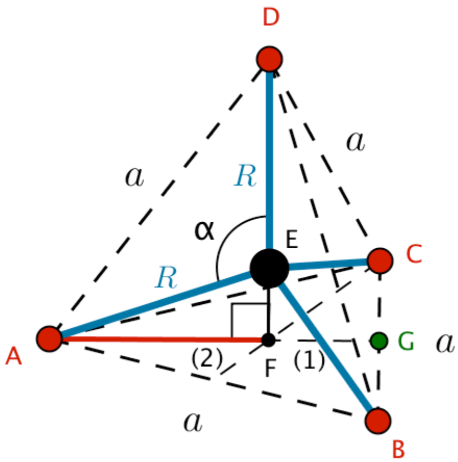
$$x = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}a$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a$$

Kuution särmän pituus on $\frac{\sqrt{2}}{3}a$.

Vastaus Kuutio, jonka särmän pituus on $\frac{\sqrt{2}}{3}a$.

325



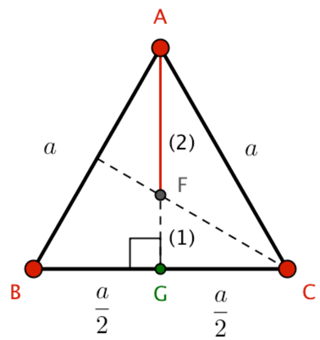
Lasketaan tetraedrin pohjana olevan tasasivuisen kolmion korkeus eli mediaanin AG pituus.

$$|AB|^2 = |BG|^2 + |AG|^2$$

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + |AG|^2$$

$$|AG|^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2$$

$$|AG| = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

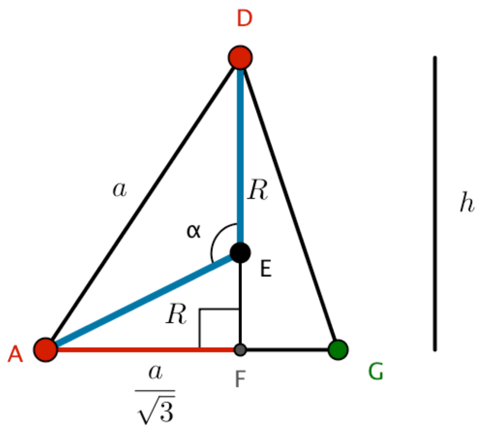


Tetraedrin korkeusjanan päätepiste F on pohjakolmion painopiste eli mediaanien leikkauspiste. Painopiste jakaa mediaanit suhteessa 2 : 1 huipusta lukien.

Lasketaan suorakulmaisen kolmion AFD kateetti AF.

$$|AF| = \frac{2}{3}|AG| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Piirretään molekyylistä poikkileikkauskuva tasossa, joka kulkee tetraedrin huipun D ja pohjan mediaanin AG kautta.



Lasketaan tetraedrin korkeus eli etäisyys huipun D ja pohjan painopisteen F välillä:

$$|AD|^2 = |AF|^2 + |FD|^2$$

$$a^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2$$

$$h = _{(}\pm_{)}\sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

Lasketaan etäisyys R suorakulmaisen kolmion AFE avulla.

$$|AE|^2 = |AF|^2 + |EF|^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + (h - R)^2$$

$$R^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2 - 2 \cdot h \cdot R + R^2$$

$$2 \cdot h \cdot R = \frac{a^2}{3} + h^2$$

$$R = \frac{a^2}{3 \cdot 2 \cdot h} + \frac{h^2}{2 \cdot h} = \frac{a^2}{6 \cdot h} + \frac{h}{2} \qquad \Big| \, h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$$

$$= \frac{a^2}{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a}{2} = {}^{\sqrt{2})} \frac{\sqrt{3}a}{6\sqrt{2}} + {}^{2\sqrt{3})} \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}a}{12} + \frac{2\sqrt{6}a}{12} = \frac{3\sqrt{6}a}{12} = \frac{\sqrt{6}a}{4}$$

Kysytty kulma α saadaan kosinilauseen avulla.

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2 - 2R^2}{-2R^2} = \frac{a^2 - 2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2}{-2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{6}a}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{a^2 - \dfrac{3a^2}{4}}{-\dfrac{3a^2}{4}} = \frac{a^2\left(1 - \dfrac{3}{4}\right)}{-\dfrac{3a^2}{4}} = \frac{\dfrac{1}{4}}{-\dfrac{3}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = 109{,}47...° \approx 109{,}5°$$

Sidoskulma on 109,5°.

Vastaus 109,5°