176

a)

$$p = 2\pi r \qquad r = 4{,}5$$
$$= 2\pi \cdot 4{,}5$$
$$= 28{,}27...$$
$$\approx 28$$

piiri on 28 cm

$$A = \pi r^2 \qquad r = 4{,}5$$
$$= \pi \cdot 4{,}5^2$$
$$= 63{,}617...$$
$$\approx 64$$

Ala on 64 cm^2

b)

$$p = \pi d \qquad d = 5{,}0$$
$$= \pi \cdot 5{,}0$$
$$= 15{,}7...$$
$$\approx 16$$

piiri on ≈16 cm

$$r = \frac{d}{2} = \frac{5{,}0}{2} = 2{,}5$$

$$A = \pi r^2 \qquad r = 2{,}5$$
$$= \pi \cdot 2{,}5^2$$
$$= 19{,}63...$$
$$\approx 20$$

Ala on 20 cm^2

Vastaus: a) $p \approx 28$ cm, $A \approx 64$ cm^2
b) $p \approx 16$ cm, $A \approx 20$ cm^2

177

s = 200 m

d = 26 ” = 26·2,54 cm = 66,04 cm
p = π·d = π·66,04

Pyörähdysten määrä $\frac{s}{p} = \frac{20000}{66{,}04 \cdot \pi} = 96{,}399\ldots \approx 96$

Vastaus 96 pyörähdystä

178

Sisempi kehätie p_1 = 97 km

$2\pi r = 97 \quad |:2\pi$

$r = \dfrac{97}{2\pi}$

Ulompi kehätie: säde R = 97 + 8,5 = 105,5

$p_2 = 2\pi R = 2\pi\left(\dfrac{97}{2\pi} + 8,5\right) = 97 + 2\pi \cdot 8,5 = 150,4...$

Ulomman kehätien pituus on 150 km

Vastaus 150 km

179

$A = \pi r^2$
$A = 18\ \text{cm}^2$

Muodostetaan yhtälö

$$\pi r^2 = 18 \quad |:\pi$$
$$r^2 = \frac{18}{\pi}$$
$$r = \pm\sqrt{\frac{18}{\pi}} \qquad r > 0$$
$$r = \sqrt{\frac{18}{\pi}} = 2{,}393\ldots \approx 2{,}4\ (\text{cm})$$

Vastaus 2, 4 cm

180

$p = 270$ m

$p = 2\pi r$

$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{270}{2\pi}$

$A = \pi r^2$

$A = = \pi \cdot \left(\frac{270}{2\pi}\right)^2$

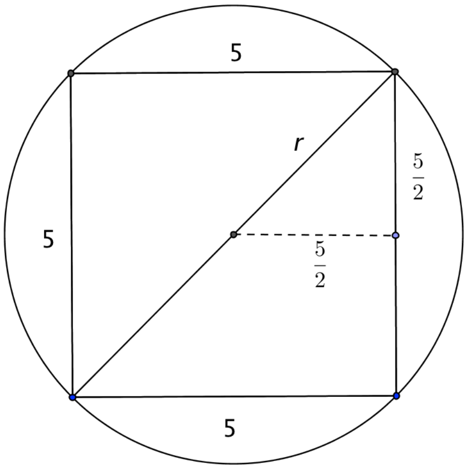
$= 5801{,}197\ldots (\mathrm{m}^2)$ $\quad 1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$

$A = \frac{5801{,}197\ldots}{10000} = 0{,}5801\ldots \approx 0{,}58 \text{ ha}$

Vastaus 0,58 ha

181

Piirrä ensin jana, jonka pituus on 5. Jatka piirtämistä valitsemalla säännöllinen monikulmio, jossa on sivujen lukumäärä on 4.
Piirrä ympyrä valitsemalla kolmen pisteen kautta kulkeva ympyrä. Valitse sitten kolme neliön kärkipistettä.



$A = \pi r^2$

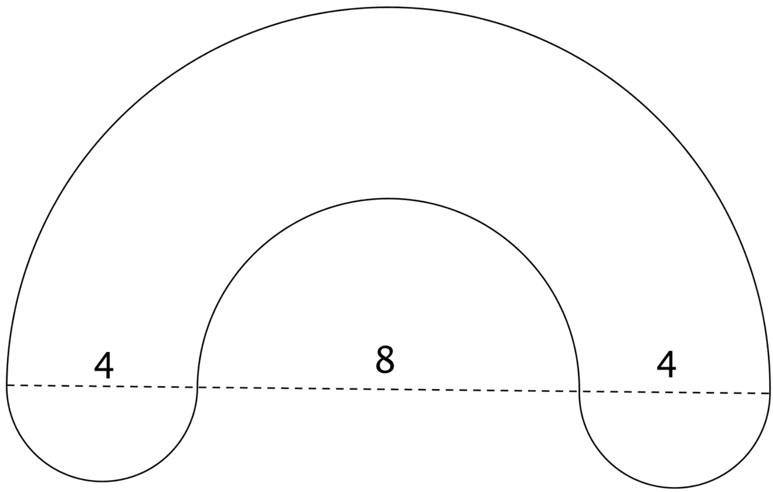
Ratkaistaan ympyrän säteen r neliö Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$$

$$A = \pi \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{2}\pi$$

Vastaus $A = \frac{25}{2}\pi$

182



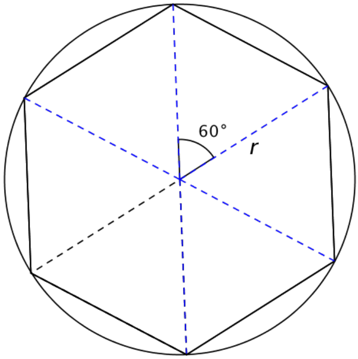
Alue koostuu puoliympyröistä, joiden säteet ovat 4, 8, 2 ja 2.

$$p = 2\pi \cdot 2 + \pi \cdot 4 + \pi \cdot 8 = 16\pi$$

$$A = \frac{1}{2}\pi \cdot 8^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 28\pi$$

Vastaus $p = 16\pi$, $A = 28\pi$

183



Säännöllinen kuusikulmio on muodostunut kuudesta tasasivuisesta kolmiosta, joiden sivun pituus on ympyrän säde r.

Kuusikulmion pinta-ala on

$$A_k = 6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ympyrän pinta-ala on

$$A_y = \pi r^2.$$

Alojen suhde on

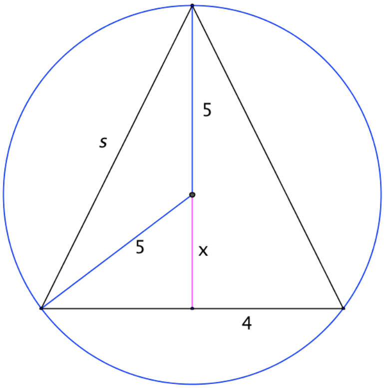
$$\frac{A_y}{A_k} = \frac{\pi r^2}{\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1{,}209... \approx 1{,}21$$

Ympyrän pinta-ala 1,21 kertainen kuusikulmion pinta-alaan nähden. Ympyrän pinta-ala on 121 % kuusikulmion pinta-alasta.

Ympyrän pinta-ala on 21 % suurempi

Vastaus 21 %

184



Ratkaistaan *x* Pythagoraan lauseella.

$x^2 + 4^2 = 5^2$

$x^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$ $\qquad x > 0$

$x = 3$

Kolmion kyljen pituus voidaan ratkaista nyt Pythagoraan lauseella.

$s^2 = 4^2 + (3+5)^2$

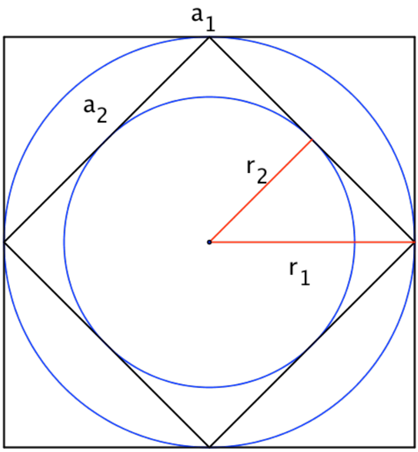
$s^2 = 16 + 64 = 80$

$s = \pm\sqrt{80}$ $\qquad s > 0$

$s = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

Vastaus $\qquad 4\sqrt{5}$

185



Ensimmäisen neliön sisään piirrtetyn ympyrän säde on $r_1 = \frac{32}{2} = 16$. Ympyrän sisään piirretyn neliön halkaisija on ympyrän halkaisija. Ratkaistaan toisen neliön sivun pituus.

$$a_2\sqrt{2} = 2r_1 = 32$$

$$a_2 = \frac{32}{\sqrt{2}}$$

Toisen ympyrän säde on

$$\frac{a_2}{2} = \frac{32}{2\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}}$$

Ympyröiden säteet muodostavat geometrisen jonon: $16, \frac{16}{\sqrt{2}}, \ldots$.

Suhdeluku $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ympyröiden pinta-alojen suhdeluku $q^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Ensimmäisen ympyrän pinta-ala $A_1 = \pi \cdot 16^2 = 256\pi$.

Alojen summa

$$S = \frac{A_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \qquad A_1 = 256\pi,\ q = \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{256\pi\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1023\pi}{2}$$

Vastaus $\frac{1023\pi}{2}$

186

r = 6400 km
d = 2·r = 2·6400 km = 12800 km

Maapallon radan pituus
$p = 2\pi \cdot 150 \cdot 10^6$ km

Lasketaan Maapallon halkaisijan suhde radan pituuteen

$$\frac{12800}{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}$$

Maapallo kiertää yhden täyden kierroksen Auringon ympäri 365 päivässä.

Maapallo kulkee halkaisijansa pituisen matkan

$$\frac{12800}{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 = 7{,}138\ldots$$ minuutissa.

Vastaus 7,1 minuutissa

187

28” = 28·2,54 cm = 71,12 cm = 0,7112 m
26” = 26·2,54 cm = 66,04 cm = 0,6604 m

Mittarin lukema 23,5 km = 23500 m

Pyörähdysten määrä:

$$\frac{23500}{0,7112} = 33042,744\ldots$$

Todellinen matka:
33042,744…·0,6604 m = 2181,4… m ≈ 21,8 km

Vastaus 21,8 km

188

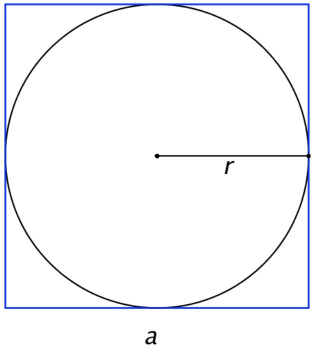
Kartalla: $d = 2,1$ cm
$r = 1,05$ cm
$A = \pi r^2 = \pi \cdot 1,05^2$ cm^2
Todellinen pinta-ala:

$A = \pi \cdot 1,05^2 \cdot 400000^2$ cm^2

$= \dfrac{\pi \cdot 1,05^2 \cdot 400000^2}{100000^2} = 55,417\ldots \approx 55,4$ (km^2)

Vastaus 55 km^2

189



Ympyrän säde on puolet neliön sivun pituudesta, $r = \dfrac{a}{2}$.

Neliön pinta-ala on $A_n = a^2$. Ympyrän pinta-ala on

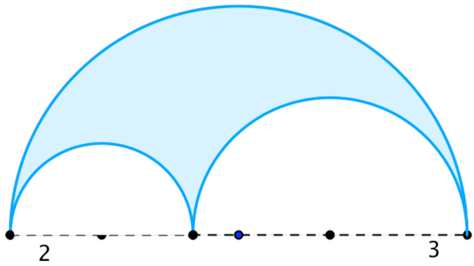
$$A_y = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Alojen suhde: $\dfrac{A_y}{A_n} = \dfrac{\frac{\pi a^2}{4}}{a^2} = \dfrac{\pi}{4} = 0{,}785\ldots$

Ympyrän pinta-ala on 79 % neliön pinta-alasta.

Vastaus 79 %

190



Ison puoliympyrän säde $R = 2 + 3 = 5$.
Varjostetun kuvion piiri $p = 5\pi + 2\pi + 3\pi = 10\pi$.

Ison puoliympyrän pinta-ala $A_1 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{2}\pi$.

Pienten puoliympyröiden pinta-alat ovat $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2^2 = 2\pi$ ja

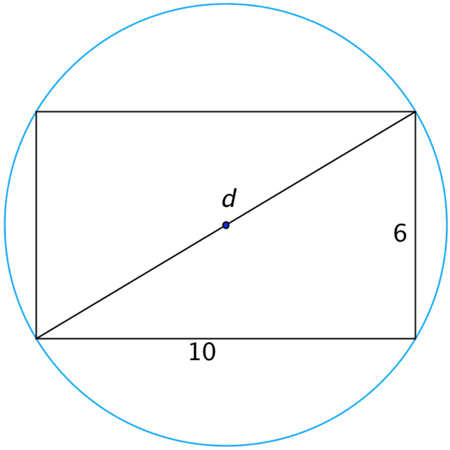
$A_3 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2}\pi$.

Varjostetun kuvion pinta-ala

$$A = A_1 - A_2 - A_3 = \frac{25}{2}\pi - 2\pi - \frac{9}{2}\pi = 6\pi.$$

Vastaus $p = 10\pi$ ja $A = 6\pi$

191



Suorakulmion lävistäjä d on ympyrän halkaisija. Ratkaistaan d Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = 10^2 + 6^2 = 136$$
$$d = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$$

Ympyrän säde $r = \frac{d}{2} = \sqrt{34}$.

Ympyrän pinta-ala $A_y = \pi r^2 = 34\pi$.

Suorakulmion pinta-ala $A_{sk} = 10 \cdot 6 = 60$.

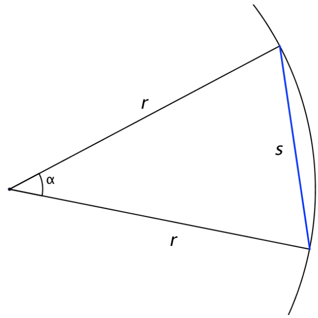
Ympyrän pinta-alasta on suorakulmion ulkopuolella
$A_y - A_{sk} = 34\pi - 60$.

Lasketaan suhde $\frac{34\pi - 60}{34\pi} = 0{,}438...$.

Ympyrän pinta-alasta on 44 % suorakulmion ulkopuolella,

Vastaus 44 %

192



a) 96-kulmion keskuskulma $\alpha = \dfrac{360°}{96} = 3{,}75°$

Pinta-ala $96 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin 3{,}75° = 48r^2 \sin 37{,}5°$

Ympyrän pinta-ala $A_y = \pi r^2$

Ratkaistaan luku π yhtälöstä $\pi r^2 = 48r^2 \sin 3{,}75°$.

$$\pi = \frac{48r^2 \sin 3{,}75°}{r^2} = 48 \cdot \sin 3{,}75° = 3{,}1393...$$

$\pi \approx 3{,}14$

b) Ratkaistaan 96-kulmion sivun pituus kosinilauseella,

$s^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos 3{,}75°$

$s = r\sqrt{2 - 2\cos 3{,}75°}$

96-kulmion piiri on $96s = 96r\sqrt{2 - 2\cos 3{,}75°}$.

Ympyrän piiri $p = 2\pi r$.

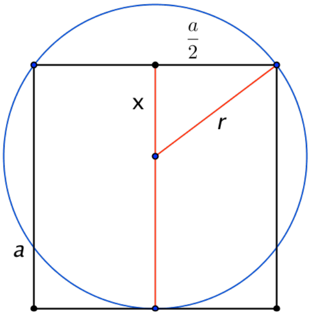
Ratkaistaan luku π yhtälöstä $2\pi r = 96r\sqrt{2 - 2\cos 3{,}75°}$

$$\pi = \frac{96r\sqrt{2 - 2\cos 3{,}75°}}{2r} = 48\sqrt{2 - 2\cos 3{,}75°} = 3{,}1410...$$

$\pi \approx 3{,}14$

Vastaus a) 3,13935 ≈ 3,14 b) 3,14103≈ 3,14

193



Ratkaistaan ympyrän säde r, käytetään kuvan merkintöjä.

$$x^2 = r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \qquad x > 0$$

$$x = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$r + x = a$ Sijoitetaan $x = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}$

$$r + \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = a$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = a - r$$

$$\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}^2 = (a-r)^2$$

$$r^2 - \frac{a^2}{4} = a^2 - 2ar + r^2$$

$$2ar = \frac{5a^2}{4}$$

$$r = \frac{5a}{8}$$

a) Ympyrän piiri $p_y = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{5a}{8} = \frac{5\pi}{4} a = 3{,}9269...a$

Neliön piiri $p_n = 4a$

Neliön piiri on pidempi.

$$\frac{p_n}{p_y} = \frac{4a}{3{,}9269...a} = 1{,}01859... \approx 1{,}019$$

Neliön piiri on 1,9 % suurempi.

b) Ympyrän pinta-ala $A_y = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{5a}{8}\right)^2 = \frac{25\pi}{64} a^2 = 1{,}2271...a^2$

Neliön pinta-ala $A_n = a^2$

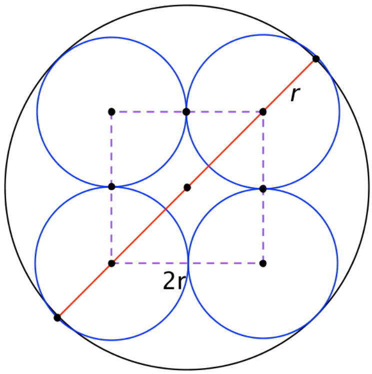
Ympyrän pinta-ala on suurempi.

$$\frac{A_y}{A_n} = \frac{1{,}227...a^2}{a^2} = 1{,}2271... \approx 1{,}227$$

Ympyrän pinta-ala on 22,7 % suurempi

Vastaus a) Neliön piiri on 1,9 % pidempi.
b) Ympyrän pinta-ala on 22,7 % suurempi

194



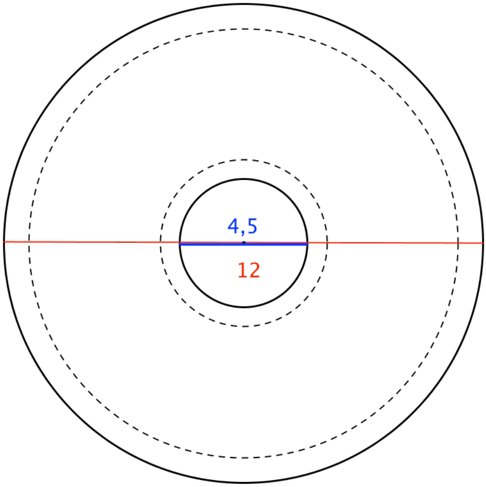
Olkoon piennen ympyrän säde r. Pienten ympyröiden keskipisteet muodostavat neliön, jonka sivun pituus on $2r$. Tämän neliön lävistäjän pituus on $2r\sqrt{2}$.

Ison ympyrän halkaisija on $2R = 2r + 2r\sqrt{2}$.
Ratkaistaan r.

$$r = \frac{2R}{2+2\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}}R$$

Vastaus $\frac{1}{1+\sqrt{2}}R$

195



a) Sisimmän paperikerroksen pituus $p_1 = \pi \cdot 4{,}5 = 4{,}5\pi$

Seuraavan paperikerroksen pituus

$p_2 = \pi \cdot (4{,}5 + 2 \cdot 0{,}01) = 4{,}52\pi$

Jokaisella kierroksella paperikerroksen halkaisija kasvaa kaksi kertaa paperin paksuuden verran ja siten kerroksen pituuus kasvaa $0{,}02\pi$ edelliseen kerrokseen verrattuna. Kahden peräkkäisen paperikerroksen pituuden erotus on siten vakio. Siis kyseessä on aritmeettinen jono: $p_1 = 4{,}5\pi$, $d = 0{,}02\pi$.

b) Ensimmäisen paperikerroksen pituus $p_1 = 4{,}5\pi$ ja viimeisen paperikerroksen pituus on $p_n = 12\pi$

Aritmeettisen jonon n. jäsen $p_n = p_1 + (n-1)d$. Ratkaistaan kerrosten lukumäärä n.

$p_1 + (n-1)d = 12\pi$ $\quad\quad$ $p_1 = 4{,}5\pi, d = 0{,}02\pi$

$$4{,}5\pi + (n-1)0{,}02\pi = 12\pi$$

$$n-1 = \frac{12\pi - 4{,}5\pi}{0{,}02\pi}$$

$$n = 375$$

Paperin pitus on aritmeettinen summa: $n = 375$, $p_1 = 4{,}5\pi$, $p_n = 12\pi$

$$S = 375 \cdot \frac{4{,}5\pi + 12\pi}{2} = 9719{,}3\ldots \text{ (cm)}$$

Vastaus a) Peräkkäisten kerrosten pituuksien erotus on vakio 0,02π cm
b) 97 m

196

Paperikerrosten pituudet muodostavat aritmeettisen jonon.
1. kerroksen pituus $p_1 = 13\pi$ (mm), n. kerroksen pituus
$p_n = 40\pi$ (mm)
Merkitään paperin paksuutta kirjaimella x. Paperikerroksen pituus kasvaa jokaisella kierroksella $d = 2\pi x$, tämä on paperikerrosten pituuksien muodostaman aritmeettisen jonon peräkkäisten termien erotusluku. Ratkaistaan x aritmeettisen jonon n. termin avulla

$$p_n = p_1 + (n-1)d$$

$$13\pi + (n-1)2\pi x = 40\pi$$

$$x = \frac{27}{2n}$$

Paperin pituus on paperikerrosten pituuksien muodostama aritmeettinen summa. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan n.
S = 19000 mm

$$S = n\frac{p_1 + p_n}{2}$$

$$n\frac{13\pi + 40\pi}{2} = 19000$$

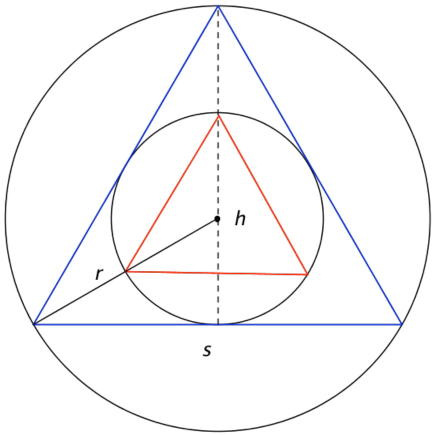
$$n = \frac{2 \cdot 19000}{53\pi}$$

Ratkaistaan x.

$$x = \frac{27}{\frac{38000}{53\pi}} = 0{,}059\ldots$$

Vastaus 0,059 mm

197



Olkoon uloimman ympyrän säde r_1 ja kolmion sivun pituus s_1.
Tasasivuisen kolmion korkeus

$$h = \frac{s_1\sqrt{3}}{2}$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on keskijanojen leikkauspiste, joka jakaa keskijanan suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Tasasivuisella kolmiolla keskijana on samalla kolmion korkeusjana.
Ilmaistaan ympyrän säde korkeusjanan avulla.

$$r_1 = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{s_1\sqrt{3}}{2} = \frac{s_1\sqrt{3}}{3}$$

Toisen ympyrän säde $r_2 = \frac{1}{3}h = \frac{s_1\sqrt{3}}{6}$. Ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoiset, yhdenmuotoisuussuhde $q = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{2}$.

Jatkamalla menettelyä saadaan jono ympyröitä, joiden säteiden pituudet muodostavat geometrisen jonon suhdelukuna $q = \frac{1}{2}$.
Vastaavasti ympyröiden pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jonka suhdeluku $q^2 = \frac{1}{4}$.
Ympyröiden alojen summa

$$S_y = \frac{\pi r_1^{\,2}(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{12})}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4\pi\left(\frac{s_1\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{4^{12}}\right)}{3} = 1{,}396\ldots s_1^{\,2}$$

Toisen kolmion sivun pituus s_2 saadaan ensimmäisen kolmion sivun pituudella yhtälöstä

$$r_2 = \frac{s_2\sqrt{3}}{3} \qquad r_2 = \frac{1}{3}h = \frac{s_1\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{s_2\sqrt{3}}{3} = \frac{s_1\sqrt{3}}{6}$$

$$s_2 = \frac{1}{2}s_1$$

Tasasivuiset kolmiot. Jatkamalla edellä olevaa menettelyä saadaan tasasivuisia kolmioita, joista aina seuraavan kolmion sivun pituus on puolet edellisen kolmion sivun pituudesta. Kolmioiden sivujen pituudet muodostavat geometrisen jonon, jossa suhdeluku $q = \frac{1}{2}$. Vastaavasti kolmioiden pinta-alojen muodostama jono on geometrinen, suhdeluku on $q^2 = \frac{1}{4}$.

Ensimmäisen kolmion pinta-ala on $\frac{s_1^{\ 2}\sqrt{3}}{4}$. Kolmioiden pinta-alojen summa on

$$S_k = \frac{s_1^{\ 2}\sqrt{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{11}\right)}{4\left(1-\frac{1}{4}\right)} = \frac{s_1^{\ 2}\sqrt{3}\left(1-\frac{1}{4^{11}}\right)}{3} = 0{,}5773\ldots s_1^{\ 2}$$

$$\frac{S_k}{S_y} = \frac{0{,}5773\ldots s_1^{\ 2}}{1{,}3962\ldots s_1^{\ 2}} \approx 0{,}41$$

Vastaus 41 %

198

a) Keskuskulma $\alpha = \frac{360°}{5} = 72°$

b) $b = \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot 5 = 2\pi$

c) $A = \frac{1}{5} \cdot \pi \cdot 5^2 = 5\pi$

Vastaus a) 72º b) 2π c) 5π

199

Kaaren pituus $b = \frac{80°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 12 = \frac{16}{3}\pi$

Piiri $p = \frac{16}{3}\pi + 2 \cdot 12 = 40{,}755...$

Pinta-ala $A = \frac{80°}{360°} \cdot \pi \cdot 12^2 = 100{,}53...$

Vastaus piiri p = 41 cm, pinta-ala A = 100 cm^2

200

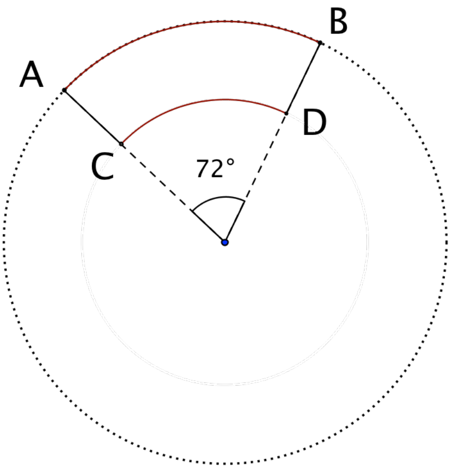
$A = 1$
Olkoon keskuskulma α

$$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi 1{,}5^2 = 1$$

$$\alpha = \frac{360°}{\pi 1{,}5^2} = 50{,}92\ldots°$$

Vastaus 51°

201

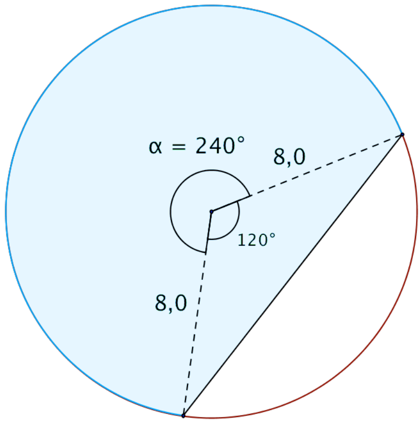


Kaarten väliin jäävä alue on kahden sektorin erotus.

$$A = \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot 12^2 - \frac{72}{360} \cdot \pi \cdot (12-5)^2 = 19\pi = 59{,}69\ldots$$

Vastaus $A = 60\ \text{cm}^2$

202



Segementti muodostuu sektorista, jonka keskuskulma on 240º ja tasakylkisestä kolmiosta, jonka huippukulma on 120º

Kolmion pinta-ala $A_k = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \sin 120° = 16\sqrt{3}$

Sektorin pinta-ala $A_s = \frac{240}{360} \cdot \pi \cdot 8^2 = \frac{128}{3}\pi$

Segmentin pinta-ala $A = A_k + A_s = 16\sqrt{3} + \frac{128}{3}\pi = 161{,}75...$

Vastaus 160 cm²

203

Kaaren pituus $b = \frac{100}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5{,}6 = \frac{28\pi}{9}$

Merkitään jänteen pituutta kirjaimella x. Ratkaistaan x kosinilauseella.

$$x^2 = 5{,}6^2 + 5{,}6^2 - 2 \cdot 5{,}6 \cdot 5{,}6 \cdot \cos 100°$$
$$x^2 = 62{,}72 - 62{,}72\cos 100°$$
$$x = \pm\sqrt{62{,}72 - 62{,}72\cos 100°} \qquad x > 0$$
$$x = \sqrt{62{,}72 - 62{,}72\cos 100°}$$

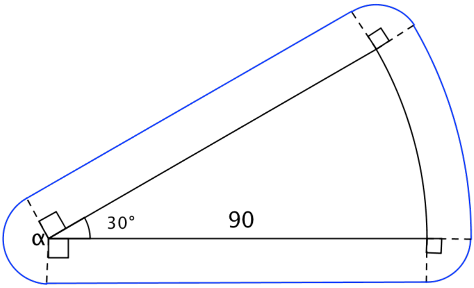
Piirin pituus $p = b + x = \frac{28\pi}{9} + \sqrt{62{,}72 - 62{,}72\cos 100°}$

$p = 18{,}35\ldots$

Pinta-ala $A = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot 5{,}6^2 - \frac{1}{2} \cdot 5{,}6^2 \sin 100° = 11{,}92\ldots$

Vastaus $p \approx 18$ cm $A \approx 12$ cm^2

204



Reitti koostuu kahdesta janasta joiden pituudet ovat 90,0 m, 30 asteen kaaresta, jonka säde on 91 m, kahdesta 90 asteen kaaresta, joiden säde on 1 m, ja kaaresta, jonka asteluku α = 360º - 2·90º - 30º = 150º ja säde 1 m.

Reitin pituus

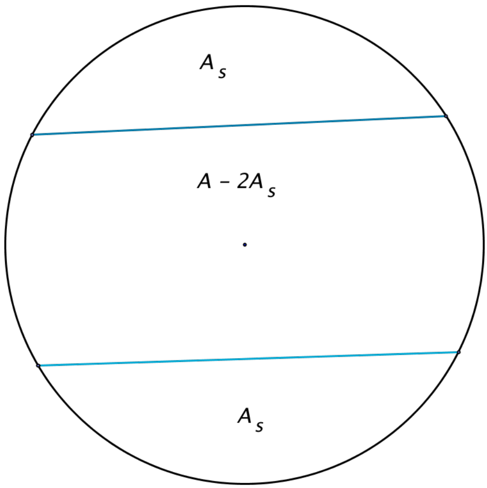
$$p = 2\cdot 90 + \frac{30}{360}\cdot 2\pi \cdot 91 + 2\cdot \frac{90}{360}\cdot 2\pi \cdot 1 + \frac{150}{360}\cdot 2\pi \cdot 1 = 233{,}407\ldots$$

Vastaus 233 m

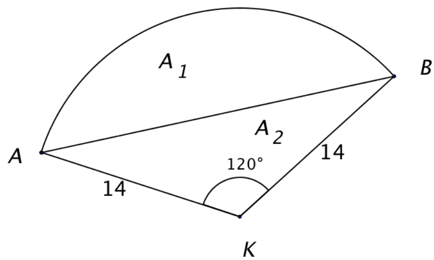
205

Pizza jakaantuu kahdeksi samanlaiseksi segmentiksi ja niiden väliin jääväksi alueeksi.

Merkitään segmentin alaa A_s ja ympyrän alaa A.



Koska viipaleissa on jokaisessa yhtä paljon reunaa, on yhden segmentin kaaren pituus kolmasosa kehän pituudesta, joten sitä vastaava keskuskulma on kolmasosa täysikulmasta eli 120°.



Ympyrän säde $r = \frac{28}{2}\text{ cm} = 14\text{ cm}$

Lasketaan sektorin pinta-ala A_1.

$$A_1 = \frac{120°}{360°} \cdot \pi \cdot 14^2 = \frac{196\pi}{3}$$

Lasketaan keskuskolmion pinta-ala A_2.

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \sin 120° = 49\sqrt{3} \qquad A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Segmentin pinta-ala on sektorin pinta-alan ja kolmion pinta-alan erotus. $A_s = A_1 - A_2 = \frac{196\pi}{3} - 49\sqrt{3} \approx 120$

Reunaviipaleen pinta-ala on 120 cm^2.

Lasketaan vielä keskimmäisen viipaleen pinta-ala.

Koko ympyrän ala $A = \pi \cdot 14^2 = 196\pi$

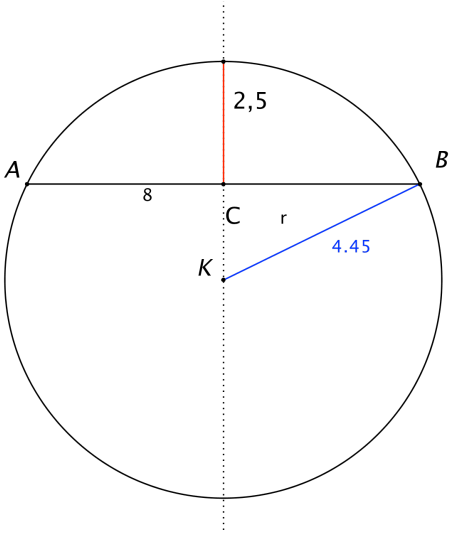
Vähennetään ympyrän pinta-alasta segmenttien pinta-alat.

$$A - 2A_s = 196\pi - 2\left(\frac{196\pi}{3} - 49\sqrt{3}\right) = 374{,}991\ldots$$

Keskimmäisen viipaleen pinta-ala on 370 cm^2.

Vastaus Viipaleiden pinta-alat ovat 120 cm^2, 370 cm^2 ja 120 cm^2

206



1. Piirrä jana, jonka pituus on 8.
2. Määritä tämän jänteen keskipiste.
3. Piirrä jänteelle keskinormaali apuviivaksi.
4. Piirrä jana, jonka pituus on 2,5. Jos tämä ei ole kohtisuorassa jännettä vastaan, niin käännä se kulkemaan pitkin jänteen keskinormaalia.
4. Piirrä kolmen pisteen kautta kulkeva ympyrä jänteen päätepisteiden ja janan päätepisteen kautta,
5. Määritä ympyrän keskipiste.
6. Piirrä ympyrälle säde esimerkiksi jänteen toiseen päätepisteeseen ja mittaa säteen pituus.

Jos ympyrän säde on *r*, sen pituus voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = \left(r - 2{,}5\right)^2 + 4^2$$

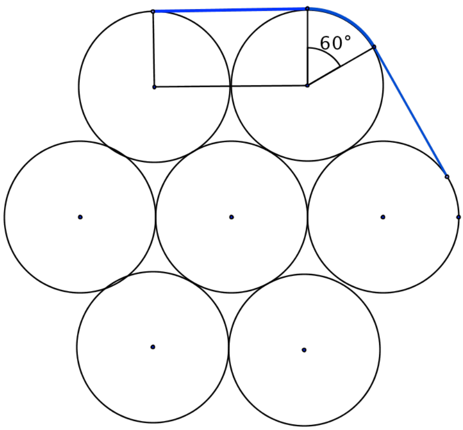
$$r^2 = r^2 - 5r + 6{,}25 + 16$$

$$5r = 22{,}25$$

$$r = \frac{22{,}25}{5} = 4{,}45 \approx 4{,}5$$

Vastaus 4,5 cm

207

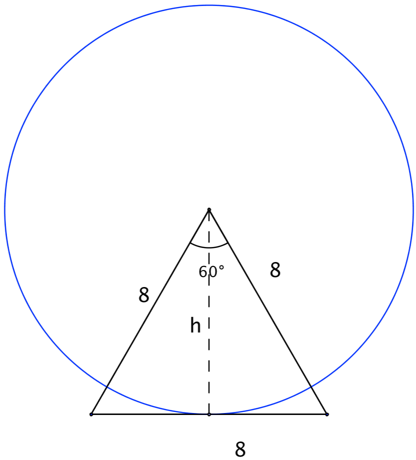


Vaijerin pituus muodostuu suorista osista, joiden pituus on kaksi kertaa tukin säde eli on yhtä suuri kuin tukin halkaisija. Vaijeri kiertää kaikkiaan täyden kierroksen ympäri eli jokaisen tukin kohdalle tulee 60 asteen kaari, jonka säde on tukin säde.

Vaijerin pituus on siten
$6 \cdot 20 + \pi \cdot 20 = 182{,}831\ldots$ (cm)

Vastaus 183 cm

208



Tasasivuisen kolmion korkeus on $h=\frac{8\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$ ja ala

$$A_k=\frac{8^2\sqrt{3}}{4}=16\sqrt{3}$$

.

Piirretyn ympyrän säde $r = h$. Kolmion sisälle jää ympyrän sektori, jonka keskuskulma on 60º.

Sektorin $A_s=\frac{60°}{360°}\cdot\pi\left(4\sqrt{3}\right)^2=8\pi$.

Kolmiosta ympyrän ulkopuolelle jäävä osuus on

$$\frac{A_k-A_s}{A_k}=\frac{16\sqrt{3}-8\pi}{16\sqrt{3}}=1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}=0{,}09310\ldots$$

Vastaus 9,3 %

209

Kaaren pituus $b=\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi r$, missä r on ympyrän säde ja α on keskuskulma.

Sektorin piirin pituus $p_s=\frac{\alpha}{360}\cdot 2\pi r+2r$ ja ympyrän kehän pituus $p_y=2\pi r$. Merkitään nämä yhtä suuriksi ja ratkaistaan kulma α.

$$\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi r+2r=2\pi r \quad |:2r$$

$$\frac{\alpha}{360°}\cdot \pi+1=\pi$$

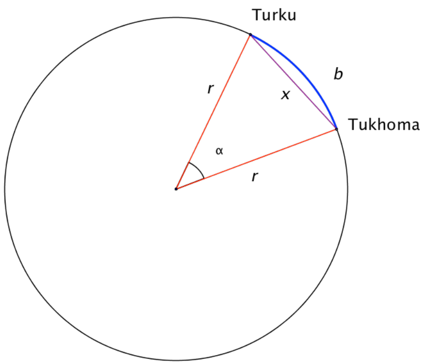
$$\frac{\alpha}{360°}\cdot \pi=\pi-1 \quad |\cdot\frac{360°}{\pi}$$

$$\alpha=\frac{(\pi-1)360°}{\pi}$$

$$\alpha=245{,}40\ldots$$

Vastaus 245°

210



Turun ja Tukholman välisen paaren pituus b =265 (km)
Ratkaistaan kaaren asteluku.

$$\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi \cdot 6370 = 265$$

$$\alpha = 265 \cdot \frac{360°}{2\cdot\pi\cdot 6370} = 2{,}383...°$$

Ratkaistaan suora etäisyys x kosinilauseella.

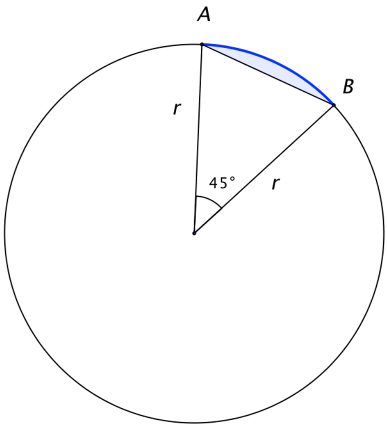
$$x^2 = 6370^2 + 6370^2 - 2\cdot 6370 \cdot 6370 \cdot \cos\alpha = 70214{,}872...$$

$$x = \pm\sqrt{70214{,}872...} \quad | x > 0$$

$$x = 264{,}980...$$

Vastaus 264,980 km ≈ 265 km

211



Ympyrän kehä jakautuu kahteen kaareen joiden asteluvut ovat
$\frac{1}{8}\cdot 360° = 45°$ ja $\frac{7}{8}\cdot 360° = 315°$.
Pienen segnentin ala saadaa, kun 45º sektrin alasta vähennetään tasasivuisen kolmion, jonka huippukulma on 45º.

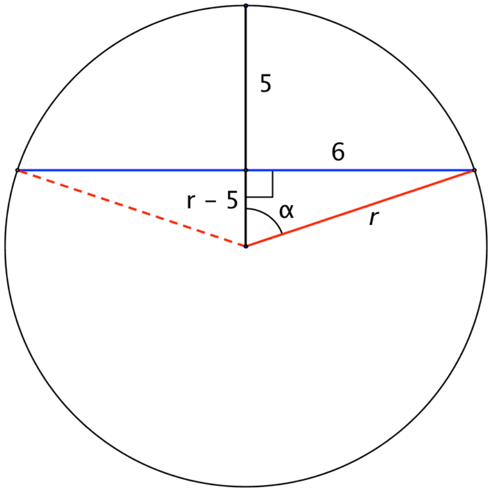
$$A_1 = \frac{45°}{360°}\cdot \pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 \sin 45° = \frac{\pi r^2}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}r^2 = \frac{\left(\pi - 2\sqrt{2}\right)r^2}{8}$$

Lasketaan pienen segmentin ja ympyrän alojen suhde.

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\frac{\left(\pi - 2\sqrt{2}\right)r^2}{8}}{\pi r^2} = \frac{\pi - 2\sqrt{2}}{8\pi} = 0{,}01246\ldots$$

Vastaus 1,2 %

212



Jännettä vastaan kohtisuoraan piirretty säde puolittaa säteen.
Ratkaistaan säde Pythagoraan lauseella.

$$r^2 = (r-5)^2 + 6^2$$

$$r^2 = r^2 - 10r + 25 + 36$$

$$10r = 61$$

$$r = 6{,}1$$

Kaaren asteluku on 2α.

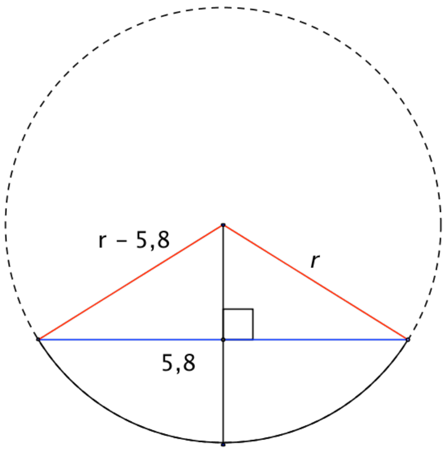
$$\sin\alpha = \frac{6}{6{,}1}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{6}{6{,}1}\right) = 79{,}611...^\circ$$

$$2\alpha = 159{,}22..^\circ$$

Vastaus Säde 6,1 cm, kaaren asteluku 159°

213



Kuopan reunan säde on $\dfrac{18,6}{2} = 9,3$

Pallon keskipisteen etäisyys kuopan pinnasta on $r - 5,8$, missä r on pallon säde.

$$r^2 = (r - 5,8)^2 + 9,3^2$$

$$r^2 = r^2 - 11.6r + 33,64 + 86,49$$

$$11,6r = 120,13$$

$$r = \frac{120,13}{11,6} = 10,536...$$

$$d = 2r = 20,712...$$

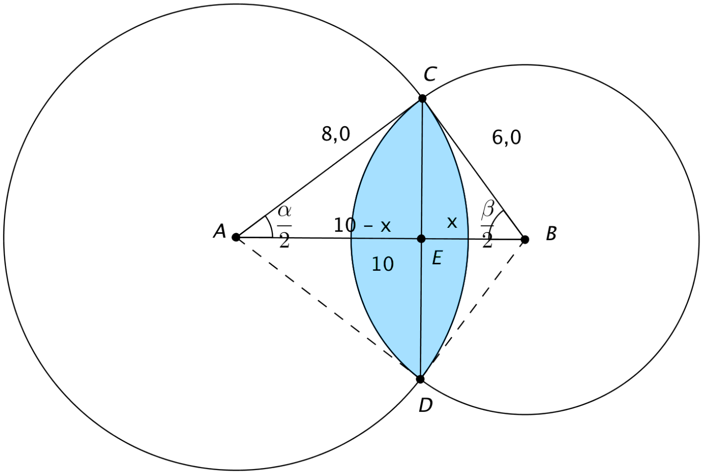
Vastaus 20,7 cm

214

Sektorin pinta-alan kaava $A=\frac{\alpha}{360°}\cdot\pi r^2$ voidaan kirjoittaa muotoon $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi r\cdot r$. Sijoitetaan tähän kaaren pituuden lauseke $b=\frac{\alpha}{360°}\cdot 2\pi r$, jolloin saadaan sektorin pinta-alaksi $A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot r$.

Siis sektorin pinta-ala on $A=\frac{br}{2}$.□

215



Yhteinen alue muodostuu kahdesta ympyräsegmentistä. Ympyröiden yhteinen jänne *CD* on kohtisuorassa keskipisteiden yhdysjanaa *AB* vastaan.

Merkitään kirjaimella *x* janan *EB* pituutta. Jana *CE* on molemmille ympyröille yhteinen.

Ratkaistaa *CE* Pythagoraan lauseella kolmioista *AEC* ja *EBC*.
$CE^2 = 8^2 - (10 - x)^2$ ja $CE^2 = 6^2 - x^2$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan *x*.

$64-(100-20x+x^2)=36-x^2$

$64-100+20x-x^2=36-x^2$

$20x=72$

$x=\dfrac{18}{5}$

$10-x=\dfrac{32}{5}$

Ratkaistaan keskuskulma α.

$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{32}{5}}{8}=\dfrac{4}{5}$

$\dfrac{\alpha}{2}=36{,}86...^\circ$

$\alpha=73{,}739...^\circ$

Ratkaistaan keskuskulma β.

$\cos\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\frac{18}{5}}{6}=\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{\beta}{2}=53{,}13...^\circ$

$\beta=106{,}260...^\circ$

Segmenttien pinta-alat:

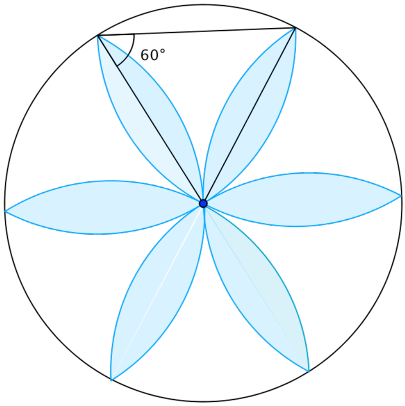
$$A_1=\frac{73{,}739...^\circ}{360}\cdot\pi\cdot 8^2-\frac{1}{2}\cdot 8^2\cdot\sin 73{,}739...^\circ=10{,}464...$$

$$A_2=\frac{106{,}260...^\circ}{360}\cdot\pi\cdot 6^2-\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin 106{,}260...^\circ=16{,}102...$$

Kysytty pinta-ala $A=A_1+A_2=26{,}56...$

Vastaus 26,6 cm^2

216



Terälehti muodostuu kahdesta 60° kaarta vastaavasta segmentistä. Olkoon ympyrän säde *r*.

Sementin pinta-ala:

$$A_s = \frac{60}{360} \cdot r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin 60° = r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

Yhden terälehden pinta-ala on $2A_s$. Kukka koostuu kuudesta terälehdestä, kukan pinta-ala on

$$12A_s = 12r^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = r^2 \left(2\pi - 3\sqrt{3} \right).$$

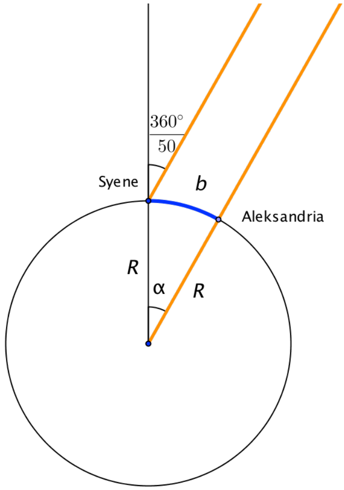
Ympyrän pinta-ala on $A_y = \pi r^2$.

Lasketaan suhde.

$$\frac{A_s}{A_y} = \frac{r^2 \left(2\pi - 3\sqrt{3} \right)}{\pi r^2} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{\pi} = 0{,}346...$$

Vastaus 35 %

217

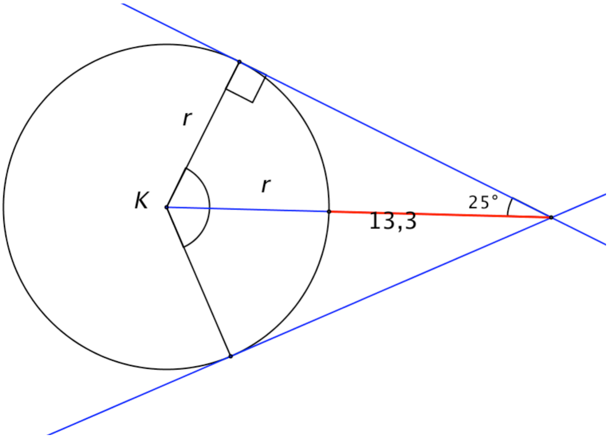


Auringonsäteet ovat yhdensuuntaiset. Koska auringonsäteiden ja pystysuoran välinen kulma Syenessä on $\frac{360°}{50}=7{,}2°$, on Aleksandrian ja Syenen välisen kaarta vastaava keskuskulma 7,2°. Kaaren pituus on 5000 stadionia, tämä on $\frac{1}{50}$ maapallon ympärysmitasta. Merkitään maapallon ympärysmittaa kirjaimella p ja ratkaistaan se kaaren pituuden avulla.

$\frac{1}{50}p=5000$
$p=50\cdot 5000=25000$
Maapallon ympärysmitta on 250 000 stadionia,
1 stadion = 0,157 km.
$p=250000\cdot 0{,}157$ km = 39 250 km

Vastaus 39 300 km

218



Ympyrän keskipisteestä tangenttien leikkauspisteeseen piirretty jana puolittaa tangenttien välisen kulman, $\frac{50°}{2} = 25°$.

$$\frac{r}{r+13{,}3} = \sin 25°$$

$$r = \sin 25°(r+13{,}3)$$

$$r = \sin 25° r + 13{,}3 \sin 25°$$

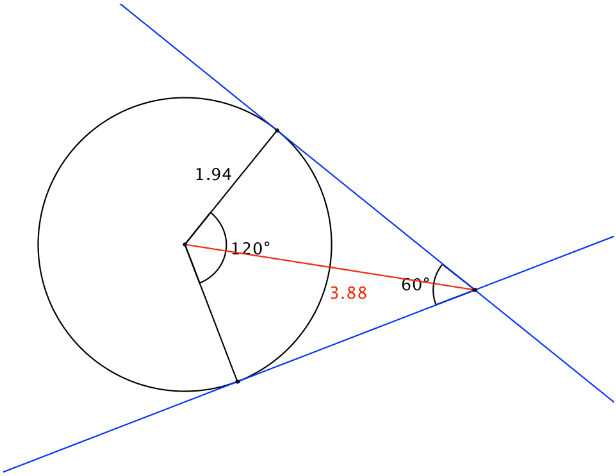
$$(1-\sin 25°)r = 13{,}3 \sin 25°$$

$$r = \frac{13{,}3 \sin 25°}{1-\sin 25°} = 9{,}730...$$

Vastaus 9,7 cm

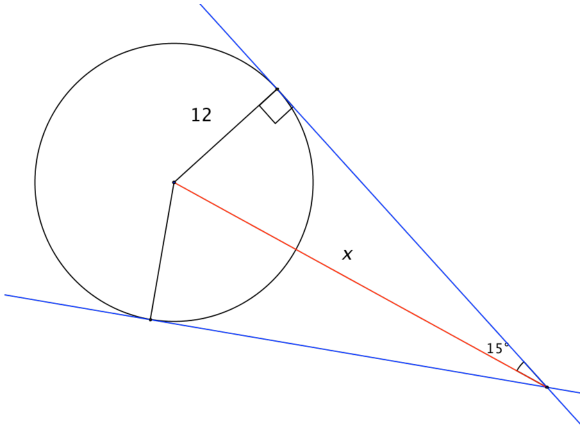
219

Kuva on esimerkiksi seuraavanlainen.



1. Piirrä ympyrä, merkitse piste ympyrän kehälle ja piirrä tämän pisteen kautta kulkeva tangentti. Piirrä myös säde sivuamispisteeseen.
2. Toisen tangentin piirtäminen onnistuu, kun määrität tangenttien välistä 60 asteen kulmaa vastaavan keskuskulman 120º. Piirrä toinen tangentti.
3. Mittaa mittatyökalulla säteen pituus ja tangenttien leikkauspisteen etäisyys ympyrän keskipisteestä.
4. Laske suhde. Tulokseksi pitäisi tulla 1 : 2.

220



Ympyrän keskipisteestä tangenttien leikkauspisteeseen piirretty jana puolittaa tangenttien välisen kulman, $\frac{30°}{2} = 15°$

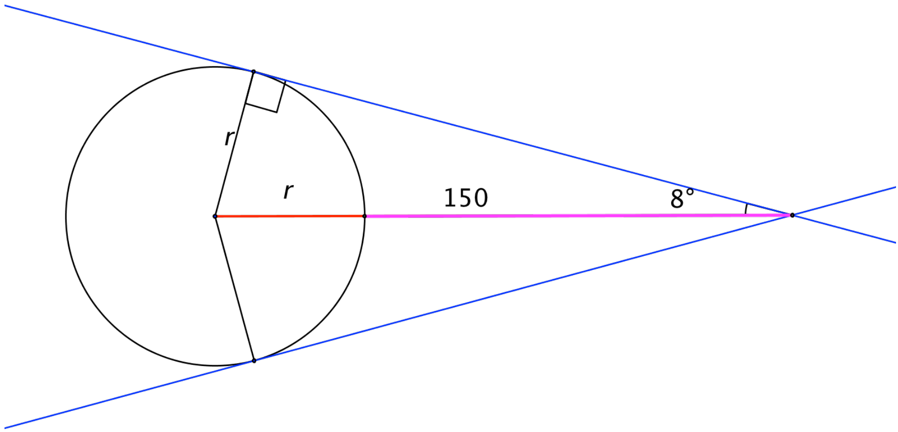
Ratkaistaan *x* suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\frac{12}{x} = \sin 15°$$

$$x = \frac{12}{\sin 15°} = 46{,}36...$$

Vastaus 46 cm

221



Rakennuksen pohjan keskipisteestä katselupisteeseen piirretty jana puolittaa katselukulman, $\frac{16°}{2} = 8°$.

Ratkaistaan rakennuksen pohjan säde suorakulmaisesta kolmiosta.

$$\frac{r}{r+150} = \sin 8°$$

$$r = (r+150)\sin 8°$$

$$r = \sin 8° \cdot r + 150\sin 8°$$

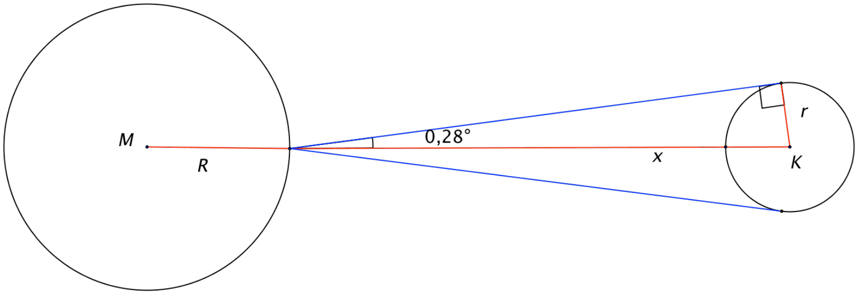
$$(1-\sin 8°)r = 150\sin 8°$$

$$r = \frac{150\sin 8°}{1-\sin 8°} = 24{,}251\ldots$$

halkaisija $d = 2r = 2\cdot 24{,}251\ldots = 48{,}502\ldots$

Vastaus 49 m

222



$R = 6370$ km, $r = 1737$ km

Maan pinnan katselupisteestä Kuun keskipisteeseen piirretty jana puolittaa katselukulman, $\frac{0{,}56°}{2} = 0{,}28°$.

Merkitään Maan pinnan katselupisteen ja Kuun keskipisteen välistä etäisyyttä kirjaimella x.

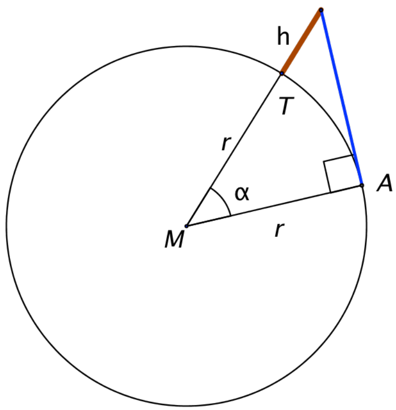
$$\frac{1737}{x} = \sin 0{,}28°$$

$$x = \frac{1737}{\sin 0{,}28°} = 355439{,}87\ldots$$

Maan ja Kuun keskipisteiden välinen etäisyys on
$x + R = 6370 + 355439{,}87\ldots = 361809{,}87\ldots$

Vastaus 361800 km

223



r = 6370 km, h = 3,718 km

Kaaren *TA* pituus on Teiden etäisyys Afrikasta Maapallon pintaa pitkin mitattuna.

Määritetään kulman α suuruus trigonometrisesti.

$$\cos\alpha = \frac{r}{r+h} = \frac{6370}{6373{,}718}$$

$$\alpha = 1{,}957\ldots°$$

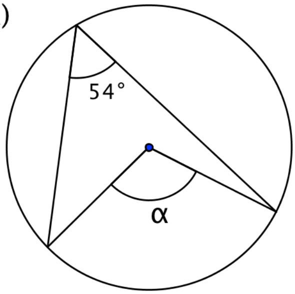
Lasketaan kaaren *TA* pituus.

$$TA = \frac{1{,}957\ldots°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 6370 = 217{,}58\ldots$$

Vastaus 218 km

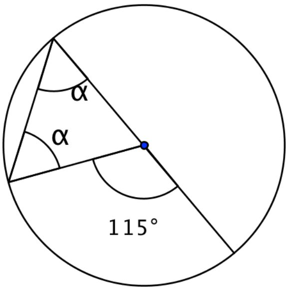
224

a)



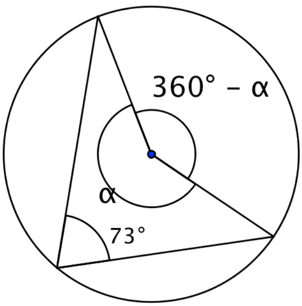
$\alpha = 2 \cdot 54° = 108°$

b)



$\alpha = 115° : 2 = 57{,}5°$

c)

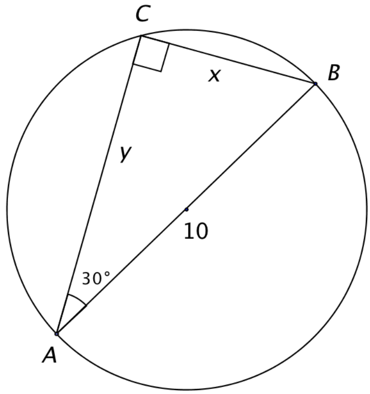


$360° - \alpha = 2 \cdot 73°$

$\alpha = 360° - 2 \cdot 73° = 214$

Vastaus a) 108º b) 57,5º c) 214º

225



Kolmio on suorakulmainen, koska kulma C on puoliympyrää vastaava kehäkulma. Kolmion hypotenuusa on ympyrän halkaisija $2r = 2 \cdot 5 = 10$.
Ratkaistaan kateetit x ja y trigonometrisesti.

$$\frac{x}{10} = \sin 30^\circ$$

$$x = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5$$

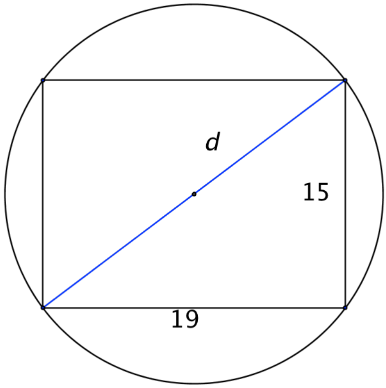
$$\frac{y}{10} = \cos 30^\circ$$

$$y = 10 \cdot \cos 30^\circ = 5\sqrt{3}$$

Kolmion pinta-ala $A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2} = 21{,}650\ldots$

Vastaus 22 cm^2

226



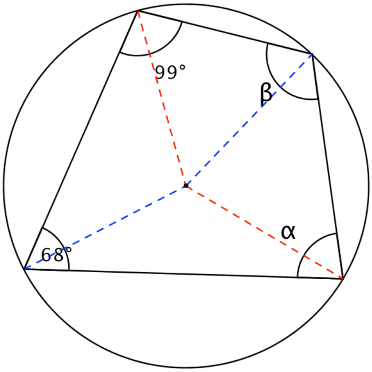
Suorakulmion lävistäjä on puukiekon halkaisija. Ratkaistaan lävistäjä Pythagoraan lauseella.

$$d^2 = 19^2 + 15^2$$
$$d^2 = 586$$
$$d = \pm\sqrt{586} \qquad | d > 0$$
$$d = 24{,}207...$$

Puukiekon säde on $\dfrac{d}{2} = 12{,}103....$

Vastaus 12,1 cm

227



Kulmaa α vastaava keskuskulma on $360° - 2 \cdot 99° = 162°$.

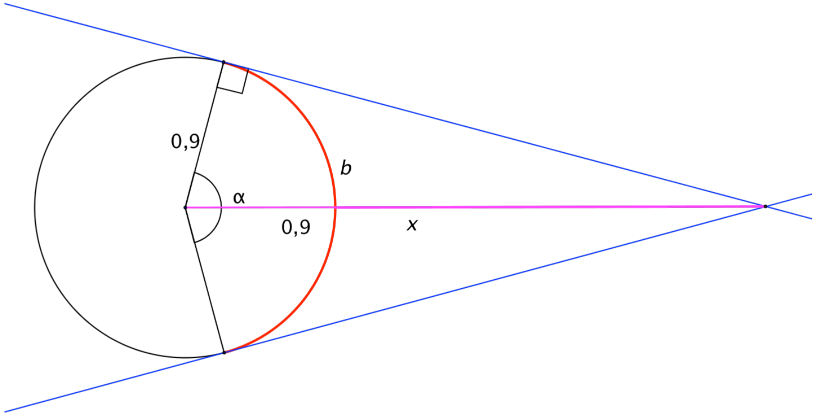
$$\alpha = \frac{162°}{2} = 81°$$

Kulmaa β vastaava keskuskulma on $360° - 2 \cdot 68° = 224°$.

$$\beta = \frac{224°}{2} = 112°$$

Vastaus α = 81° ja β = 112

228



Mainostelineen säde $r = \dfrac{1,8}{2} = 0,9$

Julisteen leveyttä vastaava kaaren pituus $b = 2,6$.
Ratkaistaan kulma α.

$$2,6 = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 0,9$$

$$\alpha = \frac{2,6 \cdot 360°}{2\pi \cdot 0,9} = 165,52...°$$

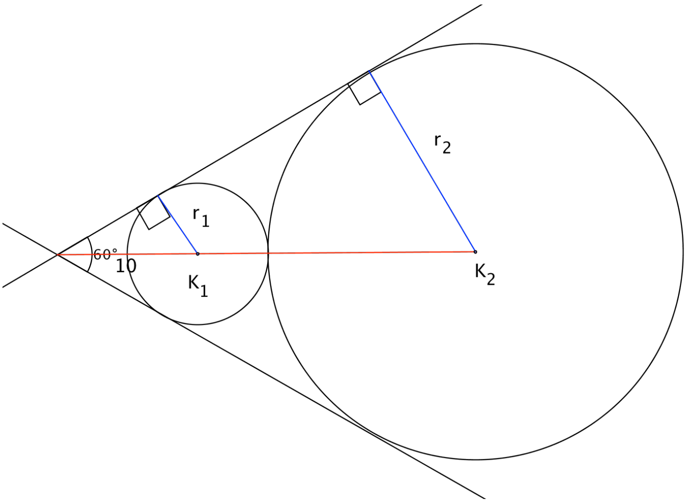
Olkoon x pienin etäisyys, mistä mainoksen voi nähdä kokonaan.

$$\frac{0,9}{0,9 + x} = \cos\frac{165,52...°}{2}$$

$$x = \frac{0,9 - 0,9\cos\frac{165,52...°}{2}}{\cos\frac{165,52...°}{2}} = 6,2... > 4$$

Vastaus Ei voi

229



Ympyröiden keskipisteiden ja tangenttien leikkauspisteen kautta kulkeva suora puolittaa tangenttien välisen kulman, $\frac{60°}{2} = 30°$.

$\frac{r_1}{10} = \sin 30°$

$r_1 = 5$

Muodostuneet suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

$\frac{r_2}{r_1} = \frac{10 + r_1 + r_2}{10}$

$\frac{r_2}{5} = \frac{15 + r_2}{10}$

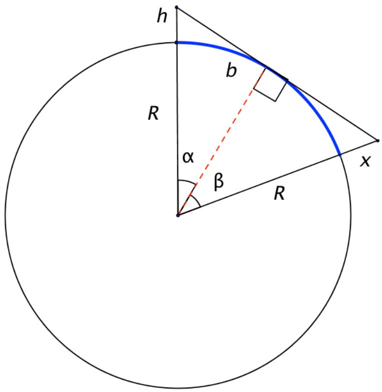
$10r_2 = 75 + 5r_2$

$5r_2 = 75$

$r_2 = 15$

Vastaus 5 ja 15

230



$p = 2\pi R = 40\ 000$ (km)
$h = 190$ (m) $= 0{,}19$ (km)
$b = 110$ (km)

$$R = \frac{40000}{2\pi}$$

$$\cos\alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi} + 0{,}19}$$

$$\alpha = 0{,}44265...^\circ$$

$$\frac{\alpha+\beta}{360^\circ} \cdot 40000 = 110$$

$$\beta = \frac{110 \cdot 360^\circ}{40000} - 0{,}4465...^\circ = 0{,}547...^\circ$$

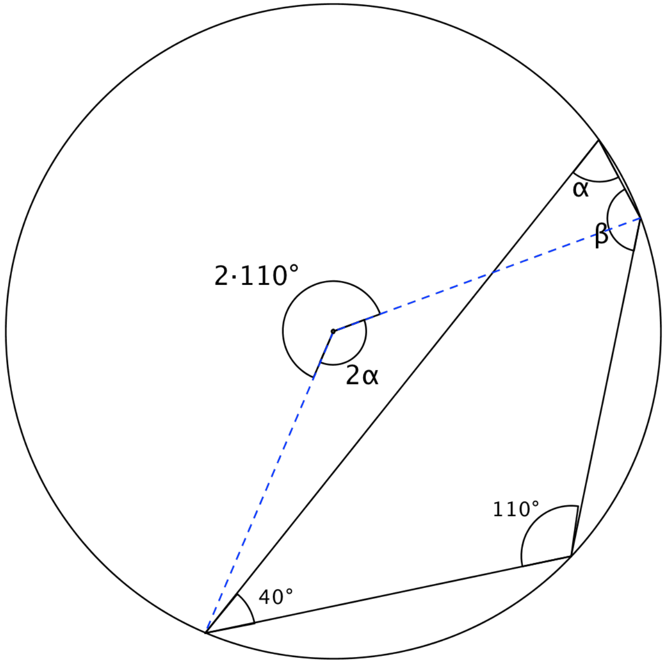
$$\frac{R}{R+x} = \cos\beta$$

$$\frac{\frac{40000}{2\pi}}{\frac{40000}{2\pi}+x} = \cos 0{,}547\ldots^\circ$$

$$x = 0{,}2908\ldots.$$

Vastaus 290 m

231



Kulmaa α vastaavan keskuskulman ja 110 asteen kehäkulmaa vastaavan keskuskulman summa on 360º.

$2\alpha + 220° = 360°$

$2\alpha = 140°$

$\alpha = 70°$

Vastaavasti saadaan kulmalle β yhtälö:

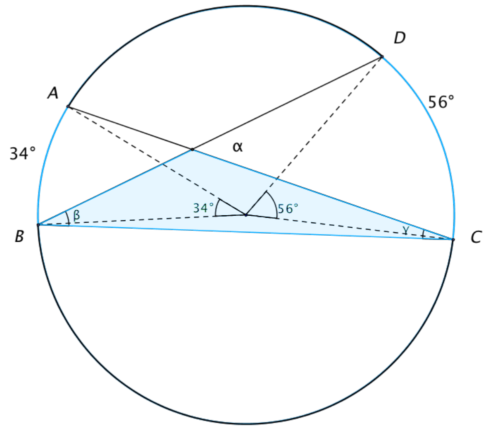
$2\beta + 2 \cdot 40° = 360°$

$\beta = 140°$

Vastaus 70º ja 140º

232

a)



Kulma ß on 56 asteen keskuskulmaa vastaava kehäkulma.

$$\beta = \frac{56°}{2} = 28°$$

Vastaavasti $\gamma = \frac{34°}{2} = 17°$.

Kolmion kulmien summan avulla voidaan ratkaista kulma δ.

$$\beta + \gamma + \delta = 180°$$

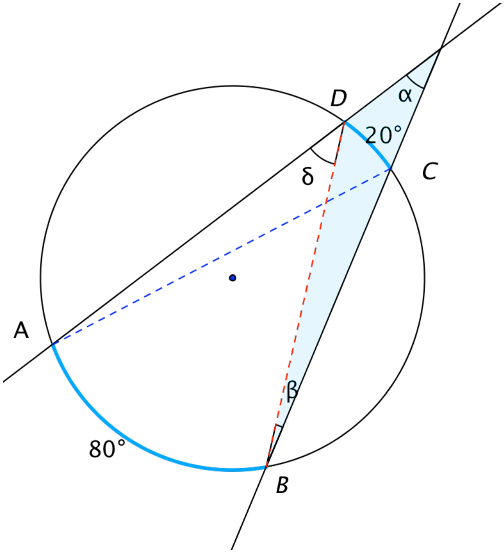
$$28° + 17° + \delta = 180°$$

$$\delta = 135°$$

Kulma α on kulman δ vieruskulma.

$$\alpha = 180° - 135° = 45°$$

b)



Kulma β on 20 asteen keskuskulmaa vastaava kehäkulma.

$$\beta = \frac{20°}{2} = 10°$$

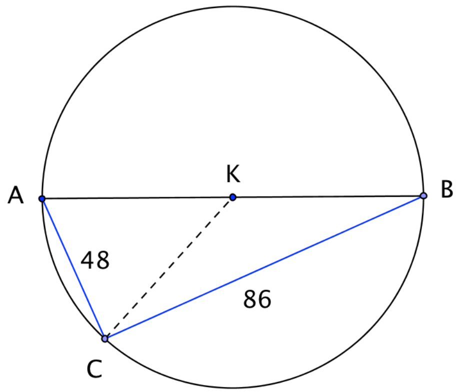
Vastaavasti $\delta = \frac{80°}{2} = 40°$.

Kulman δ vieruskulma on 180° - 40° = 140°.

α = 180° - 10° - 140° = 30°

Vastaus a) 45° b) 30°

233



Merkitään kalastajan istuinpaikkaa kirjaimella *C*, saaren päätepisteitä kirjaimilla *A* ja *B* sekä saaren keskellä olevaa kiveä kirjaimella *K*.
Koska kiven etäisyydet saaren päistä ja kalastajasta ovat yhtäsuuret, pisteet *A*, *B* ja *C* ovat *K*-keskisen ympyrän kehällä. Jana *AB* on ympyrän halkaisija, kulma *C* on puoliympyrän sisältämä kehäkulma, joten kulma *C* on suora kulma.

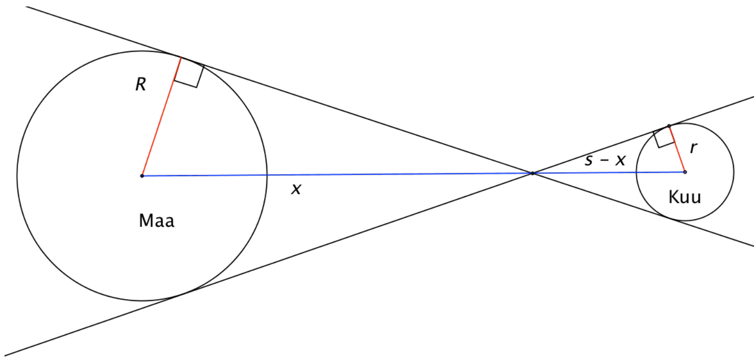
a) Kalastaja näkee saaren 90° kulmassa.

b) *AB* on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa

$AB = \sqrt{48^2 + 8} = 10\sqrt{97} = 98{,}4885...$

Vastaus a) 90° b) 98 m

234



$R = 6370$ (km), $r = 1737$ (km)
$s = 384\ 000$ (km)
Olkoon x avaruusaluksen etäisyys Maan keskipisteestä.
Ratkaistaan x yhdenmuotoisista suorakulmaisista kolmioista.

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{s-x} \quad \Big| \text{kerrotaan ristiin}$$

$$Rs - Rx = rx$$

$$(r+R)x = Rs$$

$$x = \frac{Rs}{r+R}$$

$$x = \frac{6370 \cdot 384000}{6370 + 1737}$$

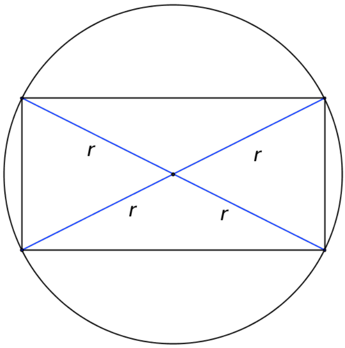
$$x = 301724{,}43\ldots$$

Avaruusaluksen etäisyys Maan pinnalta on
$x - R = 301724{,}43\ldots - 6370 = 295354{,}4\ldots$ (km)

Vastaus 295 000 km

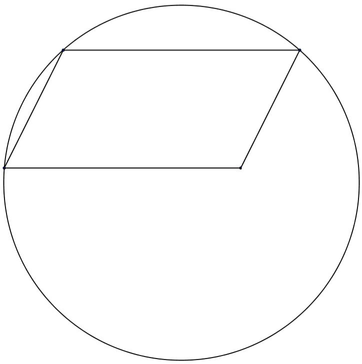
235

a)



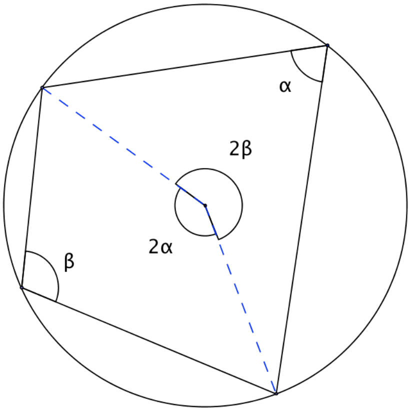
Suorakulmion lävistäjät ovat yhtä pitkät ja puolittavat toisensa. Lävistäjien leikkauspisteen etäisyys on yhtä suuri jokaisesta kärjestä. Suorakulmion lävistäjien leikkauspiste on ympäri piirretyn ympyrän keskipiste ja ympyrän säde on puolet lävistäjän pituudesta.

b)



Ympyrää ei voida piirtää, koska suunnikkaan keskipisteen etäisyys jokaisesta kärkipisteestä ei ole yhtäsuuri.

c)



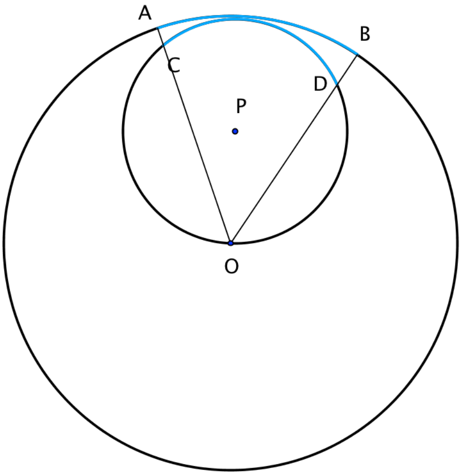
$2\alpha + 2\beta = 360°$

$\alpha + \beta = 180°$

Vastakkaiset kulmat ovat suplementtikulmia.

Vastaus a) Voidaan b) Ei voida
c) Vastakkaiset kulmat ovat suplementtikulmia.

236



Olkoon O-keskisen ympyrän säde r. Tällöin P-keskisen ympyrän säde on $\frac{1}{2}r$.

Olkoon kaarta AB vastaava keskuskulma α.

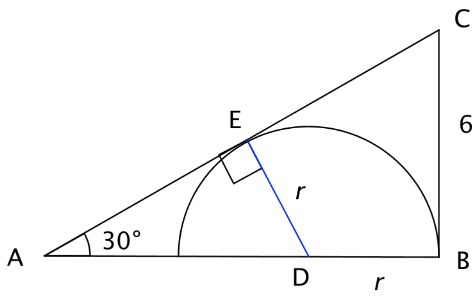
Kaaren AB pituus on $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$.

Kulma α on kaarta CD vastaava kehäkulma, kaaren CD asteluku on 2α.

Kaaren CD pituus on $\frac{2\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot \frac{r}{2} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$.

Siis kaaret AB ja CD ovat yhtä pitkät.□

237



$$\frac{r}{AD} = \sin 30°$$

$$AD = 2r$$

$$AB = 2r + r = 3r$$

$$\frac{6}{3r} = \tan 30°$$

$$3r = \frac{6}{\tan 30}$$

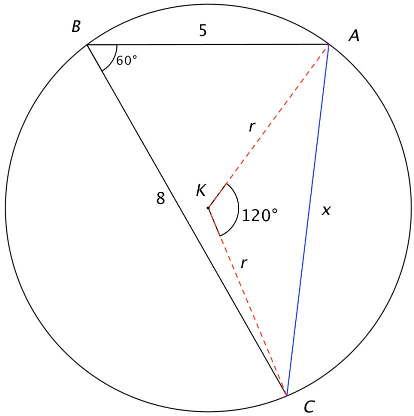
$$3r = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

Puoliympyrän ala $A = \frac{1}{2} \cdot \pi \left(\frac{6}{\sqrt{3}} \right)^2 = 6\pi$

Vastaus 6π

238



Lasketaan jänteen AC pituus kosinilauseella.

$$x^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60°$$

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm\sqrt{49} \qquad |\, x > 0$$

$$x = 7$$

Kaarta AC vastaava keskuskulma on 120º. Ratkaistaan ympyrän säde kosinilauseella.

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 120°$$

$$49 = 3r^2$$

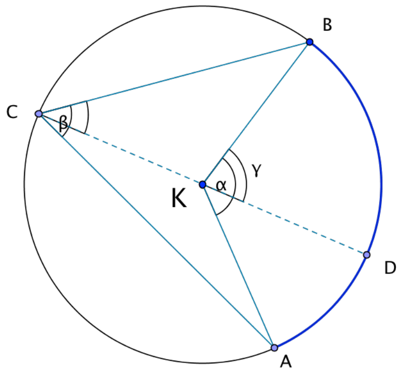
$$r = \pm\sqrt{\frac{49}{3}} \qquad r > 0$$

$$r = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

Vastaus $\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$

239

Tapaus1. Ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeamassa



Kehäkulman *DCB* toinen kylki on ympyrän halkaisija.
Merkitään keskuskulmaa *DKB* kirjaimella γ.

$\sphericalangle DCB = \frac{\gamma}{2}$

$\sphericalangle ACB = \frac{\alpha - \gamma}{2}$

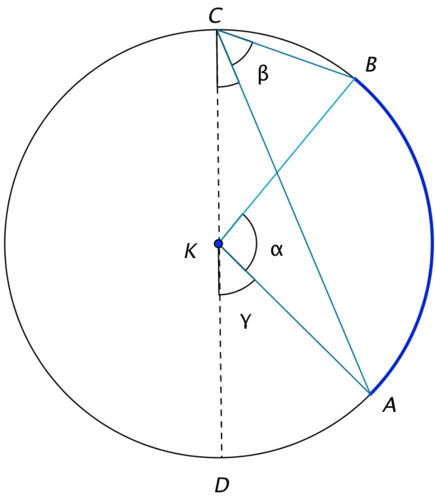
Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet vastaavasta keskuskulmasta.

Määritetään kehäkulman *ACB* suuruus kulmien α ja γ avulla.

$$\beta = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha - \gamma}{2}$$
$$= \frac{\alpha}{2}$$

Siis kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta myös, kun ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeamassa.

Tapaus 2. Ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeaman ulkopuolella.



Kehäkulmien *DCA* ja *DCB* toinen kylki on ympyrän halkaisija. Merkitään keskuskulmaa *DKA* kirjaimella γ.

$$\sphericalangle DCA = \frac{\gamma}{2}$$

$$\sphericalangle DCB = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

vastaavasta

Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän halkaisija, on puolet keskuskulmasta.

Määritetään kehäkulman *ACB* suuruus kulmien α ja γ avulla.

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{\alpha}{2}$$

Siis kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta myös, kun ympyrän keskipiste on kehäkulman aukeaman ulkopuolella.

On osoitettu, että kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta myös, kun kehäkulman kylki ei ole ympyrän halkaisija.□