**47**

Kartta on yhdenmuotoinen kuva maastosta, jolloin kartan pituudet ja maaston pituudet ovat suoraan verrannollisia keskenään. Merkitään reitin pituutta kartalla kirjaimella *x*.
Muutetaan reitin todellinen pituus metreiksi, jotta yksiköt supistuvat laskussa järkevästi:

12,5 km = 12 500 m

Muodostetaan vastinpituuksien välinen verrantoyhtälö ja ratkaistaan *x*.

$$\frac{x}{12500} = \frac{2,0}{600}$$

$$600x = 25000 \quad |:600$$

$$x = 41,666\ldots$$

$$x \approx 42 (\text{cm})$$

Vastaus Reitin pituus kartalla on 42 cm.

**48**

a) Pienoismallin mittakaava *k* on pienoismallin ja oikean kirjaston vastinpituuksien suhde.

$$k = \frac{125\ \text{cm}}{85\ \text{m}} = \frac{125\ \text{cm}}{8500\ \text{cm}} = \frac{1}{68} = 1:68$$

Mittakaava on 1 : 68.

b) Koska pienoismallin mittakaava on 1 : 68, ovat pienoismallin pituudet suuruudeltaan $\frac{1}{68}$ todellisista pituuksista. Näin ollen pienoismallin korkeus on

$$\frac{1}{68} \cdot 15\ \text{m} = 0{,}22058\ldots\ \text{m} \approx 22\ \text{cm}.$$

Pienoismallin korkeus on 22 cm.

Vastaus a) Mittakaava on 1 : 68.
b) Pienoismallin korkeus on 22 cm.

**49**

Kartan mittakaava on kartalta mitatun pituuden ja vastaavan todellisen pituuden suhde.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$$\frac{x}{12{,}5} = \frac{1}{20000}$$ Kerrotaan ristiin.

$20\,000x = 12{,}5$ | : 20 000

$x = 0{,}000\,625$ (km)

Pituus kartalla on $x = 0{,}000\,625$ km = 0,625 m = 62,5 cm.

Lasketaan mittakaava $y$.

$$y = \frac{76\text{ cm}}{190\text{ km}} = \frac{76\text{ cm}}{19000000\text{ cm}} \overset{(76\text{ cm}}{=} \frac{1}{250000} = 1:250000$$

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $z$.

$$\frac{3{,}5}{z} = \frac{1}{10000}$$ Kerrotaan ristiin.

$z = 35\,000$ (cm)

Todellinen pituus on $z = 35\,000$ cm = 350 m.

Vastaus $x = 62{,}5$ cm, $y = 1 : 250\,000$, $z = 350$ m

**50**

Merkitään lammen ympärysmittaa kirjaimella $x$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{3{,}9}{x} = \frac{1}{15000}$$ Kerrotaan ristiin.

$x$ = 58 500 (cm)

Lammen ympärysmitta on 58 500 cm = 585 m ≈ 590 m.

Keskivauhti $v$ on kuljetun matkan ja matkaan käytetyn ajan osamäärä. Matka-aika on nyt 5,0 min = 300 s. Lasketaan keskivauhti.

$$v = \frac{585\text{ m}}{300\text{ s}} = 1{,}95\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 2{,}0\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koska 1 m/s = 3,6 km/h, saadaan keskivauhdille myös arvo

$v$ = 1,95 · 3,6 km/h = 7,02 km/h ≈ 7,0 km/h.

Vastaus Lammen ympärysmitta on 590 m, keskivauhti on 2,0 m/s (tai 7,0 km/h)

**51**

a) Merkitään matkaa kirjaimella $x$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{1,5}{x}=\frac{1}{50000}$$ Kerrotaan ristiin.

$x$ = 75 000 (cm)

Matka on 75 000 cm = 750 m, eli **vaihtoehto 2)**.

b) Merkitään pellon sivun pituutta kartalla kirjaimella $x$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{250}=\frac{1}{50000}$$ Kerrotaan ristiin.

50 000$x$ = 250 | : 50 000

$x$ = 0,005 (m)

Pellon sivun pituus kartalla on 0,005 m = 5 mm, eli **vaihtoehto 2)**.

c) Merkitään puun paksuutta kirjaimella $x$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{0,5}{x}=\frac{1}{50000}$$ Kerrotaan ristiin.

$x$ = 25 000 (mm)

Puun paksuus on 25 000 mm = 25 m, eli **vaihtoehto 3)**.

d) Merkitään viivan leveyttä kirjaimella $x$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{x}{10}=\frac{1}{50000}$$ Kerrotaan ristiin.

50 000$x$ = 10 | : 50 000

$x$ = 0,0002 (m)

Viivan leveys on 0,0002 m = 0,2 mm, eli **vaihtoehto 3)**.

Vastaus a) 2 b) 2 c) 3 d) 3

**52**

Merkitään laivan pituutta kirjaimella $x$, muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan pituus.

$$\frac{48}{x} = \frac{3}{200}$$ Kerrotaan ristiin.

$3x = 9600$ | : 3

$x = 3200$ (cm)

Laivan pituus on 3200 cm = 32 m.

Vastaus Laivan pituus on 32 m.

**53**

a) Vastinpituudet ovat $x$ ja 6 sekä 5 ja 3. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$ Kerrotaan ristiin.

$3x = 30$ | : 3

$x = 10$

b) Vastinpituudet ovat $y$ ja 16 sekä 3 ja 5. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $y$.

$\frac{y}{16} = \frac{3}{5}$ Kerrotaan ristiin.

$5y = 48$ | : 5

$y = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5} = 9{,}6$

c) Mittakaava $k$ on vastinpituuksien suhde. Nyt $k = 5 : 3$ (tai $3 : 5$).

Vastaus a) $x = 10$ b) $y = 9{,}6$ c) $5 : 3$ (tai $3 : 5$)

**54**

a) Kolmiot $CAB$ ja $CDE$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kulma $C$ on yhteinen.
- Kulmat $CDE$ ja $CAB$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel DE$.

Vastinjanat ovat $DE$ ja $AB$ sekä $CD$ ja $CA$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$\frac{x}{15} = \frac{12}{20}$ Kerrotaan ristiin.

$20x = 180$ | : 20

$x = 9$

b) Kolmiot $CAB$ ja $CDE$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kulma $C$ on yhteinen.
- Kulmat $CDE$ ja $CAB$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel DE$.

Vastinjanat ovat $CE$ ja $CB$ sekä $DE$ ja $AB$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$\frac{10}{10+x} = \frac{5}{8}$ Kerrotaan ristiin.

$5(10 + x) = 80$

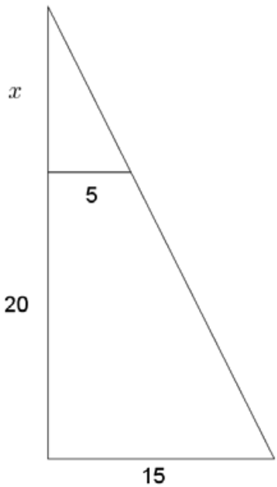
$50 + 5x = 80$

$5x = 30$ | : 5

$x = 6$

Vastaus a) $x = 9$ b) $x = 6$

**55**




Merkitään joen leveyttä kirjaimella $x$. Kuvion kaksi sisäkkäistä suorakulmaista kolmiota ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen perusteella, sillä molemmissa on suora kulma ja huippukulma on yhteinen. Vastinpituudet ovat $x$ ja $x + 20$ sekä 5 ja 15. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$\dfrac{x}{x+20} = \dfrac{5}{15}$ Kerrotaan ristiin.

$15x = 5(x + 20)$

$15x = 5x + 100$

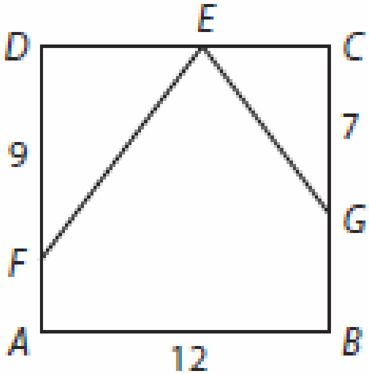
$10x = 100$ | : 10

$x = 10$ (m)

Joen leveys on 10 m.

Vastaus Joen leveys on 10 m.

**56**




Kolmiot $DFE$ ja $CGE$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Kulmat $C$ ja $D$ ovat suoria.
- Kulmat $DEF$ ja $CEG$ ovat yhtä suuret.

Kun merkitään $x = |EC|$, niin $|DE| = 12 - x$. Vastinsivut ovat $EC$ ja $ED$ sekä $CG$ ja $DF$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$\frac{x}{12-x} = \frac{7}{9}$ Kerrotaan ristiin.

$9x = 7(12 - x)$

$9x = 84 - 7x$

$16x = 84$ | : 16

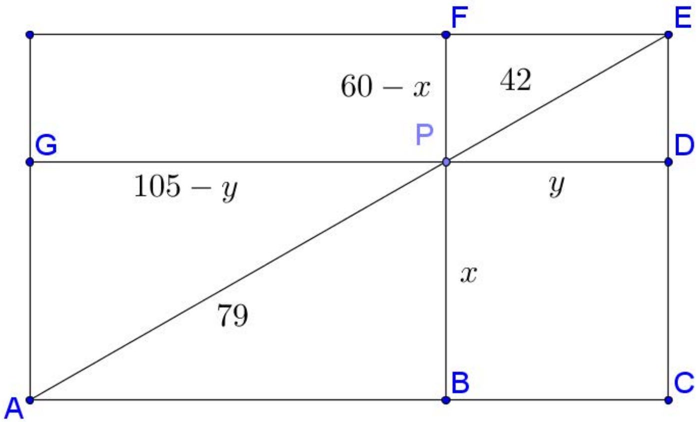
$x = \frac{84}{16} = \frac{21}{4} = 5\frac{1}{4}$

Janan $EC$ pituus on $5\frac{1}{4}$.

Vastaus $|EC| = 5\frac{1}{4}$

**57**

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.




a) Kolmiot $ABP$ ja $EFP$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Molemmissa on suora kulma.
- Kulmat $FPE$ ja $BPA$ ovat ristikulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty pituus $x$.
Vastinjanat ovat $PB$ ja $PF$ sekä $PA$ ja $PE$.

$$\frac{x}{60-x}=\frac{79}{42}$$ Kerrotaan ristiin.

$42x = 79(60 - x)$

$42x = 4740 - 79x$

$121x = 4740$ | : 121

$x = 39,173\ldots$

$x \approx 39$ (m)

Etäisyys alemmasta sivurajasta on noin 39 m.

b) Kolmiot $PDE$ ja $PGA$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Molemmissa on suora kulma.
- Kulmat $DPE$ ja $GPA$ ovat ristikulmina yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty pituus $y$.
Vastinjanat ovat $PD$ ja $PG$ sekä $PE$ ja $PA$.

$\frac{y}{105-y}=\frac{42}{79}$ Kerrotaan ristiin.

$79y = 42(105 – y)$

$79y = 4410 – 42y$

$121y = 4410$ $\mid : 121$

$y = 36{,}446\ldots$

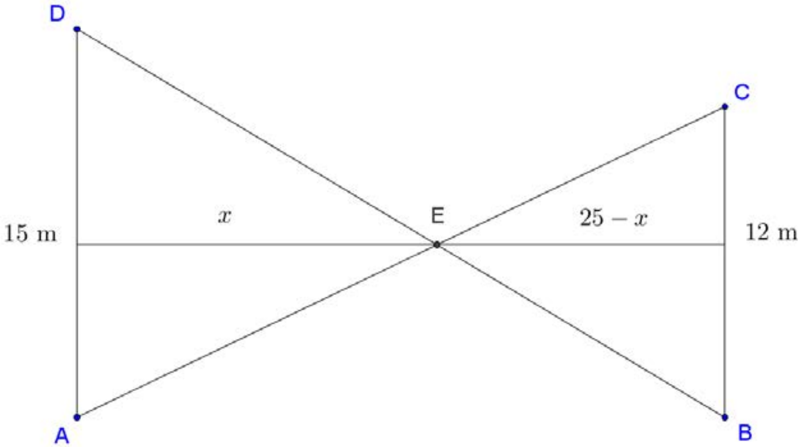
$y \approx 36$ (m)

Etäisyys oikeasta päädystä on noin 36 m.

Vastaus a) Etäisyys alemmasta sivurajasta on 39 m.
b) Etäisyys oikeasta päädystä on 36 m.

**58**

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.




Kolmiot $AED$ ja $CEB$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Ristikulmat $AED$ ja $CEB$ ovat yhtä suuret.
- Kulmat $EAD$ ja $ECB$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AD \parallel CB$.

Vastinpituudet ovat kolmioiden korkeudet $x$ ja $25 - x$ sekä kannat $|AD|$ ja $|CB|$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty etäisyys $x$.

$\frac{x}{25-x} = \frac{15}{12}$ Kerrotaan ristiin.

$12x = 15(25 - x)$

$12x = 375 - 15x$

$27x = 375$ $\quad | : 27$

$x = 13{,}888\ldots$

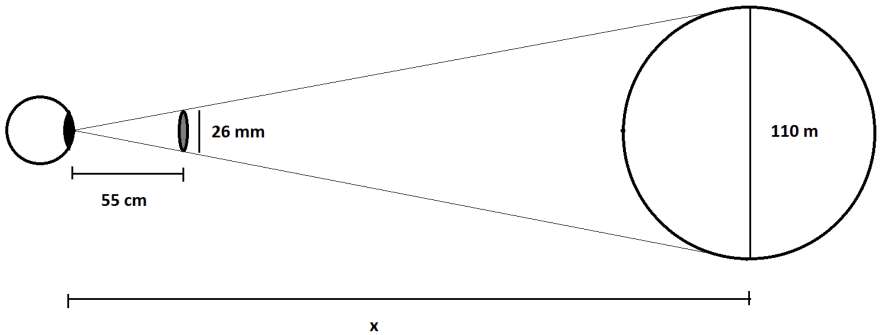
$x \approx 14$ (m)

Etäisyys korkeampaan pylvääseen on noin 14 m.

Vastaus Etäisyys on 14 m.

**59**

Käytetään oheisen kuvion merkintöjä.




Kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat kk-lauseen nojalla yhdenmuotoiset, sillä niillä on yhteinen huippukulma silmän kohdalla ja yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat. Vastinpituudet ovat 26 mm = 0,026 m ja 110 m sekä 55 cm = 0,55 m ja $x$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan kysytty etäisyys $x$.

$$\frac{x}{0,55}=\frac{110}{0,026}$$ Kerrotaan ristiin.

$0{,}026x = 60{,}5$ | : 0,026

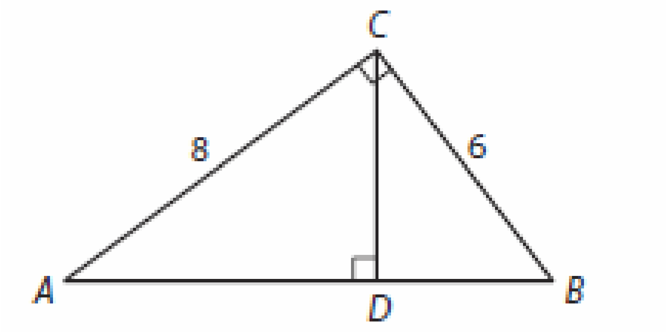
$x = 2326{,}923\ldots$

$x \approx 2300$ (m) | : 27

Etäisyys Globen-hallista on noin 2300 m = 2,3 km.

Vastaus Etäisyys on 2,3 km.

**60**




a) Yhdenmuotoiset kolmiot ovat kk-lauseen perusteella (vastinpisteet järjestyksessä) $CAB$, $DAC$ ja $DCB$.

- Kaikissa kolmioissa on suora kulma.
- Kolmioissa $CAB$ ja $DAC$ on molemmissa sama kulma $A$, joten $\Delta CAB \sim \Delta DAC$.
  Kolmioissa $CAB$ ja $DCB$ on molemmissa sama kulma $B$, joten $\Delta CAB \sim \Delta DCB$.
  Lopulta myös $\Delta DAC \sim \Delta DCB$, koska molemmat ovat yhdenmuotoisia kolmion $CAB$ kanssa.

b) Tutkitaan kolmioita $CAB$ ja $DCB$. Merkitään $x = |CD|$, muodostetaan vastinpituuksille verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{6}{10}$$ Kerrotaan ristiin.

$10x = 48$      $| : 10$

$x = 4{,}8$

Janan $CD$ pituus on 4,8.

c) Tutkitaan kolmioita *DAC* ja *DCB*. Merkitään $x = |DB|$, muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $x$.

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|CD|}{|BD|}$$

$$\frac{8}{6} = \frac{4,8}{x} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$8x = 28,8 \qquad | : 8$

$x = 3,6$

Tällöin $|AD| = 10 – 3,6 = 6,4$ ja jakosuhde on $|AD| : |DB| = 6,4 : 3,6 = 64 : 36 = 16 : 9$.

Vastaus a) - b) $|CD| = 4,8$

c) $|AD| : |DB| = 16 : 9$

**61**

Merkitään jotakin vapaasti valittua pituutta alkuperäisessä kuvassa kirjaimella $d$. Ensimmäisessä suurennoksessa tämä pituus kasvaa arvoon $1{,}5d$. Toisessa suurennoksessa tämä arvo suurenee edelleen kertoimella $\frac{5}{3}$, eli lopullinen pituus on $\frac{5}{3}\cdot 1{,}5d = 2{,}5d$.

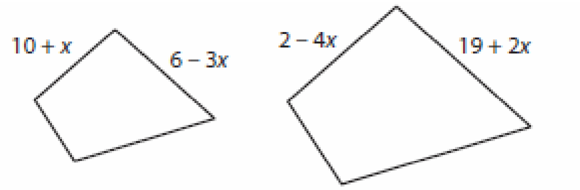
Mittakaavaksi $k$ saadaan täten vastinpituuksien suhteena

$$k = \frac{2{,}5d}{d} \overset{10)}{=} \frac{2{,}5}{1} = \frac{25}{10}^{(5} = \frac{5}{2} = 5:2.$$

(Huomaa: Mittakaavan arvo on suoraan 1,5 · 5/3 = 2,5 = 5/2)

Vastaus Mittakaava on 5 : 2.

**62**




Ratkaistaan ensin $x$ verrantoyhtälöstä. Vastinpituudet ovat $10 + x$ ja $2 - 4x$ sekä $6 - 3x$ ja $19 + 2x$.

$$\frac{10+x}{2-4x} = \frac{6-3x}{19+2x}$$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = -2$ tai $x = \frac{89}{10}$

Koska jokainen neljästä lausekkeesta esittää monikulmion sivun pituutta, on niiden kaikkien arvojen oltava positiivisia.

Jos $x = \frac{89}{10}$, niin pituus $2 - 4x = 2 - 4 \cdot \frac{89}{10} = -\frac{168}{5} < 0$, joten $x = \frac{89}{10}$ ei ole tehtävän kannalta kelvollinen ratkaisu.

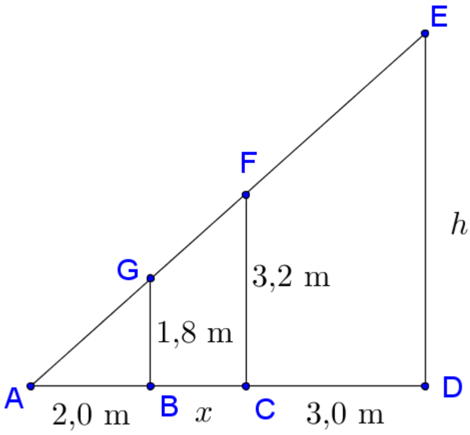
Kun $x = -2$, on jokaisen lausekkeen arvo positiivinen. Tällöin mittakaavaksi saadaan vastinpituuksien suhteena

$$k = \frac{2-4x}{10+x} = \frac{2-4\cdot(-2)}{10+(-2)} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 5:4$$ (tai $k = 4 : 5$).

Vastaus Mittakaava on $5 : 4$ (tai $4 : 5$).

**63**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Kolmiot $ABG$, $ACF$ ja $ADE$ ovat kaikki yhdenmuotoisia keskenään kk-lauseen nojalla, sillä ne ovat kaikki suorakulmaisia ja niillä on yhteinen kulma $A$.

a) Tutkitaan kolmioita $ABG$ ja $ACF$. Ratkaistaan kysytty etäisyys $x$ vastinpituuksien 2 ja $2 + x$ sekä 1,8 ja 3,2 muodostamasta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{2}{2+x} = \frac{1{,}8}{3{,}2} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$1{,}8(2 + x) = 6{,}4$

$3{,}6 + 1{,}8x = 6{,}4$

$1{,}8x = 2{,}8 \qquad | : 1{,}8$

$x = 1{,}555\ldots$

$x \approx 1{,}6$ (m)

Tytön etäisyys valaisinpylvääseen on noin 1,6 m.

b) Tutkitaan kolmioita *ABG* ja *ADE*. Kohdan a perusteella pituus $|AD|$ = 2,0 m + 1,555… m + 3,0 m = 6,555… m. Ratkaistaan kysytty korkeus $h$ vastinpituuksien 2 ja 6,555… sekä 1,8 ja $h$ muodostamasta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{1{,}8}{h} = \frac{2}{6{,}555...}$$ Kerrotaan ristiin.

$2h = 11{,}8$ | : 2

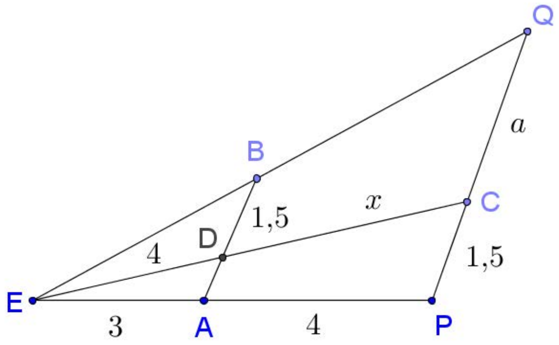
$h = 5{,}9$ (m)

Valaisinpylvään korkeus on 5,9 m.

Vastaus a) Etäisyys on 1,6 m. b) Korkeus on 5,9 m.

**64**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Ratkaistaan ensin pituus $x$. Kolmiot $EAD$ ja $EPC$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella.

- Kulma $DEA$ on yhteinen.
- Kulmat $EAD$ ja $EPC$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska janat $AB$ ja $PQ$ ovat yhdensuuntaiset.

Muodostetaan verrantoyhtälö, josta $x$ ratkeaa.

$$\frac{3}{3+4}=\frac{4}{4+x}$$

$$\frac{3}{7}=\frac{4}{4+x}$$ Kerrotaan ristiin.

$3(4 + x) = 28$

$12 + 3x = 28$

$3x = 16$

$$x=\frac{16}{3}$$

Kolmiot $EDB$ ja $ECQ$ ovat myös yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Kulma $BED$ on yhteinen.
- Kulmat $EDB$ ja $ECQ$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel PQ$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan $a$.

Sijoitetaan $x = \frac{16}{3}$.

$$\frac{4}{4+x} = \frac{1,5}{a}$$

$$\frac{4}{4+\frac{16}{3}} = \frac{1,5}{a}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{1,5}{a}$$

Kerrotaan ristiin.

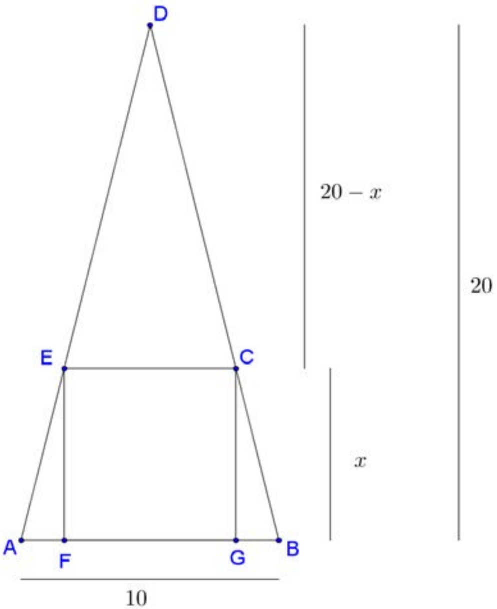
$3a = 10,5$ | : 3

$a = 3,5$

Vastaus Pituus $a = 3,5$.

**65**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Kolmiot $ABD$ ja $ECD$ ovat kk-lauseen perusteella yhdenmuotoiset.

- Niillä on yhteinen huippukulma $D$.
- Kulmat $DAB$ ja $DEC$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel EC$.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan neliön sivun pituus $x$.

$$\frac{20}{20-x} = \frac{10}{x}$$

Korkeuksien suhde = Kantojen suhde

$20x = 10(20 - x)$

$20x = 200 - 10x$

$30x = 200$ | : 30

$$x = \frac{20}{3}$$

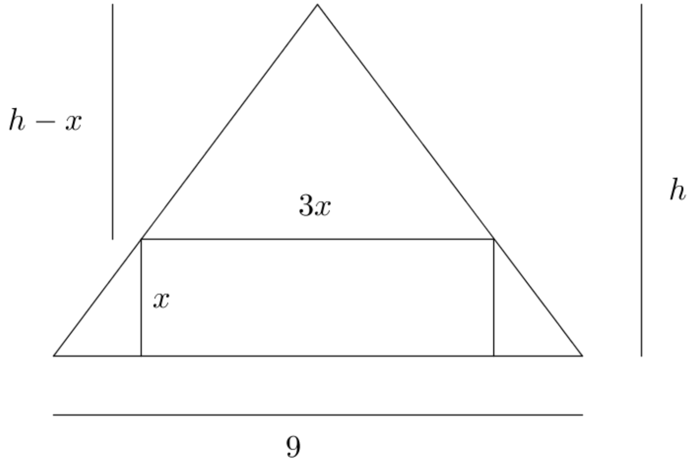
Kun neliön sivun pituus on $\frac{20}{3}$, sen pinta-ala on

$$A = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9} = 44\frac{4}{9}.$$

Vastaus Pinta-ala on $44\frac{4}{9}$.

**66**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Kuvan sisäkkäiset, tasakylkiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja vaakasuorien kantojen vuoksi yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat.

Ratkaistaan ensin pinta-alatiedon avulla korkeus $h$.

$A = 27$ Kolmion pinta-ala $A=\frac{1}{2}ah$.

$\frac{1}{2}\cdot 9\cdot h=27$ $\quad |:\left(\frac{1}{2}\cdot 9\right)$

$h = 6$

Ratkaistaan sitten yhdenmuotoisista kolmioista pituus $x$.

Korkeuksien suhde = Kantojen suhde

$\frac{h-x}{h}=\frac{3x}{9}$ Sijoitetaan $h = 6$.

$\frac{6-x}{6}=\frac{3x}{9}$ Kerrotaan ristiin.

$18x = 9(6 - x)$

$18x = 54 - 9x$

$27x = 54$ $\quad | : 27$

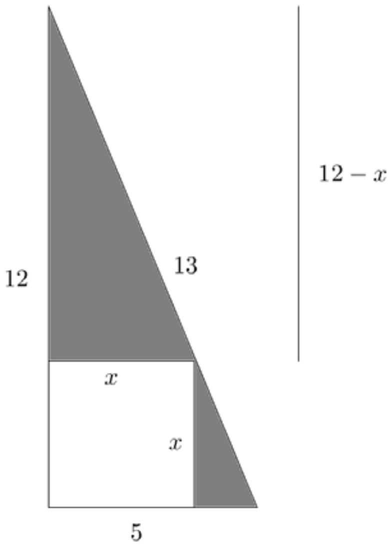
$x = 2$

Suorakaiteen korkeus on siis $2$ ja korkeus on siten $3 \cdot 2 = 6$.
Suorakaiteen pinta-alaksi saadaan $A = 2 \cdot 6 = 12$.

Vastaus Pinta-ala on $12$.

**67**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Tummennetun alueen pinta-ala saadaan, kun koko kolmion pinta-alasta vähennetään neliön pinta-ala. Kuvan kaikki sisäkkäiset suorakulmaiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä niillä on suoran kulman lisäksi yhteinen tai samankohtaisuuden vuoksi yhtä suuri huippukulma. Muodostetaan verrantoyhtälö koko kolmion ja huippuun jäävän kolmion vastinpituuksille.

$$\frac{12}{12-x}=\frac{5}{x}$$ Korkeuksien suhde = Kantojen suhde

$12x = 5(12 – x)$

$12x = 60 – 5x$

$17x = 60$ $\quad | : 17$

$$x=\frac{60}{17}$$

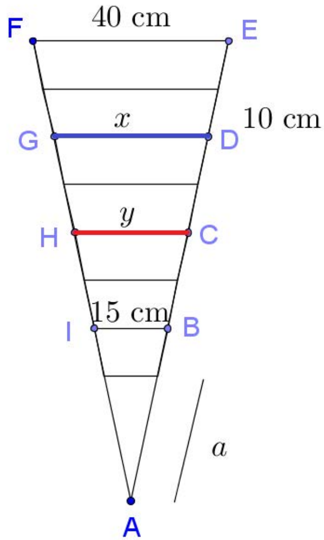
Koko kolmion pinta-ala on $A_k = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$ ja neliön pinta-ala on $A_n = \left(\frac{60}{17}\right)^2 = \frac{3600}{289}$. Tummennetun alueen pinta-alaksi saadaan lopulta

$$A = A_k - A_n = 30 - \frac{3600}{289} = \frac{5070}{289} = 17\frac{157}{289} \approx 17,5.$$

Vastaus Pinta-ala on 17,5.

**68**

Täydennetään kehikko kolmioksi ja käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Kaikki kuvion sisäkkäiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma $A$ ja samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat (kaikki rimat ovat vaakasuoria).
Ratkaistaan ensin pituus $a$ kolmioiden $ABI$ ja $AEF$ perusteella muodostuvasta verrantoyhtälöstä.

$\frac{15}{40} = \frac{a+10}{a+70}$ Kerrotaan ristiin.

$40(a + 10) = 15(a + 70)$

$40a + 400 = 15a + 1050$

$25a = 650$ $| : 25$

$a = 26$ (cm)

Muodostetaan sitten verrantoyhtälö kolmioista $ADG$ ja $AEF$ ja ratkaistaan $x$.

$\frac{x}{40} = \frac{26+50}{26+70}$ Kerrotaan ristiin.

$96x = 3040$ | : 96

$x = 31{,}666\ldots$

$x \approx 32$ (cm)

Pituus $x$ on noin 32 cm.

Muodostetaan lopuksi verrantoyhtälö kolmioista $ACH$ ja $AEF$ ja ratkaistaan $y$.

$\frac{y}{40} = \frac{56}{96}$ Kerrotaan ristiin.

$96y = 2240$ | : 96

$x = 23{,}333\ldots$

$x \approx 23$ (cm)

Pituus $y$ on noin 23 cm.

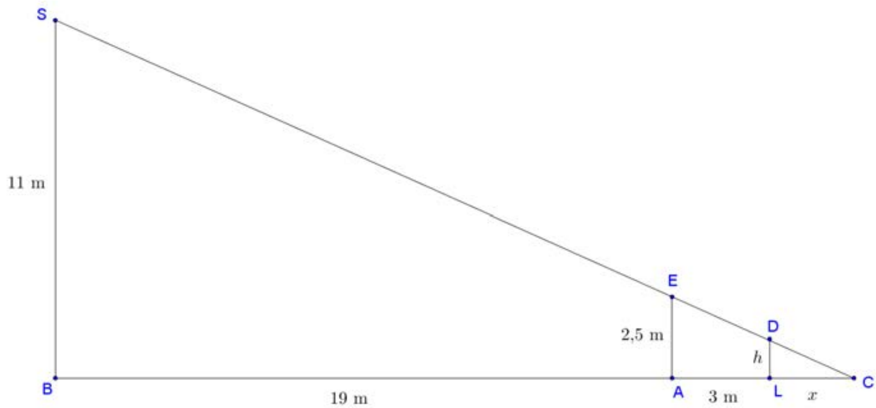
(Huom. Pituudet voi ratkaista myös suoraan yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} \frac{15}{40} = \frac{a+10}{a+70} \\ \frac{x}{40} = \frac{a+50}{a+70} \\ \frac{y}{40} = \frac{a+30}{a+70} \end{cases}$$ )

Vastaus $x = 32$ cm ja $y = 23$ cm.

**69**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Kuvan sisäkkäiset kolmiot *BCS*, *ACE* ja *LCD* ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä ne ovat kaikki suorakulmaisia ja niillä on yhteinen terävä kulma C.

Selvitetään, millä korkeudella ”näkölinja” *SC* kulkee 3 metrin päässä aidan takana, eli määritetään korkeus *h*. Ratkaistaan ensin pituus *x* kolmioihin *BCS* ja *ACE* liittyvästä verrantoyhtälöstä.

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{19+3+x}{3+x} = \frac{11}{2,5}$$

$11(3 + x) = 2,5(22 + x)$

$33 + 11x = 55 + 2,5x$

$8,5x = 22 \quad | : 8,5$

$x = 2,5882\ldots \text{ (m)}$

Muodostetaan sitten verrantoyhtälö kolmioista $ACE$ ja $LCD$ ja ratkaistaan korkeus $h$.

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{3+x}{x}=\frac{2,5}{h}$$

$h(3 + x) = 2,5x$ | : $(3 + x)$

Sijoitetaan $x = 2,5882\ldots$

$$h=\frac{2,5x}{3+x}$$

$$h=\frac{2,5\cdot 2,5882...}{3+2,5882...}$$ | : 8,5

$$h=\frac{6,4705...}{5,5882...}$$

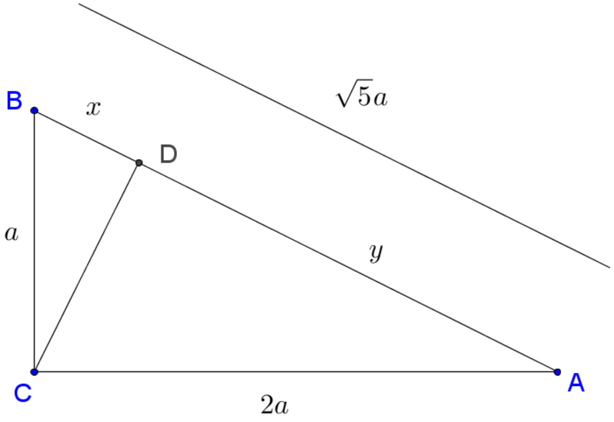
$h = 1,1578\ldots$ (m)

Tuloksen perusteella Mikko voi nähdä kohteen aidan takana vain, jos se on vähintään 1,16 metriä korkea. Täten Mikko ei näe vain 105 cm pitkää lasta.

Vastaus Mikko ei näe lasta.

**70**

Merkitään lyhyemmän kateetin pituutta kirjaimella $a$, jolloin pidemmän kateetin ja hypotenuusan pituudet ovat vastaavasti $2a$ ja $\sqrt{5}a$. Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Tehtävän 60 perusteella kaikki kuvan suorakulmaiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia. Ratkaistaan verrantoyhtälöiden avulla lausekkeet pituuksille $x$ ja $y$ ja lasketaan lopuksi suhde $x : y$.

Kolmiosta $ABC$ ja $CBD$ saadaan lauseke pituudelle $x$.

$$\frac{|AB|}{|CB|} = \frac{|BC|}{|BD|}$$

$$\frac{\sqrt{5}a}{a} = \frac{a}{x} \qquad \text{Kerrotaan ristiin.}$$

$$\sqrt{5}ax = a^2 \qquad |:(\sqrt{5}a)$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Kolmiosta $ABC$ ja $ACD$ saadaan vastaavasti lauseke pituudelle $y$.

$$\frac{|AB|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|AD|}$$

$$\frac{\sqrt{5}a}{2a}=\frac{2a}{y}$$ Kerrotaan ristiin.

$$\sqrt{5}ay=4a^2 \qquad |:(\sqrt{5}a)$$

$$y=\frac{4a}{\sqrt{5}}$$

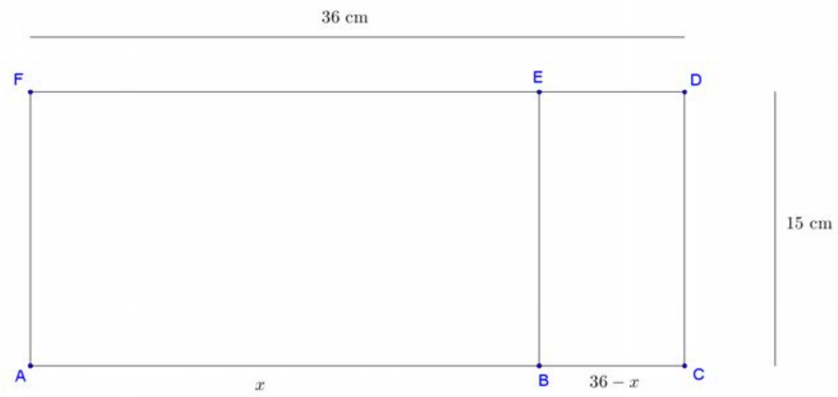
Hypotenuusan jakosuhteeksi saadaan lopulta

$$x:y=\frac{a}{\sqrt{5}}:\frac{4a}{\sqrt{5}}=\frac{a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{4a}=\frac{1}{4}=1:4.$$

Vastaus Korkeusjana jakaa hypotenuusan suhteessa 1 : 4.

**71**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä. Jotta syntyy kaksi nelikulmiota, on oltava $0 < x < 36$.




Pituus $x$ on siis sellainen, että nelikulmiot $ABEF$ ja $CDEB$ ovat yhdenmuotoiset. Tämä voi tapahtua kahdella tavalla: vastinsivuparit ovat joko 1) $AB$ ja $CD$ sekä $BE$ ja $DE$ tai 2) $AB$ ja $BC$ sekä $BE$ ja $CD$ (kuva mallintaa tapausta 1). Tutkitaan molemmat tilanteet erikseen.

Tapaus 1)

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|BE|}{|DE|}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{15}{36 - x}$$ Kerrotaan ristiin.

$x(36 - x) = 225$

$36x - x^2 - 225 = 0$ Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 8{,}0501\ldots$ tai $x = 27.9498\ldots$

$x \approx 8{,}1$ (cm) tai $x \approx 27{,}9$ (cm)

Saadut ratkaisut ovat toistensa peilikuvat. Jos $x = 8{,}1$ cm, niin $36 - x = 27{,}9$ cm ja jos taas $x = 27{,}9$ cm, niin $36 - x = 8{,}1$ cm.

Tapaus 2)

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|CD|}$$

$$\frac{x}{36 - x} = \frac{15}{15}$$

$$\frac{x}{36 - x} = 1 \qquad | \cdot (36 - x)\ (\neq 0)$$

$x = 36 - x$

$2x = 36 \qquad | : 2$

$x = 18$ (cm)

Kun $x = 18$ cm, niin myös $36 - x = 18$ cm, ja tällöin alkuperäinen nelikulmio jakautuu kahteen identtiseen puolikkaaseen.

Vastaus Osien pituudet ovat joko 8,1 cm ja 27,9 cm tai 18 cm ja 18 cm.

## 72

Merkitään kysyttyä pinta-alaa kirjaimella $A$. Ratkaistaan $A$ verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{0,76} = \left(\frac{1}{40000}\right)^2 \qquad | \cdot 0,76$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$A = \left(\frac{1}{40000}\right)^2 \cdot 0,76$$

$A = 4,75 \cdot 10^{-10}$ (ha)

Pinta-ala kartalla on siis
$A = 4,75 \cdot 10^{-10}$ ha $= 4,75 \cdot 10^{-6}$ m$^2$ $= 4,75$ mm$^2$ $\approx 4,8$ mm$^2$.

Vastaus Pinta-ala on 4,8 mm$^2$.

**73**

Merkitään kysyttyä pinta-alaa kirjaimella $A$ ja muutetaan annetut pituusmitat samaan yksikköön. Tällöin pituusyksiköt supistuvat laskussa oikein ja pinta-ala saadaan tehtävänannon yksikössä $\text{km}^2$.

6370 km = 6 370 000 m = 637 000 000 cm

Ratkaistaan $A$ verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{14\,000\,000} = \left(\frac{25}{637\,000\,000}\right)^2$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien osamäärän neliö.

$$A = \left(\frac{25}{637\,000\,000}\right)^2 \cdot 14\,000\,000$$

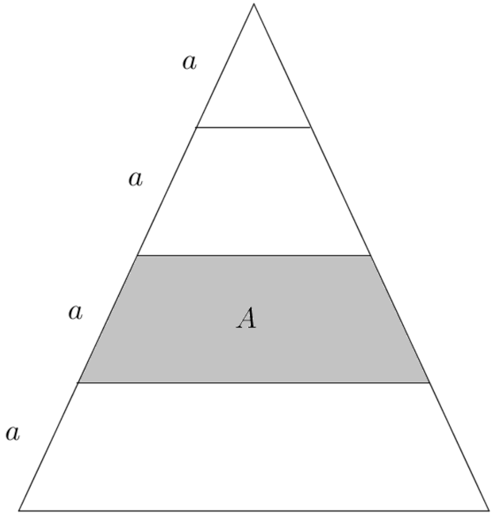
$A = 2{,}1563\ldots \cdot 10^{-8}\ (\text{km}^2)$

Pinta-ala kartalla on siis
$A = 2{,}1563\ldots \cdot 10^{-8}\ \text{km}^2 = 2{,}1563\ldots \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2 = 215{,}63\ldots\ \text{cm}^2 \approx 220\ \text{cm}^2$.

Vastaus Pinta-ala on $220\ \text{cm}^2$.

**74**

Merkitään yhden jako-osan pituutta kirjaimella $a$.




Kysytty, kuvassa tummennettuna näkyvä pinta-ala $A$ saadaan selville vähentämällä kolmen ylimmän osan muodostaman kolmion pinta-alasta $A_3$ kahden ylimmän osan muodostaman kolmion pinta-ala $A_2$. Kaikki kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen sekä vaakasuorien kantojen määräämät samankohtaiset, yhtä suuret kantakulmat.

Ratkaistaan ensin pinta-ala $A_3$ koko kolmion ja kolmen ylimmän osan määräämän kolmion avulla muodostetusta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A_3}{220} = \left(\frac{3a}{4a}\right)^2$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien osamäärän neliö. Pituudet $a$ supistuvat. Kerrotaan ristiin.

$$\frac{A_3}{220} = \frac{9}{16}$$

$16A_3 = 1980 \qquad | : 16$

$A_3 = 123{,}75\ (\text{cm}^2)$

Ratkaistaan sitten pinta-ala $A_2$ koko kolmion ja kahden ylimmän osan määräämän kolmion avulla muodostetusta verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A_2}{220} = \left(\frac{2a}{4a}\right)^2$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien osamäärän neliö. Pituudet $a$ supistuvat. Kerrotaan ristiin.

$$\frac{A_2}{220} = \frac{1}{4}$$

$4A_2 = 220$ | : 16

$A_2 = 55$ (cm$^2$)

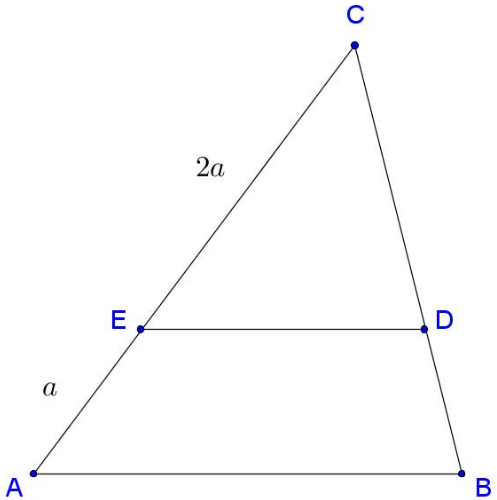
Tummennettu pinta-ala $A$ saadaan näiden pinta-alojen erotuksena.

$A = A_3 - A_2 = 123{,}75\ \text{cm}^2 - 55\ \text{cm}^2 = 68{,}75\ \text{cm}^2 \approx 69\ \text{cm}^2$.

Vastaus Pinta-ala on 69 cm$^2$.

**75**

Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Sisäkkäiset kolmiot $ABC$ ja $EDC$ ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla.

- Huippukulma $C$ on yhteinen.
- Kantakulmat $BAC$ ja $DEC$ ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska $AB \parallel ED$.

Merkitään pienemmän huippukolmion $EDC$ pinta-alaa $A_h$ ja koko kolmion pinta-alaa kirjaimella $A$. Näiden suhde on sama, kuin vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{A_h}{A} = \left(\frac{|CE|}{|CA|}\right)^2 = \left(\frac{2a}{3a}\right)^2 = \frac{4}{9} = 0,444... \approx 44\%$$

Pienen kolmion pinta-ala on siis 44% koko kolmion alasta.

Vastaus Pinta-ala on 44% kolmion alasta.

**76**

a) Pinta-alojen suhde on vastinpituuksen suhteen neliö.

$$\frac{A_{\text{iso}}}{A_{\text{pieni}}} = \left(\frac{25}{15}\right)^2 = 2,777... \approx 278\% .$$

Täten ison pallon pinta-ala on noin 278% - 100% = 178% suurempi kuin pienen pallon ala.

b) Tilavuuksien suhde on vastinpituuksen suhteen kuutio.

$$\frac{V_{\text{iso}}}{V_{\text{pieni}}} = \left(\frac{25}{15}\right)^3 = 4,6296... \approx 463\% .$$

Täten ison pallon tilavuus on noin 463% - 100% = 363% suurempi kuin pienen pallon tilavuus.

Vastaus a) 178% suurempi b) 363% suurempi

**77**

Merkitään hahmojen korkeuksia ja tilavuuksia kirjamilla $h$ ja $V$ niin, että alaindeksit 1, 2 ja 3 viittaavat kappaleisiin järjestyksessä pienimmästä suurimpaan. Nyt tiedetään, että $h_1 = 7{,}5$ cm, $V_2 = 270$ cm$^3$, $h_3 = 25$ cm ja $V_3 = 1250$ cm$^3$.

a) Tilavuuksien suhde on vastinpituuksien suhteen kuutio. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan tilavuus $V_1$.

$$\frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{h_1}{h_3}\right)^3$$

$$\frac{V_1}{1250} = \left(\frac{7{,}5}{25}\right)^3 \qquad | \cdot 1250$$

$$V_1 = \left(\frac{7{,}5}{25}\right)^3 \cdot 1250$$

$V_1 = 33{,}75$

$V_1 \approx 34$ (cm$^3$)

Pienimmän hahmon tilavuus on siis noin 34 cm$^3$.

b) Tilavuuksien suhde on vastinpituuksien suhteen kuutio.
Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan korkeus $h_2$.

$$\left(\frac{h_2}{h_3}\right)^3 = \frac{V_2}{V_3}$$

$$\left(\frac{h_2}{25}\right)^3 = \frac{270}{1250}$$

$$\frac{h_2}{25} = \sqrt[3]{\frac{270}{1250}} = \frac{3}{5} \qquad | \cdot 25$$

$$h_2 = \frac{3}{5} \cdot 25$$

$h_2$ = 15 (cm)

Keskimmäisen hahmon korkeus on siis 15 cm.

Vastaus a) Tilavuus on 34 cm$^3$. b) Korkeus on 15 cm.

**78**

Merkitään suuremman lipun pituutta kirjaimella $d$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\left(\frac{d}{1,8}\right)^2 = \frac{3,6}{2,0} = 1,8$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{d}{1,8} = \sqrt{1,8} \qquad | \cdot 1,8$$

$$d = \sqrt{1,8} \cdot 1,8$$

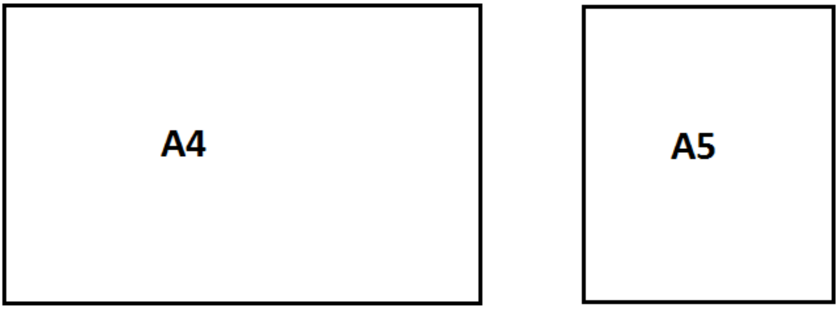
$d$ = 2,4149…

$d$ ≈ 2,4 (m)

Suuremman lipun pituus on siis noin 2,4 m.

Vastaus Pituus on 2,4 m.

**79**




Merkitään tekstin korkeutta A4-paperilla $h_4$ ja A5-paperilla $h_5$.
Lasketaan suhteen $h_5 : h_4$ arvo prosentteina ja päätellään vastaus.

$$\left(\frac{h_5}{h_4}\right)^2 = \frac{A_{A5}}{A_{A4}}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{h_5}{h_4} = \sqrt{\frac{A_{A5}}{A_{A4}}}$$

Nyt pinta-alojen suhde on $A_{A5} : A_{A4} = 50 : 100 = 0{,}5$ , joten

$$\frac{h_5}{h_4} = \sqrt{0{,}5} = 0{,}7071... \approx 71\% .$$

Pienennyksen yhteydessä tekstin korkeus pienenee noin 100% - 71% = 29%.

Vastaus Korkeus pienenee 29%.

**80**

Muutetaan aluksi pinta-alat samaan yksikköön.
$8{,}5\ \text{m}^2 = 85\,000\ \text{cm}^2$
Merkitään monumentin ja pienoismallin pinta-aloja järjestyksessä $A_1$ ja $A_2$ sekä tilavuuksia vastaavasti $V_1$ ja $V_2$.
Lasketan sitten pinta-alojen avulla pienennöksen mittakaava $k$.

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$k = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$$

Sijoitetaan pinta-alat.

$$k = \sqrt{\frac{310}{85\,000}} = \sqrt{\frac{31}{8500}}$$

Ratkaistaan sitten tilavuus $V_2$ verrantoyhtälöstä.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_2}{1300} = \left(\sqrt{\frac{31}{8500}}\right)^3 \quad | \cdot 1300$$

$$V_2 = \left(\sqrt{\frac{31}{8500}}\right)^3 \cdot 1300$$

$V_2 = 0{,}2863\ldots$ (L)

Pienoismallin tilavuus on siis noin $0{,}2863\ldots\ \text{L} \approx 2{,}9$ dl.

Vastaus Tilavuus on 2,9 dl.

**81**

Merkitään alkuperäistä pinta-alaa $A_1$ ja pienennöksen pinta-alaa $A_2$. Näiden suhde on sama kuin vastinpituuksien suhteen neliö. Toisaalta kuvatun rakennuksen pinta-alan muutos on prosentteina sama, kuin koko pohjapiirroksen pinta-alan muutos. Nyt

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{30}{45}\right)^2 = 0,444... \approx 44\% .$$

Pinta-ala pienenee siis noin 100% - 44% = 56%.

Vastaus Pinta-ala pienenee 56%.

**82**

a) Merkitään jotakin vapaasti valittua pituutta alkuperäisessä kappaleessa $h_1$ ja vastaavaa pituutta suurennetussa kappaleessa $h_2$. Merkitään alkuperäisen kappaleen pinta-alaa $A_1$ ja suurennetun kappaleen alaa $A_2$. Koska pinta-ala on viisinkertaistunut, on $A_2 : A_1 = 5 : 1 = 5$. Määritetään suhde $h_2 : h_1$.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = 5$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{5} = 2,2360...$$

$$\frac{h_2}{h_1} \approx 224\%$$

Pituuksia on siis suurennettava 224% - 100% = 124%.

b) Merkitään jotakin vapaasti valittua pituutta alkuperäisessä kappaleessa $h_1$ ja vastaavaa pituutta suurennetussa kappaleessa $h_2$. Merkitään alkuperäisen kappaleen tilavuutta $V_1$ ja suurennetun kappaleen tilavuutta $V_2$. Koska pinta-ala on viisinkertaistunut, on $V_2 : V_1 = 5 : 1 = 5$. Määritetään suhde $h_2 : h_1$.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = \frac{V_2}{V_1}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 = 5$$

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt[3]{5} = 1,7099...$$

$$\frac{h_2}{h_1} \approx 171\%$$

Pituuksia on siis suurennettava 171% - 100% = 71%.

Vastaus a) Pituuksia on suurennettava 124%
b) Pituuksia on suurennettava 71%

**83**

Määritetään ensin pituuksien muutossuhde, eli mittakaava, kun pinta-ala pienenee suhteessa 2 : 3. Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, saadaan mittakaavalle seuraava arvo.

$$k^2 = \frac{2}{3}$$

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Uudet pituuden saadaan nyt kertomalla vanhat tällä mittakaavan arvolla.

Pituus 20 cm muuttuu pituudeksi

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 20\,\text{cm} = 16{,}3299...\text{cm} \approx 16\,\text{cm}\,.$$

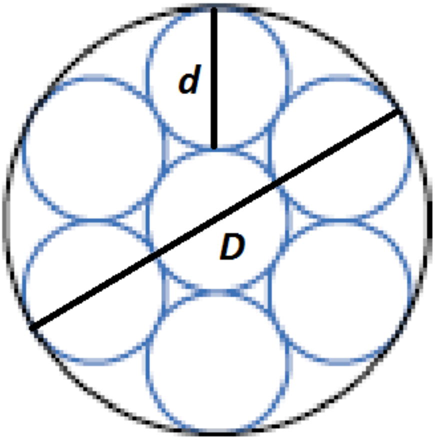
Pituus 21 cm muuttuu pituudeksi $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 21\,\text{cm} = 17{,}1464...\text{cm} \approx 17\,\text{cm}\,.$

Pituus 29 cm muuttuu pituudeksi

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 29\,\text{cm} = 23{,}6784...\text{cm} \approx 24\,\text{cm}\,.$$

Vastaus Uudet pituudet ovat 16 cm, 17 cm ja 24 cm.

**84**



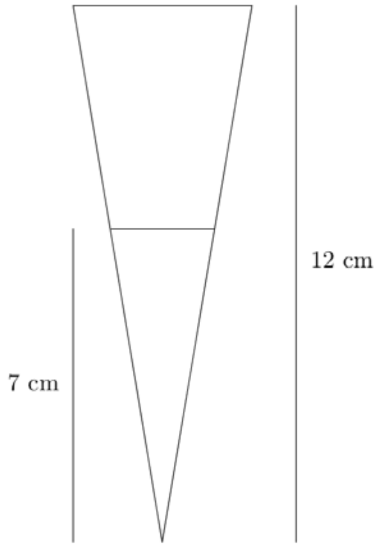

Merkitään pienen ja suuren ympyrän halkaisijoita $d$ ja $D$ ja pinta-aloja vastaavasti $A_p$ ja $A_s$. Koska $D = 3d$, saadaan pinta-alojen suhteeksi $\frac{A_p}{A_s} = \left(\frac{d}{D}\right)^2 = \left(\frac{d}{3d}\right)^2 = \frac{1}{9}$, josta $A_p = \frac{1}{9} A_s$.

Koska pieniä ympyröitä on kuviossa 7 kappaletta, kysytty pinta-alojen suhde on

$$\frac{7A_p}{A_s} = \frac{7 \cdot \frac{1}{9} A_s}{A_s} = \frac{7}{9} = 7:9 .$$

Vastaus Pinta-alojen suhde on 7 : 9.

**85**




Lasin poikkileikkaus sisältää kaksi sisäkkäistä kolmiota, jotka ovat keskenään yhdenmuotoiset kk-lauseen nojalla. Kolmioilla on yhteinen huippukulma ja kyljen sekä vaakasuorien linjojen rajaamat yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat. Itse lasi ja sisällä oleva juomapatsas ovat kartioita, ja myös nämä ovat keskenään yhdenmuotoiset. Kun lasin kokonaistilavuutta merkitään $V_L$ ja juoman tilavuutta $V_J$, saadaan tilavuuksien suhteeksi

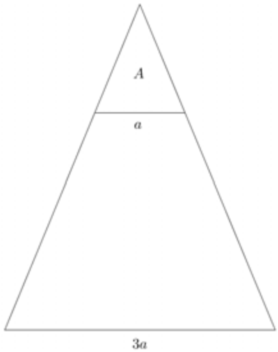
$$\frac{V_J}{V_L} = \left(\frac{7}{12}\right)^3 = 0{,}1984... \approx 20\% .$$

Juoma täyttää siis noin 20% lasin tilavuudesta, jolloin vapaa tilavuus on 100% – 20% = 80%.

Vastaus Vapaana on 80%.

**86**

Merkitään sisään syntyvän pienen kolmion kannan pituutta kirjaimella $a$, jolloin koko kolmion kanta on pituudeltaan $3a$.




Kuvan sisäkkäiset kolmiot ovat yhdenmuotiset kk-lauseen nojalla.

- Huippukulma on yhteinen
- Kantakulmat ovat samankohtaisina yhtä suuret, koska kannat ovat yhdensuuntaiset.

Merkitään huippukolmion pinta-alaa $A$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{A}{12} = \left(\frac{a}{3a}\right)^2$$

Alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{A}{12} = \frac{1}{9} \qquad | \cdot 12$$

$$A = \frac{1}{9} \cdot 12 = \frac{4}{3}$$

Pohjalle jäävän puolisuunnikkaan pinta-ala on nyt

$$12 - \frac{4}{3} = 10\frac{2}{3}.$$

Vastaus Puolisuunnikkaan pinta-ala on $10\frac{2}{3}$.

**87**

Tarvittavan päällystekullan määrä on suorassa suhteessa pinta-alaan. Pinta-alojen suhde taas on vastinpituuksien suhteen neliö. Merkitään suurempaan kupoliin tarvittavan kullan massaa $M$ ja ratkaistaan se verrantoyhtälöstä.

$$\frac{M}{85,7} = \left(\frac{2,50}{1,80}\right)^2 \quad | \cdot 85,7$$

$$M = \left(\frac{2,50}{1,80}\right)^2 \cdot 85,7$$

$M = 165,3163\ldots$

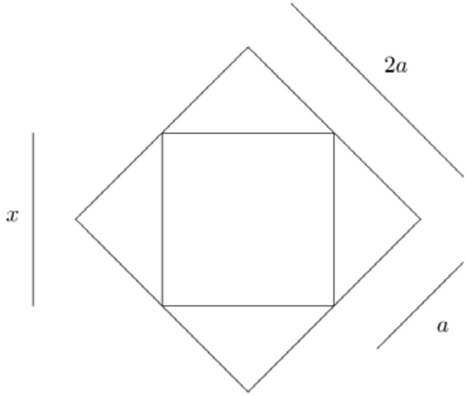
$M \approx 165$ (g)

Kultaa tarvitaan siis noin 165 g.

Vastaus Kultaa tarvitaan 165 g.

## 88

a)




Merkitään suuren neliön sivun pituutta $2a$, jolloin sivun puolikas on $a$. Merkitään edelleen pienemmän neliön sivun pituutta $x$.
Suuren neliön pinta-ala on $A_1 = (2a)^2 = 4a^2$. Sisemmän neliön ulkopuolelle jää neljä identtistä suorakulmaista kolmiota, joiden yhteispinta-ala on $4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\right)=2a^2$. Täten sisemmän neliön pinta-alaksi saadaan $A_2 = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$. Toisaalta sisemmän neliön ala on $x^2$, joten voimme ratkaista sivun pituuden yhtälöstä.

$$x^2 = 2a^2$$
$$x = \sqrt{2a^2}$$
$$x = \sqrt{2}a \qquad (a > 0)$$

Neliöiden välinen mittakaava on

$$x:(2a) = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}^{(\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1:\sqrt{2}\,.$$

Pinta-alojen suhde on

$$A_2 : A_1 = \frac{2a^2}{4a^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 1:2\,.$$

b) Edellisen kohdan perusteella seuraavan kuvioon syntyvän neliön pinta-ala on aina puolet edellisestä, jolloin pinta-alat muodostavat geometrisen jonon. Kun ensimmäisen neliön pinta-ala on $A_1$ ja jonon suhdeluku on $\frac{1}{2}$, saadaan $n$:nnen neliön pinta-ala $A_n$ kaavasta $A_n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Ratkaistaan nyt epäyhtälön avulla, millä luvun $n$ arvolla on ensimmäisen kerran $A_n < 0{,}001\, A_1$.

$A_n < 0{,}001\, A_1$

$A_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0{,}001 A_1$ $\quad | : A_1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 0{,}001$ Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$n > 10{,}9657\ldots$ $n$ on kokonaisluku.

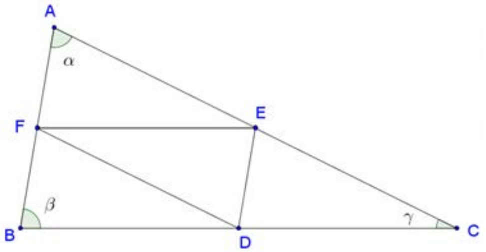
$n \geq 11$

Ensimmäinen ehdon toteuttava neliö on siis 11. neliö.

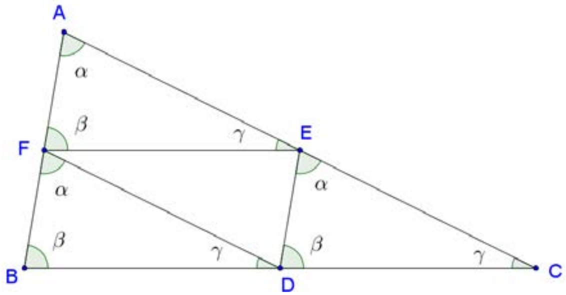
Vastaus a) Mittakaava on $1 : \sqrt{2}$ ja pinta-alojen suhde on $1 : 2$.
b) 11. neliö

**89**

a) Käytetään oheisen kuvan merkintöjä.




Koska $FE \parallel BC$, on samankohtaisuuden perusteella $\measuredangle AFE = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle AEF = \measuredangle ACB$. Koska $ED \parallel AB$, on samankohtaisuuden perusteella $\measuredangle CED = \measuredangle CAB$ ja $\measuredangle CDE = \measuredangle CBA$. Koska $DF \parallel CA$, on samankohtaisuuden perusteella $\measuredangle BDF = \measuredangle BCA$ ja $\measuredangle BFD = \measuredangle BAC$. Näiden havaintojen pohjalta voimme täydentää kuvaa.

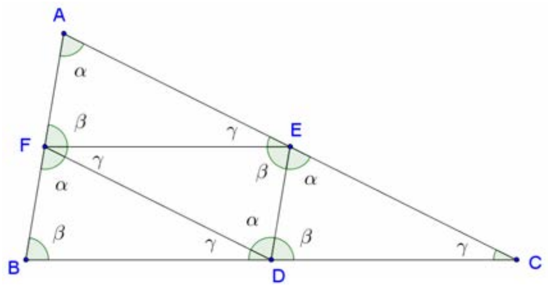



Kolmion kulmasumman perusteella $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Yllä olevasta kuvasta voidaan nyt laskea sisemmän kolmion kulmien suuruudet.

$\measuredangle EFD = 180° - \alpha - \beta = \gamma$ (Oikokulman suuruus on 180°.)

$\measuredangle FED = 180° - \alpha - \gamma = \beta$

$\measuredangle EDF = 180° - \beta - \gamma = \alpha$




Kolmion *DEF* kulmat ovat siis yhtä suuret, kuin kolmion *ABC* kulmat, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Koska kukin sisemmän kolmion sivuista on pituudeltaan puolet suuren kolmion vastinsivustaan, on kolmioiden välinen mittakaava 1 : 2. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, eli $(1 : 2)^2 = 1^2 : 2^2 = 1 : 4$.

b) Edellisen kohdan nojalla seuraavan kolmion pinta-ala on aina $\frac{1}{4}$ edellisen kolmion alasta. Sisäkköisten kolmioiden pinta-alat muodostavat näin geometrisen jonon, jossa *n*:nnen kolmion ala saadaan kaavasta $A_n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. Ratkaistaan epäyhtälön avulla, millä luvun *n* arvolla on ensimmäisen kerran $A_n < 0{,}000\,001\, A_1$.

$A_n < 0{,}000\,001\, A_1$

$A_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0{,}000001 A_1$ $\quad | : A_1$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} < 0{,}000001$ $\quad$ Ratkaistaan epäyhtälö laskimella.

$n > 10{,}9657\ldots$ $\quad$ *n* on kokonaisluku.

$n \geq 11$

Vastaus a) Mittakaava on 1 : 2 ja pinta-alojen suhde on 1 : 4.
b) 11. kolmio

**90**

a) Jos alkuperäisen kartan pinta-ala on $A_1$ ja pienennetyn kartan ala $A_2$, on pinta-alojen suhde $A_2 : A_1 = 1 : 2$. Merkitään tien pituutta alkuperäisellä kartalla $a$ ja pituutta luonnossa $d$. Ratkaistaan $d$ kahden peräkkäisen verrantoyhtälön avulla.

$$\left(\frac{13,5}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\frac{13,5}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kerrotaan ristiin.

$$a = \sqrt{2} \cdot 13,5$$

$$a = 19,0918... \text{ (cm)}$$

Edelleen,

Kerrotaan ristiin.

$$\frac{19,0918...}{d} = \frac{1}{25\,000}$$

$$d = 25\,000 \cdot 19,0918\ldots$$

$$d = 477\,297,07\ldots \text{ (cm)}$$

Tien todellinen pituus on siis noin 477 297,07 cm = 4,772… km ≈ 4,8 km.

b) Uuden, pienennetyn kartan mittakaavaksi saadaan edellisten laskujen perusteella

$$k = \frac{13,5}{477\,297,07...} = \frac{13,5}{25\,000 \cdot 19,0918...} = \frac{13,5}{25\,000 \cdot \sqrt{2} \cdot 13,5}$$

$$= \frac{1}{25\,000\sqrt{2}} = \frac{1}{35355,33...} \approx \frac{1}{35\,400} = 1 : 35\,400$$

(Huomaa, että mittakaava on peräkkäisten pienennyssuhteiden tulo.)

Vastaus a) Tien pituus kartalla on 9,5 cm.

b) Pienen kartan mittakaava on 1 : 35 000.

**91**

Kuvan neljä sisäkkäistä kolmiota ovat kaikki yhdenmuotoisia kk-lauseen nojalla, sillä niillä on yhteinen huippukulma ja kyljen ja vaakasuorien linjojen rajaamat yhtä suuret, samankohtaiset kantakulmat. Merkitään sisäkkäisten kolmioiden pinta-aloja huipulta lukien suurenevassa järjestyksessä $A_1$, $A_2$, $A_3$ ja $A_4$. Tehtävänannon perusteella $|AC| = 30$ ja pinta-alojen välillä ovat seuraavat yhteydet.
$A_2 = 2A_1$, $A_3 = 3A_1$ ja $A_4 = 4A_1$

a) Ratkaistaan janan $CD$ pituus verrantoyhtälöstä.

$$\left(\frac{|CD|}{|CA|}\right)^2 = \frac{A_1}{A_4}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{|CD|}{30}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$A_4 = 4A_1$

$$\frac{|CD|}{30} = \frac{1}{2} \qquad | \cdot 30$$

$|CD| = 15$

Janan $CD$ pituus on siis 15.

b) Janan $EF$ pituus saadaan erotuksena $|CF| - |CE|$. Ratkaistaan siis ensin $|CF|$ ja sitten $|CE|$ samaan tapaan, kuin a-kohdassa.

$$\left(\frac{|CF|}{|CA|}\right)^2 = \frac{A_3}{A_4}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$A_3 = 3A_1$ ja $A_4 = 4A_1$

$$\left(\frac{|CF|}{30}\right)^2 = \frac{3A_1}{4A_1}$$

$$\frac{|CF|}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad | \cdot 30$$

$$|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 30 = 15\sqrt{3}$$

Edelleen

$$\left(\frac{|CE|}{|CA|}\right)^2 = \frac{A_2}{A_4}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$A_2 = 2A_1$ ja $A_4 = 4A_1$

$$\left(\frac{|CE|}{30}\right)^2 = \frac{2A_1}{4A_1}$$

$$\frac{|CE|}{30} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad | \cdot 30$$

$$|CE| = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 30 = 15\sqrt{2}$$

Näiden tulosten perusteella

$$|EF| = |CF| - |CE| = 15\sqrt{3} - 15\sqrt{2} = 15(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(\approx 4{,}8)$$

Vastaus a) $|CD| = 15$

b) $|EF| = 15(\sqrt{3} - \sqrt{2})\,(\approx 4{,}8)$

**92**

Kun alkuperäisen piirroksen pinta-ala on $A_1$, niin pienennetyn piirroksen pinta-ala on $A_2 = 0{,}7A_1$. Kun kopion korkeutta merkitään kirjaimella $x$, on alkuperäisen piirroksen korkeus $x + 14$ (cm). Ratkaistaan korkeus $x$ verrantoyhtälöstä.

$$\left(\frac{x}{x+14}\right)^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

Pinta-alojen suhde on vastinpituuksien suhteen neliö.

$$\left(\frac{x}{x+14}\right)^2 = 0{,}7$$

$A_2 = 0{,}7A_1$

$$\frac{x^2}{x^2+28x+196} = 0{,}7$$

$| \cdot (x^2 + 28x + 196)\ (\neq 0)$

$x^2 = 0{,}7(x^2 + 28x + 196)$

$x^2 = 0{,}7x^2 + 19{,}6x + 137{,}2$

$0{,}3x^2 - 19{,}6x - 137{,}2 = 0$

Ratkaistaan yhtälö laskimella.

$x = 71{,}710\ldots$ tai $x = -6{,}377\ldots$

Korkeus on positiivinen.

$x \approx 72$ (cm)

Kopion korkeus on noin 72 cm.

Vastaus Kopion korkeus on noin 72 cm.

**93**

Merkitään 1 litran ja 3 litran pullojen muovimääriä $m_1$ ja $m_3$ ja tilavuuksia $V_1$ ja $V_3$. Pullot ovat yhdenmuotoiset ja niiden välinen mittakaava $k$ voidaan ratkaista kahdella eri tavalla yhtälön avulla.

$$k^2 = \frac{m_1}{m_3}$$

Muovimäärien ja pinta-alojen suhde on sama. Pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$k = \sqrt{\frac{m_1}{m_3}}$$

ja

$$k^3 = \frac{V_1}{V_3}$$

Tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$k^3 = \frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

Nyt voidaan selvittää muovimäärien suhde.

$k = k$

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\frac{m_1}{m_3} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^2 = \frac{1}{(\sqrt[3]{3})^2}$$

Kerrotaan ristiin.

$$m_3 = (\sqrt[3]{3})^2\, m_1$$

$m_3 = 2{,}0800\ldots \cdot m_1$

$m_3 \approx 2{,}1m_1$

Suuremman pullon muovimäärä on siis noin 2,1-kertainen.

Lasketaan sitten lausekkeet molempien pullojen muovimäärän ja tilavuuden suhteelle (yksikkönä muovin määrä/litra).

1 litran pullo: $\frac{m_1}{1} = m_1$

3 litran pullo: $\frac{m_3}{3} = \frac{2,0800... \cdot m_1}{3} = 0,6933... \cdot m_1$

Osamäärä

$$\frac{0,6933... \cdot m_1}{m_1} = 0,6933... \approx 69\%,$$

joten litraa kohden suuremman pullon muovimäärä on 100% – 69% = 31% pienempi.

Vastaus Suuremman pullon muovimäärä on 2,1-kertainen ja litraa kohden muovia on käytetty 31% vähemmän.