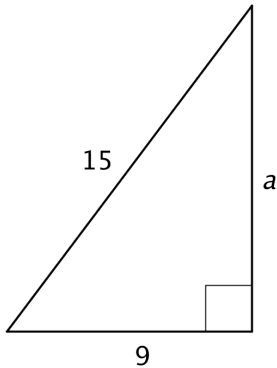


94



Pythagoraan lauseella saadaan yhtälö

$$15^2 = 9^2 + a^2$$

$$a^2 = 15^2 - 9^2$$

$$= 225 - 81$$

$$= 144$$

$$a = \pm\sqrt{144}$$

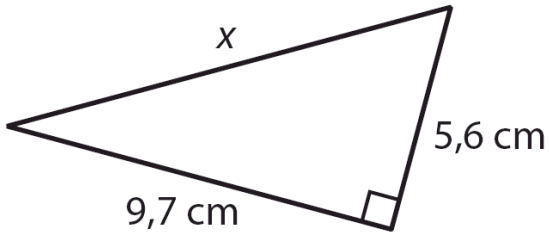
$$a = -12 \text{ tai } a = 12$$

Pituus on positiivinen, joten kateetin pituus on 12.

Vastaus Kateetin pituus on 12.

95

a)



Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö.

$$x^2 = 9,7^2 + 5,6^2$$

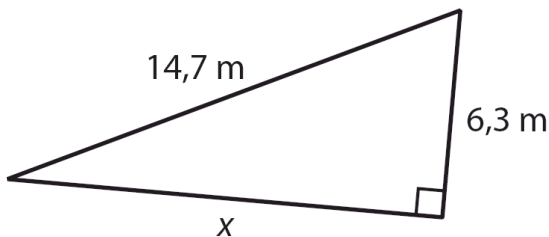
$$= 125,45$$

$$x = \pm\sqrt{125,45}$$

$$x = -11,2004\dots \text{ tai } x = 11,2004\dots$$

Sivun pituus on positiivinen, joten  $x = 11,2004\dots \approx 11$  (cm) .

b)



Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö.

$$14,7^2 = 6,3^2 + x^2$$

$$x^2 = 14,7^2 - 6,3^2$$

$$= 176,4$$

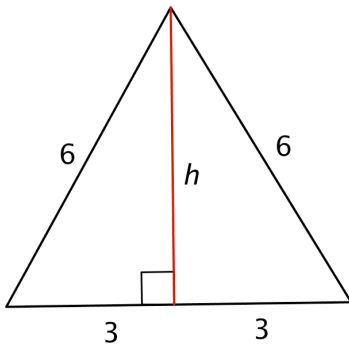
$$x = \pm\sqrt{176,4}$$

$$x = -13,28... \text{ tai } x = 13,28...$$

Sivun pituus on positiivinen, joten  $x = 13,28... \approx 13$  (m) .

Vastaus a) 11 cm b) 13 m

96



- a) Jaetaan tasasivuinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi. Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö.

$$6^2 = 3^2 + h^2$$

$$h^2 = 6^2 - 3^2$$

$$= 27$$

$$x = \pm\sqrt{27}$$

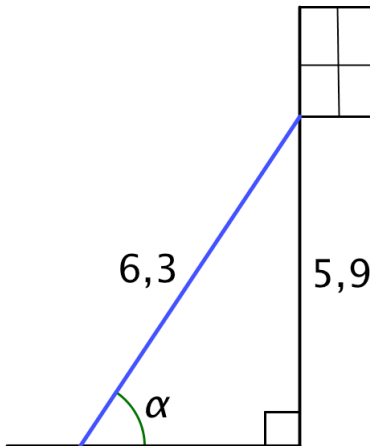
$$x = -\sqrt{27} \text{ tai } x = \sqrt{27}$$

Korkeus on positiivinen, joten  $h = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$ .

- b) Pinta-ala  $A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$ .

Vastaus a)  $3\sqrt{3}$       b)  $9\sqrt{3}$

97



Koska tikkaiden pituus on suurempi kuin ikkunalaudan korkeus maanpinnasta, tikkaat sinällään yltyvät ikkunalaudalle. Selvitetään, mikä tällöin on maanpinnan ja tikkaiden välinen kulma, jotta tiedetään, voiko tikkaita käyttää tässä tilanteessa.

$$\sin \alpha = \frac{5,9}{6,3}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{5,9}{6,3}$$

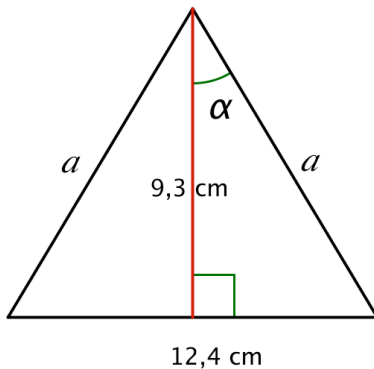
$$= 69,47\dots^\circ$$

$$\approx 69^\circ$$

Koska  $55^\circ \leq 69^\circ \leq 75^\circ$ , niin tikkailla voi kiivetä ikkunalaudalle.

Vastaus Yltävät

98



Jaetaan tasakylkinen kolmio korkeusjanan avulla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi.

Kolmion kyljen pituus saadaan laskettua Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 9,3^2 + \left(\frac{12,4}{2}\right)^2 \\
 &= 9,3^2 + 6,2^2 \\
 &= 124,93 \\
 a &= \pm\sqrt{124,93}
 \end{aligned}$$

Pituus on positiivinen, joten  $a = \sqrt{124,93} = 11,177\dots \approx 11$  (cm).

Huippukulma saadaan suorakulmaisen kolmion kulman  $\alpha$  avulla.

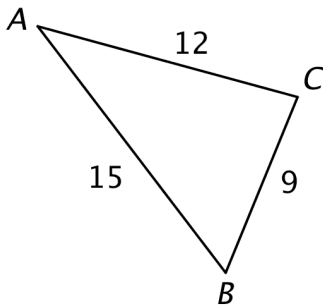
$$\tan \alpha = \frac{6,2}{9,3}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \tan^{-1} \frac{6,2}{9,3} \\ &= 33,69\dots^\circ\end{aligned}$$

Huippukulma on  $2\alpha = 2 \cdot 33,69\dots^\circ = 67,38\dots^\circ \approx 67^\circ$ .

Vastaus    Kylki on 11 cm, huippukulma  $67^\circ$ .

99



- a) Tutkitaan toteutuuko Pythagoraan lause. Pisin sivu on ehdokas hypotenuusaksi, lyhyemmät kateeteiksi.

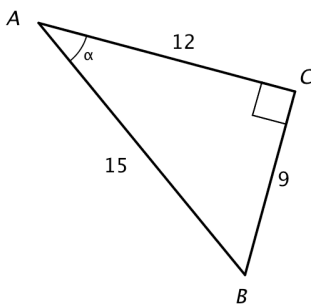
$$9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Toisaalta

$$15^2 = 225$$

Kolmio toteuttaa Pythagoraan lauseen, joten se on suorakulmainen.

- b) Pienin kulma on lyhintä sivua vastassa, joten on laskettava kulma  $A$ .





$$\tan \alpha = \frac{9}{12}$$

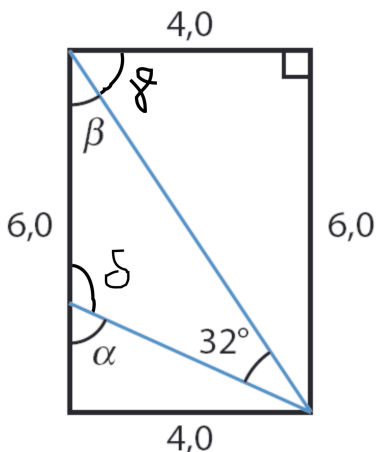
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{9}{12}$$

$$= 36,86\dots^\circ$$

$$\approx 36,9^\circ$$

Vastaus    a) Kolmio on suorakulmainen.  
              b) Pienin kulma on  $36,9^\circ$ .

100



Käytetään kuvan merkintöjä. Lasketaan ensin kulma  $\gamma$ .

$$\tan \gamma = \frac{6,0}{4,0}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \tan^{-1} \frac{6,0}{4,0} \\ &= 56,309\dots^\circ \end{aligned}$$

Nyt saadaan selville kulma  $\beta$ .

$$\beta = 90^\circ - \gamma = 90^\circ - 56,309\dots^\circ = 33,69\dots^\circ \approx 34^\circ$$

Kolmion kulmien summa on  $180^\circ$ , joten kulma  $\delta$  saadaan selville kulman  $\beta$  avulla.

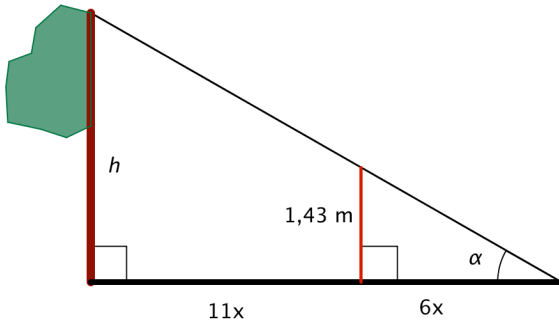
$$\delta = 180^\circ - 32^\circ - \beta = 148^\circ - \beta$$

Kulma  $\alpha$  on kulman  $\delta$  vieruskulma.

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - \delta \\ &= 180^\circ - (148^\circ - \beta) \\ &= 180^\circ - 148^\circ + \beta \\ &= 32^\circ + \beta \\ &= 32^\circ + 33,69\dots^\circ \\ &= 65,69\dots^\circ \approx 66^\circ\end{aligned}$$

Vastaus  $\alpha = 66^\circ$ ,  $\beta = 34^\circ$

101



Männyn varjon pituus on  $11x + 6x = 17x$ , jossa  $x$  on Juuson kengän pituus 28 cm eli 0,28 m.

a) Suorakulmaisten kolmioiden avulla saadaan yhtälöt

$$\tan \alpha = \frac{1,43}{6x} \text{ ja toisaalta } \tan \alpha = \frac{h}{17x}.$$

Merkitään oikeat puolet yhtä suuriksi ja ratkaistaan saatu yhtälö.

$$\frac{h}{17x} = \frac{1,43}{6x}$$

$$h = \frac{17\cancel{x} \cdot 1,43}{6\cancel{x}}$$

$$= \frac{17 \cdot 1,43}{6}$$

$$= 4,0516... \approx 4,1 \text{ (m)}$$

b) Pienemmän suorakulmaisen komion avulla saadaan yhtälö

$$\tan \alpha = \frac{1,43 \cancel{\text{ m}}}{6 \cdot 0,28 \cancel{\text{ m}}}$$

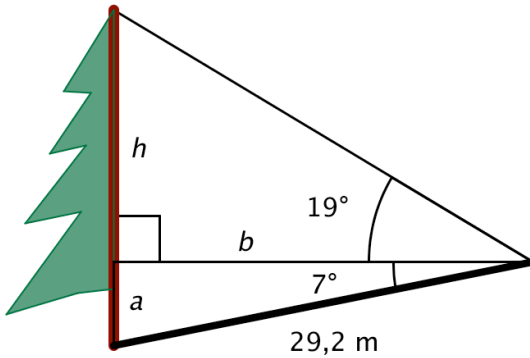
$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1,43}{6 \cdot 0,28}$$

$$= 40,404\dots^\circ \approx 40^\circ$$

c) b-kohdan perusteella aurinko on  $40^\circ$  horisontin yläpuolella.

Vastaus     a) 4,1 m     b)  $40^\circ$      c)  $40^\circ$

102



Käytetään kuvan merkintöjä. Lasketaan ensin alemman suorakulmaisen kolmion avulla kateetit  $a$  ja  $b$ .

Tämän jälkeen lasketaan ylemmän suorakulmaisen kolmion avulla  $19^\circ$  kulman vastaisen kateetin pituus  $h$ .

Kysytty kuusen pituus on  $a + h$ .

$$\sin 7^\circ = \frac{a}{29,2}$$

$$\begin{aligned} a &= 29,2 \cdot \sin 7^\circ \\ &= 3,558\dots \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\cos 7^\circ = \frac{b}{29,2}$$

$$\begin{aligned} b &= 29,2 \cdot \cos 7^\circ \\ &= 28,982\dots \text{ (m)} \end{aligned}$$

$$\tan 19^\circ = \frac{h}{b}$$

$$h = b \tan 19^\circ$$

$$= 28,982... \cdot \tan 19^\circ$$

$$= 9,979... \text{ (m)}$$

$$a + h = 3,558... + 9,979...$$

$$= 13,53...$$

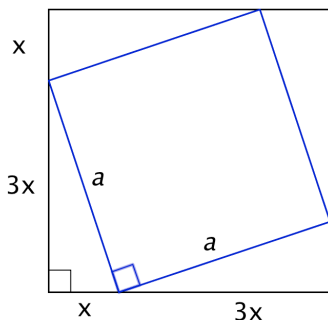
$$\approx 13,5 \text{ (m)}$$

Kuusen pituus on 13,5 m.

Vastaus      13,5 m

103

a)



Lasketaan sisemmän sinisen neliön sivun pituus Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat  $x$  ja  $3x$ .

$$a^2 = x^2 + (3x)^2 = x^2 + 9x^2 = 10x^2$$

$$a = \pm\sqrt{10x^2}$$

$$= \pm\sqrt{10}|x| \quad |x > 0$$

$$= \pm\sqrt{10}x$$

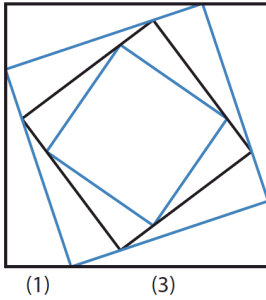
Neliön sivun pituus on positiivinen, joten  $a = \sqrt{10}x$ .

Neliöiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\text{sisäneliö}}}{A_{\text{ulkoneliö}}} = \frac{(\sqrt{10}x)^2}{(4x)^2} = \frac{10x^{\cancel{2}}}{16x^{\cancel{2}}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$



b)



Sisäkkäisten neliöiden pinta-alat muodostavat geometrisen jonon  $A_1, A_2, A_3, \dots$ , jossa ensimmäinen termi on  $A_1$  ja jonon suhdeluku a-kohdan mukaan  $q = \frac{5}{8}$ .

Yleisen termin lauseke on  $A_n = A_1 \cdot q^{n-1} = A_1 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$ .

Etsitään pienin arvo indeksille  $n$  niin, että  $A_n < \frac{1}{1000} A_1$ .

$$A_n < \frac{1}{1000} A_1$$

$$A_1 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000} A_1 \quad | : A_1 (> 0)$$

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{1}{1000} \quad | \text{Ratkaistaan laskimella.}$$

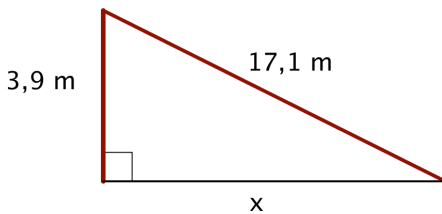
$$n > 15,6\dots \quad | n = 1, 2, 3, \dots$$

$$n \geq 16$$

Vastaus a) Alojen suhde on  $\frac{5}{8}$ . b) 16. neliö

## 104

Männyn taittuneen latvaosan pituus on  $21 - 3,9 = 17,1$  metriä. Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään vaakasuoran kateetin pituus  $x$  ja verrataan sitä oravan käypäjän 16 m pitkään etäisyyteen männyn tyvestä.

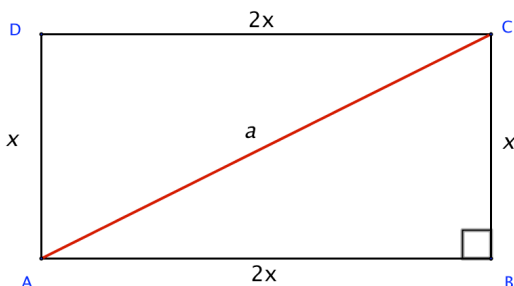
Pythagoraan lauseella saadaan

$$\begin{aligned} x^2 + 3,9^2 &= 17,1^2 \\ x^2 &= 17,1^2 - 3,9^2 \\ &= 277,2 \\ x &= \pm\sqrt{277,2} \\ &= \pm 16,64\dots \\ &\approx \pm 16,6 \text{ (m)} \end{aligned}$$

Kateetin pituus on positiivinen, joten  $x = 16,6$  m. Koska  $16,6 \text{ m} > 16 \text{ m}$ , niin orava ei ole turvassa käypäjälläan.

Vastaus     Ei ole turvassa.

## 105



Lasketaan oikotien  $AC$  pituus  $a$  sekä peltoa kiertävän reitin  $ABC$  pituus. Verrataan saatuja matkoja toisiinsa.

Pythagoraan lauseella saadaan

$$a^2 = (2x)^2 + x^2$$

$$= 4x^2 + x^2$$

$$= 5x^2$$

$$a = \pm\sqrt{5x^2}$$

$$= \pm\sqrt{5}|x| \quad |x > 0$$

$$= \pm\sqrt{5}x$$

Pellon lävistäjän pituus on positiivinen, joten  $a = \sqrt{5}x$ .

Peltoa kiertävän reitin  $ABC$  pituus on  $2x + x = 3x$ .

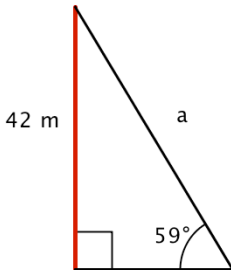
Verrataan oikoreitin pituutta peltoa kiertävän reitin pituuteen:

$$\frac{\sqrt{5}x}{3x} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0,74535\dots = 74,535\dots\%$$

Oikotie on  $100\% - 74,535\dots\% = 25,464\dots\% \approx 25,5\%$  lyhyempi.

Vastaus      Oikotie on 25,5 % lyhyempi.

## 106



Merkitään yhden vaijerin pituutta kirjaimella  $a$ .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\sin 59^\circ = \frac{42}{a}$$

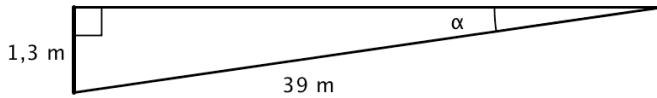
$$a \sin 59^\circ = 42$$

$$a = \frac{42}{\sin 59^\circ}$$

Vaijeria tarvitaan  $3a = 3 \cdot \frac{42}{\sin 59^\circ} = 146,99... \approx 150$  (m).

Vastaus 150 metriä

107



Merkitään kysyttyä kulmaa kirjaimella  $\alpha$ .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

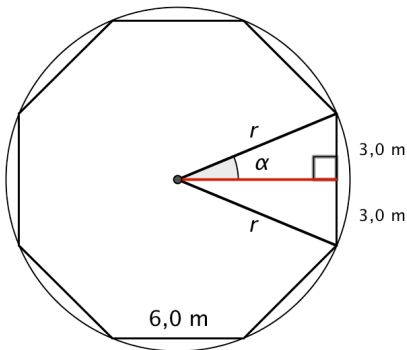
$$\sin \alpha = \frac{1,3}{39}$$

$$\alpha = \sin^{-1} \frac{1,3}{39}$$

$$\alpha = 1,91\dots^\circ \approx 1,9^\circ$$

Vastaus       $1,9^\circ$

## 108



Säännöllinen 8-kulmio voidaan jakaa 8 samanlaiseen tasakylkiseen kolmioon. Jaetaan tällainen tasakylkinen kolmio korkeusjanalla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi kuvan mukaisesti.

Suorakulmaisen kolmion terävä kulma on  $\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{360^\circ}{8} = 22,5^\circ$ .

Muodostetaan yhtälö sinin avulla.

$$\sin 22,5^\circ = \frac{3,0}{r}$$

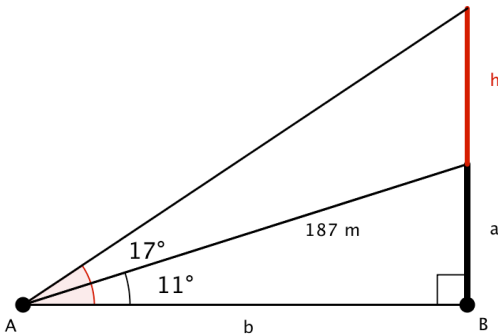
$$r \sin 22,5^\circ = 3,0$$

$$r = \frac{3,0}{\sin 22,5^\circ}$$

$$= 7,83\dots \approx 7,8 \text{ (m)}$$

Vastaus      7,8 metriä

109



Merkitään suon pinnasta mitattua mäen korkeutta kirjaimella  $a$  ja tornin korkeutta kirjaimella  $h$ .

- a) Muodostetaan mäen korkeuden  $a$  laskemiseksi yhtälö sinin avulla.

$$\sin 11^\circ = \frac{a}{187}$$

$$a = 187 \sin 11^\circ$$

$$= 35,68\dots$$

$$\approx 36 \text{ (m)}$$



- b) Tornin korkeuden  $h$  laskemiseksi selvitetään ensin kosinin avulla tarkastelupisteen  $A$  vaakasuora etäisyys  $b$  tornin jatkeella olevasta pisteestä  $B$ .

Lasketaan sen jälkeen tangentin avulla tornin ja mäen yhteinen korkeus  $a + h$ , josta selvitetään kysytty  $h$ .

$$\cos 11^\circ = \frac{b}{187}$$

$$b = 187 \cos 11^\circ$$

$$\tan 17^\circ = \frac{a + h}{b}$$

$$b \tan 17^\circ = a + h$$

$$h = b \tan 17^\circ - a$$

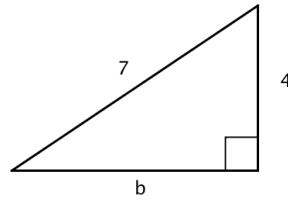
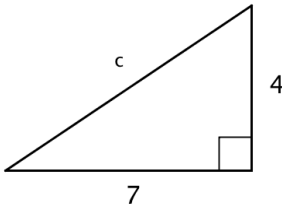
$$= 187 \cos 11^\circ \cdot \tan 17^\circ - 187 \sin 11^\circ$$

$$= 20,43\dots$$

$$\approx 20 \text{ (m)}$$

Vastaus      a) 36 m      b) 20 m

## 110



Kun suorakulmaisesta kolmiosta tunnetaan kaksi sivua, niin kolmannen sivun pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseen avulla. Annettu pidempi sivun pituus 7 voi olla joko kateetti tai hypotenuusa. Käsitellään nämä tapaukset erikseen.

- 1) Selvitetään hypotenuusan pituus  $c$ , kun kateetit ovat 4 ja 7.

$$\begin{aligned} c^2 &= 7^2 + 4^2 \\ &= 49 + 16 \\ &= 65 \\ c &= \pm\sqrt{65} \end{aligned}$$

Pituus on positiivinen, joten hypotenuusan pituus on  $\sqrt{65}$ .

- 2) Selvitetään kateetin pituus  $b$ , kun toisen kateetin pituus on 4 ja hypotenuusan pituus 7.

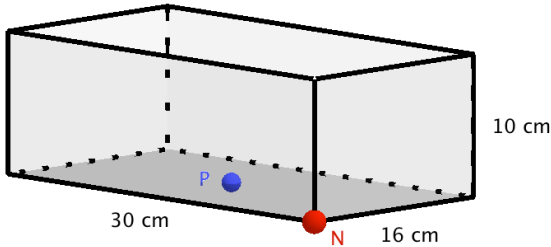
$$\begin{aligned} 7^2 &= b^2 + 4^2 \\ b^2 &= 7^2 - 4^2 \\ &= 49 - 16 \\ &= 33 \\ b &= \pm\sqrt{33} \end{aligned}$$

Pituus on positiivinen, joten kateetin pituus on  $\sqrt{33}$ .

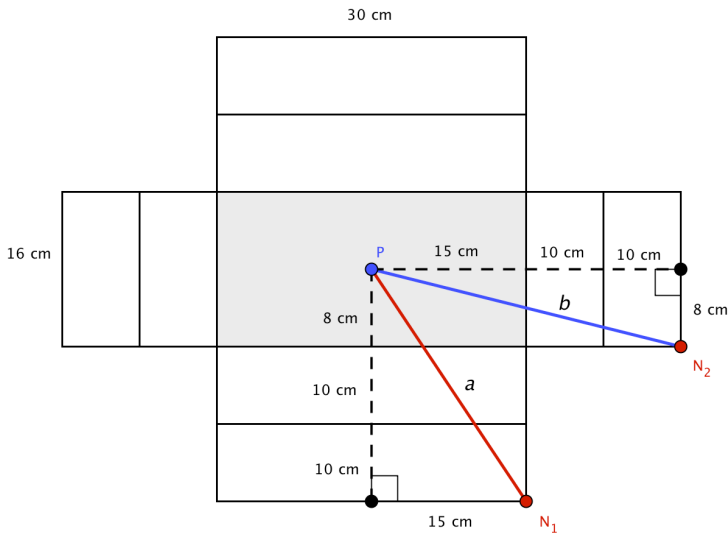
Kolmion kolmannen sivun pituus on  $\sqrt{33}$  tai  $\sqrt{65}$ .

Vastaus  $\sqrt{33}$  tai  $\sqrt{65}$

111



Lyhimmän reitin määrittäminen kolmiulotteisen laatikon pinnalla on hankalaa. Piirretään laatikko tasokuviona niin, että reunojen sisä- ja ulkopinnat näkyvät erikseen.



Lyhin reitti on joko punainen  $PN_1$  tai sininen  $PN_2$ . Lasketaan niiden pituudet ja valitaan lyhyempi.

***PN<sub>1</sub>***:

$$a^2 = 28^2 + 15^2$$

$$= 1009$$

$$a = (\pm)\sqrt{1009}$$

$$= 31,7\dots$$

***PN<sub>2</sub>***:

$$b^2 = 35^2 + 8^2$$

$$= 1289$$

$$a = (\pm)\sqrt{1289}$$

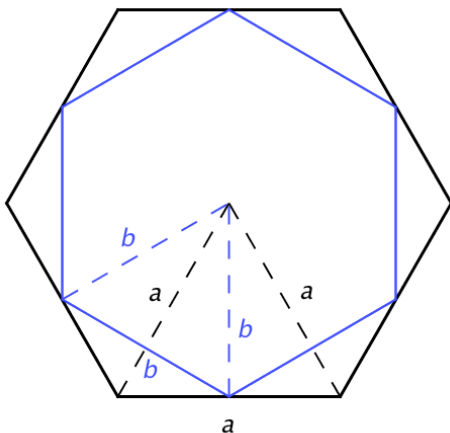
$$= 35,9\dots$$

Lyhin reitti on punaisella piirretty  $PN_1$  ja sen pituus on  $31,7\dots \approx 32$  cm.

Vastaus      32 cm

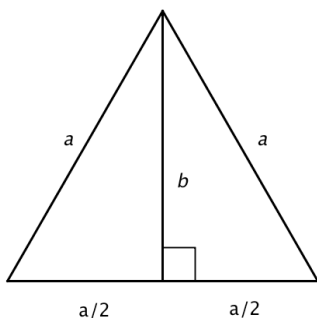
112

a)



Säännöllinen kuusikulmio voidaan jakaa kuuteen yhtenevään tasasivuiseseen kolmioon.

Merkitään alkuperäisen kuusikulmion sivua kirjaimella  $a$  ja sen sisään piirretyn kuusikulmion sivua kirjaimella  $b$ .



Sisemmän kuusikulmion sivun pituus on sama kuin ulommasta kuusikulmiosta erotetun tasasivuisen kolmion korkeus.

Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö.

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = b^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}a^2$$

$$b = (\pm)\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}|a| \quad |a > 0$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Kuusikulmioiden mittakaava  $k = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Pinta-alojen suhde on  $\frac{A_{\text{ulompi}}}{A_{\text{sisempi}}} = k^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ .

b) Merkitään ensimmäisen kuusikulmion pinta-alaa kirjaimella  $A_1$  ja seuraavien kuusikulmioiden pinta-aloja  $A_2, A_3, \dots$ .

Pinta-alat muodostavat geometrisen jonon, jossa peräkkäisten

termien suhdeluku on a-kohdan perusteella  $q = \frac{3}{4}$ .

Jonon  $n$ :nnen termin lauseke on  $A_n = A_1 \cdot q^{n-1} = A_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ .

Muodostetaan epäyhtälö.

$$A_n < \frac{A_1}{1\,000\,000}$$

$$A_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{A_1}{10^6} \quad | : A_1 (> 0)$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} < \frac{1}{10^6} \quad | \text{ Ratkaistaan laskimella}$$

$$n > 49,02\dots \quad | n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$n \geq 50$$

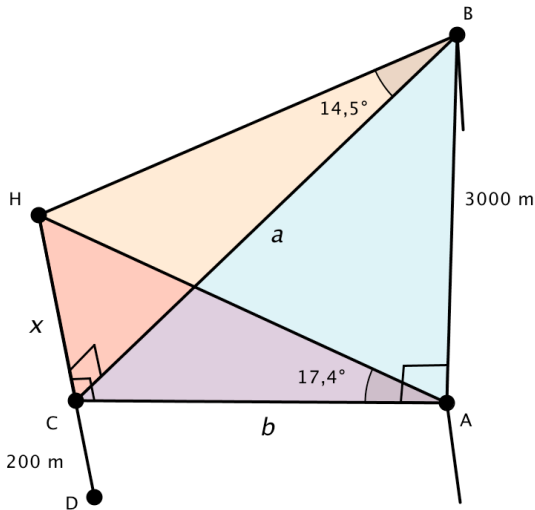
Ensimmäinen kuusikulmio, jonka ala on pienempi kuin miljoonasosa alkuperäisen kuusikulmion alasta on  $A_{50}$ .

Vastaus a) Mittakaava on  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ja pinta-alojen suhde  $\frac{3}{4}$ .

b) 50. Kuusikulmio

Huomaa: Epäyhtälön voi ratkaista myös kokeilemalla, kun perustelee ensin, että kuusikulmion  $A_n$  ala pienenee, kun  $n$  kasvaa.

113



Tavoitteena on laskea ensin vuoren huipun etäisyys  $x$  havaintopisteiden kautta kulkevasta vaakasuorasta tasosta. Tämän jälkeen saadaan kysytty vuoren korkeus merenpinnasta  $D$  lisäämällä laskettuun arvoon 200 metriä.

Muodostetaan yhtälöt kuvan kolmen suorakulmaisen kolmion avulla.

1) Kolmio  $ACH$ :  $\tan 17,4^\circ = \frac{x}{b}$

2) Kolmio  $BCH$ :  $\tan 14,5^\circ = \frac{x}{a}$

3) Kolmio  $ABC$ :  $a^2 = b^2 + 3000^2$

Huomataan, että saatiin kolme yhtälöä, joissa on yhteensä kolme tuntematonta muuttujaa. Tarkoituksena on ratkaista muuttuja  $x$ .



Ratkaistaan ensin  $a$  ja  $b$  yhtälöistä 1 ja 2. Sijoitetaan ne sen jälkeen yhtälöön 3 ja ratkaistaan  $x$ .

$$1) \tan 17,4^\circ = \frac{x}{b} \quad \text{eli} \quad b = \frac{x}{\tan 17,4^\circ}$$

$$2) \tan 14,5^\circ = \frac{x}{a} \quad \text{eli} \quad a = \frac{x}{\tan 14,5^\circ}$$

$$3) \quad a^2 = b^2 + 3000^2$$

$$\left( \frac{x}{\tan 14,5^\circ} \right)^2 = \left( \frac{x}{\tan 17,4^\circ} \right)^2 + 3000^2 \quad \left| \text{Ratkaistaan laskimella.} \right.$$

$$x = -1373,7\dots \quad \text{tai} \quad x = 1373,7\dots$$

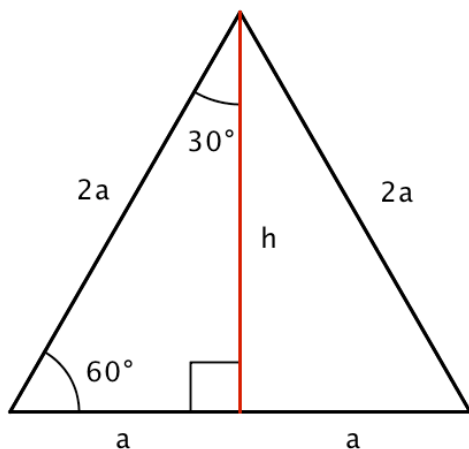
Etäisyys  $x$  on positiivinen, joten  $x = 1373,7\dots$  m.

Vuoren korkeus merenpinnasta on

$$x + 200 \text{ m} = 1373,7\dots \text{ m} + 200 \text{ m} = 1573,7\dots \text{ m} \approx 1570 \text{ m.}$$

Vastaus                      1570 m

## 114



Merkitään tasasivuisen kolmion sivujen pituuksia  $2a$ :lla.

Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat  $60^\circ$ .

Jaetaan tasasivuinen kolmio korkeusjanan avulla kahdeksi suorakulmaiseksi kolmioksi, joilloin niissä molemmissa on  $60^\circ$  ja  $30^\circ$  kulmat. Tasasivuisen kolmion korkeus  $h$  voidaan laskea Pythagoraan lauseella suorakulmaisesta kolmiosta.

$$(2a)^2 = a^2 + h^2$$

$$h^2 = 4a^2 - a^2$$

$$= 3a^2$$

$$h = (\pm)\sqrt{3a^2}$$

$$= \sqrt{3}|a| \quad |a > 0$$

$$= \sqrt{3}a$$

Määritetään kysytyt sinin, kosinin ja tangentin arvot tunnetun suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\text{a) } \sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{a}{h} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

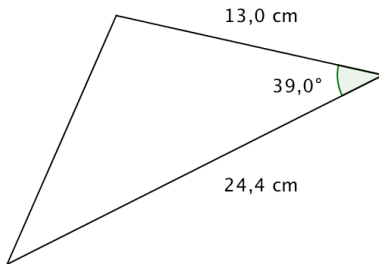
$$\text{b) } \sin 60^\circ = \frac{h}{2a} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

Vastaus	a) $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	b) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

115



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 13,0 \\ b = 24,4 \\ \gamma = 39,0^\circ \end{array} \right.$$

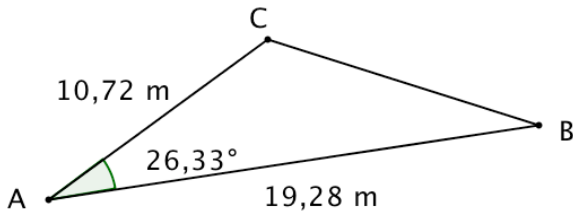
$$= \frac{1}{2} \cdot 13,0 \cdot 24,4 \cdot \sin 39,0^\circ$$

$$= 99,81\dots$$

$$\approx 99,8 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus  $99,8 \text{ cm}^2$

116



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 19,28 \\ b = 10,72 \\ \gamma = 26,33^\circ \end{array} \right.$$

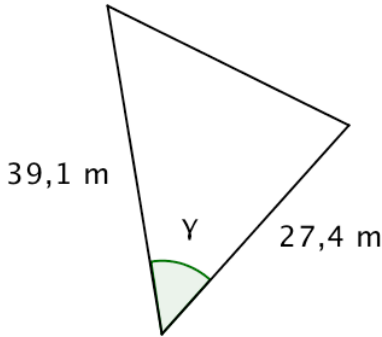
$$= \frac{1}{2} \cdot 19,28 \cdot 10,72 \cdot \sin 26,33^\circ$$

$$= 45,8358\dots$$

$$\approx 45,84 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus  $45,84 \text{ m}^2$

117



Kolmion pinta-ala on  $346 \text{ m}^2$ . Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 27,4 \text{ m} \\ b = 39,1 \text{ m} \\ A = 346 \text{ m}^2 \end{array} \right.$$

$$346 = \frac{1}{2} \cdot 27,4 \cdot 39,1 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 346}{27,4 \cdot 39,1} = 0,645\dots$$

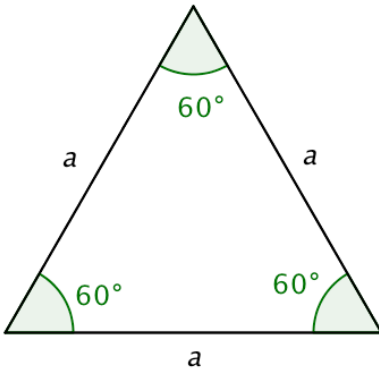
$$\gamma = \sin^{-1} 0,645\dots = 40,23\dots^\circ \approx 40,2^\circ$$

Koska  $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$ , niin kulmaksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 40,23\dots^\circ = 139,76\dots^\circ \approx 139,8^\circ.$$

Vastaus  $40,2^\circ$  tai  $139,8^\circ$

118



Tasakylkisen kolmion kaikki kulmat ovat  $60^\circ$ . Merkitään kolmion sivujen pituutta kirjaimella  $a$ . Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2} a \cdot a \sin 60^\circ$$

$$60 = \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ$$

$$120 = a^2 \sin 60^\circ$$

$$a^2 = \frac{120}{\sin 60^\circ}$$

$$a = \pm \sqrt{\frac{120}{\sin 60^\circ}} = \pm 11,771\dots \approx \pm 11,8$$

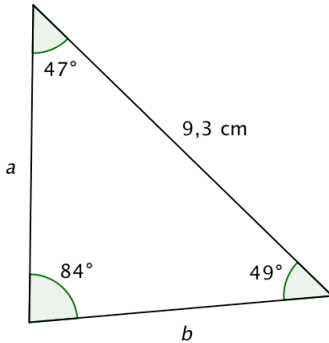
Sivun pituus on positiivinen, joten  $a = 11,8$ .

Vastaus            11,8

## 119

Kolmion kolmas kulma on  $180^\circ - 84^\circ - 49^\circ = 47^\circ$ .

Pisin sivu on suurimman  $84^\circ$  kulman vastainen sivu.



Muodostetaan yhtälöt sivujen  $a$  ja  $b$  pituuksien selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 49^\circ} = \frac{9,3}{\sin 84^\circ}$$

$$a = \frac{9,3}{\sin 84^\circ} \cdot \sin 49^\circ = 7,057\dots \approx 7,1 \text{ (cm)}$$

$$\frac{b}{\sin 47^\circ} = \frac{9,3}{\sin 84^\circ}$$

$$b = \frac{9,3}{\sin 84^\circ} \cdot \sin 47^\circ = 6,839\dots \approx 6,8 \text{ (cm)}$$

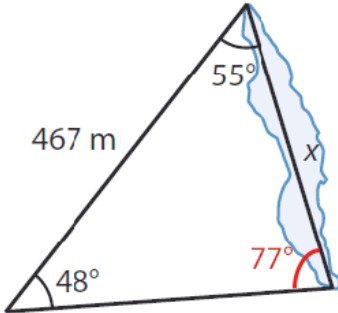
Sivujen pituudet ovat  $6,8 \text{ cm}$  ja  $7,1 \text{ cm}$ .

Vastaus  $6,8 \text{ cm}$  ja  $7,1 \text{ cm}$



## 120

Kolmion kolmas kulma on  $180^\circ - 48^\circ - 55^\circ = 77^\circ$ .



Muodostetaan yhtälö lammen pituuden  $x$  selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin 48^\circ} = \frac{467}{\sin 77^\circ}$$

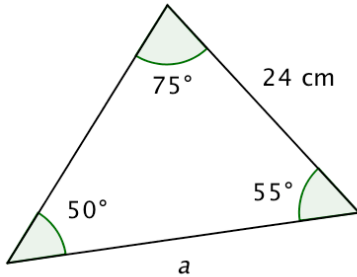
$$x = \frac{467}{\sin 77^\circ} \cdot \sin 48^\circ = 356,17\dots \approx 356 \text{ (m)}$$

Lammen pituus on  $x = 356$  m.

Vastaus  $x = 356$  m

**121**

Kolmion kolmas kulma on  $180^\circ - 75^\circ - 55^\circ = 50^\circ$ .



Muodostetaan yhtälö sivun  $a$  pituuden selvittämiseksi sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{24}{\sin 50^\circ}$$

$$a = \frac{24}{\sin 50^\circ} \cdot \sin 75^\circ = 30,26\dots \text{ (cm)}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}absin\gamma \quad \left| \begin{array}{l} a = 30,26\dots \text{ cm} \\ b = 24 \text{ cm} \\ \gamma = 55^\circ \end{array} \right.$$

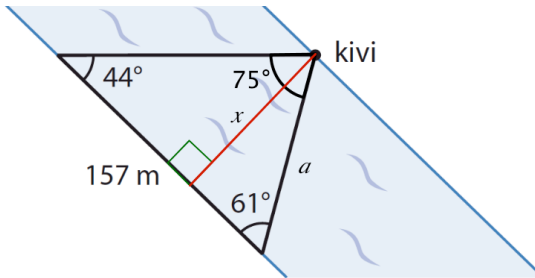
$$= \frac{1}{2} \cdot 30,26\dots \cdot 24 \cdot \sin 55^\circ$$

$$= 297,47\dots \approx 297 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vastaus  $297 \text{ cm}^2$

## 122

Täydennetään kuvaan kysytty joen leveys  $x$  ja kolmas kulma  $180^\circ - 44^\circ - 61^\circ = 75^\circ$ .



Lasketaan ensin suorakulmaisen kolmion kateetti  $a$  alkuperäisestä kolmiosta sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin 44^\circ} = \frac{157}{\sin 75^\circ}$$

$$a = \frac{157}{\sin 75^\circ} \cdot \sin 44^\circ = 112,908... \text{ (cm)}$$

Joen leveys saadaan suorakulmaisen kolmion avulla.

$$\sin 61^\circ = \frac{x}{a}$$

$$x = a \sin 61^\circ$$

$$= 112,908... \cdot \sin 61^\circ$$

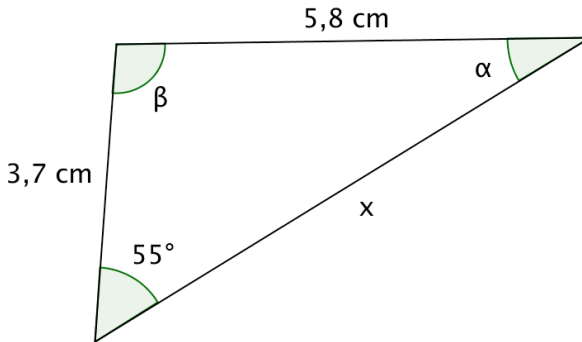
$$= 98,752...$$

$$\approx 99 \text{ (m)}$$

Vastaus                      99 m

## 123

Piirretään tilanteesta kuva.



Selvitetään ensin kulma  $\alpha$  sinilauseen avulla.

$$\frac{3,7}{\sin \alpha} = \frac{5,8}{\sin 55^\circ}$$

$$5,8 \sin \alpha = 3,7 \sin 55^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{3,7 \sin 55^\circ}{5,8} = 0,522\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,522\dots = 31,504\dots^\circ \approx 32^\circ$$

Koska  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , niin ratkaisuksi saadaan myös

$$\alpha = 180^\circ - 31,504\dots^\circ = 148,49\dots^\circ \approx 148^\circ.$$

Kulma  $\beta$  saadaan kolmion kulmien summan avulla.

- Kun  $\alpha = 32^\circ$ , niin

$$\beta = 180^\circ - 55^\circ - 31,504\dots^\circ = 93,495\dots^\circ \approx 93^\circ$$

Kelpaa kolmion kulmaksi, joten  $\alpha = 32^\circ$  ja  $\beta = 93^\circ$ .

- Kun  $\alpha = 148^\circ$ , niin

$$\beta = 180^\circ - 55^\circ - 148,49\dots^\circ = -23,49\dots^\circ$$

Ei kelpaa kolmion kulmaksi, joten myöskään arvo  $\alpha = 148^\circ$  ei ole mahdollinen.

Sivun pituus  $x$  saadaan sinilauseen avulla.

$$\frac{x}{\sin \beta} = \frac{5,8}{\sin 55^\circ}$$

$$x = \frac{5,8 \sin \beta}{\sin 55^\circ}$$

$$= \frac{5,8 \sin 93,495\dots^\circ}{\sin 55^\circ}$$

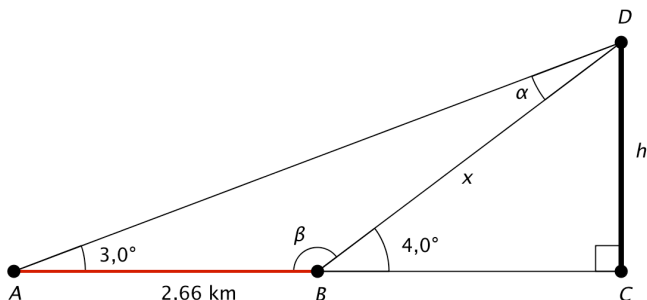
$$= 7,067\dots \approx 7,1 \text{ (cm)}$$

Muut kulmat ovat  $32^\circ$  ja  $93^\circ$  sekä kolmas sivu 7,1 cm.

Vastaus                      Kulmat  $32^\circ$  ja  $93^\circ$  sekä sivu 7,1 cm

## 124

Piirretään tilanteesta kuva.



Kilpisjärven pinnan tasossa oleva piste  $C$  on 473 metrin korkeudella merenpinnasta. Selvitetään ensin huipun korkeus  $h$  järven pinnasta mitattuna. Saanan huipun korkeus merenpinnasta on  $h + 473$  m.

Selvitetään suorakulmaisen kolmion  $BCD$  hypotenuusan pituus  $x$  sinilauseen avulla kolmiosta  $ABD$ .

Kulma  $\beta = 180^\circ - 4,0^\circ = 176,0^\circ$  ja

kulma  $\alpha = 180^\circ - 3,0^\circ - 176,0^\circ = 1,0^\circ$ .

$$\frac{x}{\sin 3,0^\circ} = \frac{2,66}{\sin \alpha}$$

$$x = \frac{2,66 \cdot \sin 3,0^\circ}{\sin \alpha} \quad | \quad \alpha = 1,0^\circ$$

$$= \frac{2,66 \cdot \sin 3,0^\circ}{\sin 1,0^\circ}$$

$$= 7,976... \text{ (km)}$$

Suorakulmaisesta kolmiosta  $BCD$  saadaan

$$\sin 4,0^\circ = \frac{h}{x}$$

$$h = x \cdot \sin 4,0^\circ$$

$$= 7,976\dots \cdot \sin 4,0^\circ$$

$$= 0,5564\dots \text{ (km)}$$

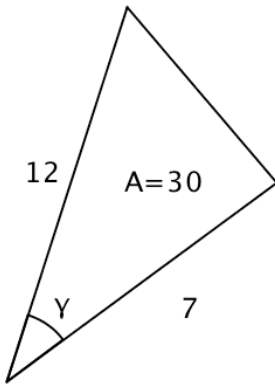
$$h = 0,5564\dots \text{ km} = 556,4\dots \text{ m}$$

Lasketaan Saanan huipun etäisyys merenpinnan tasosta.

$$h + 473 \text{ m} = 556,4\dots \text{ m} + 473 \text{ m} = 1029,4\dots \text{ m} \approx 1030 \text{ m}$$

Vastaus                    1030 m

125



Muodostetaan yhtälö.

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 7 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 30}{12 \cdot 7} = 0,714\dots$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,714\dots = 45,58\dots^\circ \approx 45,6^\circ$$

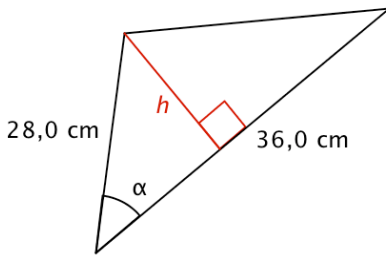
Koska  $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$ , niin kulmaksi kelpaa myös

$$180^\circ - 45,58\dots^\circ = 134,41\dots^\circ \approx 134,4^\circ$$

Vastaus  $45,6^\circ$  tai  $134,4^\circ$



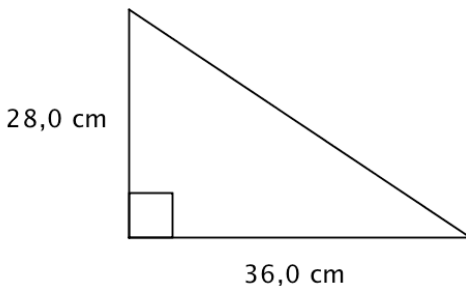
126



Valitaan kolmion kannaksi  $36,0 \text{ cm}$  pituinen sivu.

Kolmion pinta-ala on mahdollisimman suuri, kun kolmion korkeus  $h$  on mahdollisimman suuri.

Kolmion korkeuden suurin mahdollinen arvo on  $h = 28,0 \text{ cm}$ , kun kulma  $\gamma = 90^\circ$ .

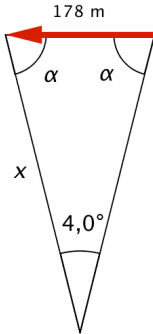


Kolmion pinta-alan suurin mahdollinen arvo on

$$A = \frac{28,0 \cdot 36,0}{2} = 504 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Vastaus  $504 \text{ cm}^2$

127



Tilanteessa muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka kantakulma on

$$\alpha = \frac{180^\circ - 4,0^\circ}{2} = 88^\circ$$

Ratkaistaan kysytty etäisyys  $x$  sinilauseella.

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{178}{\sin 4,0^\circ}$$

$$x = \frac{178}{\sin 4,0^\circ} \cdot \sin \alpha \quad | \quad \alpha = 88^\circ$$

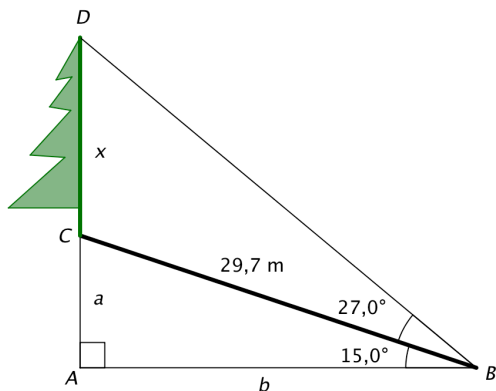
$$= \frac{178}{\sin 4,0^\circ} \cdot \sin 88^\circ$$

$$= 2550,18... \approx 2550 \text{ (m)}$$

Laivan keula on 2550 metrin etäisyydellä veneilijästä.

Vastaus            2550 m

## 128



Lasketaan ensin suorakulmaisen kolmion  $ABC$  avulla kateettien pituudet  $a$  ja  $b$ . Sen jälkeen suorakulmaisen kolmion  $ABD$  avulla voidaan laskea kateetin  $AD$  pituus.

Kuusen pituus on  $|AD| - a$ .

$$\sin 15,0^\circ = \frac{a}{29,7}$$

$$a = 29,7 \cdot \sin 15,0^\circ = 7,686... \text{ (m)}$$

$$\cos 15,0^\circ = \frac{b}{29,7}$$

$$b = 29,7 \cdot \cos 15,0^\circ = 28,687... \text{ (m)}$$

$$\tan(15,0^\circ + 27,0^\circ) = \frac{|AD|}{b}$$

$$|AD| = b \cdot \tan(15,0^\circ + 27,0^\circ)$$

$$= b \cdot \tan 42,0^\circ$$

$$= 28,687... \cdot \tan 42,0^\circ$$

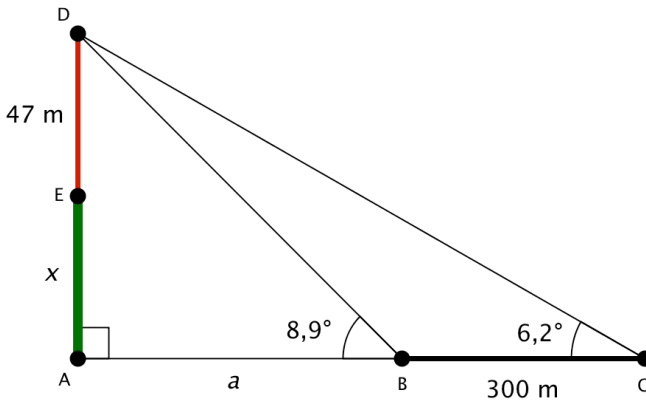
$$= 25,830... \text{ (m)}$$

$$x = |AD| - a = 25,830... - 7,686... = 18,14... \approx 18,1 \text{ (m)}$$

Kuusen pituus on 18,1 metriä.

Vastaus            18,1 m

129



Kuvan merkinnöillä kysytty mäen korkeus on  $x$ . Muodostetaan yhtälöpari suorakulmaisten kolmioiden  $ABD$  ja  $ACD$  avulla.

$$\begin{cases} \tan 8,9^\circ = \frac{x + 47}{a} \\ \tan 6,2^\circ = \frac{x + 47}{a + 300} \end{cases}$$

Ratkaistaan laskimella.

$$\begin{cases} x = 59,40\dots \text{ (m)} \\ a = 679,51\dots \text{ (m)} \end{cases}$$

Kysytty mäen korkeus on  $59,40\dots \text{ m} \approx 59 \text{ m}$

Vastaus            59 m

## Huomaa:

Yhtälöparin voi ratkaista myös ilman laskimen solve-toimintoa esimerkiksi seuraavasti:

$$\begin{cases} \tan 8,9^\circ = \frac{x+47}{a} \\ \tan 6,2^\circ = \frac{x+47}{a+300} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \tan 8,9^\circ = x+47 & \cdot 1 \\ \tan 6,2^\circ(a+300) = x+47 & \cdot (-1) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} a \tan 8,9^\circ & = x+47 \\ -a \tan 6,2^\circ - 300 \tan 6,2^\circ & = -x-47 \end{cases}$$

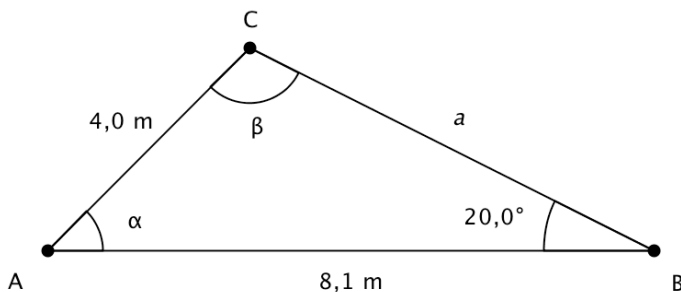
---

$$a \tan 8,9^\circ - a \tan 6,2^\circ - 300 \tan 6,2^\circ = 0$$

$$a = \frac{300 \tan 6,2^\circ}{\tan 8,9^\circ - \tan 6,2^\circ} = 679,51... \text{ (m)}$$

$$x = a \tan 8,9^\circ - 47 = 679,51... \cdot \tan 8,9^\circ - 47 = 59,40... \text{ (m)}$$

## 130



Määritetään kulma  $\beta$  sinilauseen avulla.

$$\frac{4,0}{\sin 20,0^\circ} = \frac{8,1}{\sin \beta}$$

$$4,0 \cdot \sin \beta = 8,1 \cdot \sin 20,0^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{8,1 \cdot \sin 20,0^\circ}{4,0} = 0,692\dots$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,692\dots = 43,83\dots^\circ \approx 43,8^\circ$$

Koska  $\sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta$ , niin kulmaksi kelpaa myös

$$\beta = 180^\circ - 43,83\dots^\circ = 136,15\dots^\circ \approx 136,2^\circ.$$

Käsitellään erikseen tapaukset  $\beta = 43,8^\circ$  ja  $\beta = 136,2^\circ$ .

1)  $\beta = 43,8^\circ$  :

$$\alpha = 180^\circ - 20,0^\circ - 43,83\dots^\circ = 116,16\dots^\circ \approx 116,2^\circ$$

$$\frac{4,0}{\sin 20,0^\circ} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$a = \frac{4,0 \cdot \sin \alpha}{\sin 20,0^\circ} \quad | \quad \alpha = 116,16\dots^\circ$$

$$= \frac{4,0 \cdot \sin 116,16\dots^\circ}{\sin 20,0^\circ}$$

$$= 10,49\dots \approx 10,5 \text{ (m)}$$

2)  $\beta = 136,2^\circ$  :

$$\alpha = 180^\circ - 20,0^\circ - 136,15\dots^\circ = 23,83\dots^\circ \approx 23,8^\circ$$

$$\frac{4,0}{\sin 20,0^\circ} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$a = \frac{4,0 \cdot \sin \alpha}{\sin 20,0^\circ} \quad | \quad \alpha = 23,83\dots^\circ$$

$$= \frac{4,0 \cdot \sin 23,83\dots^\circ}{\sin 20,0^\circ}$$

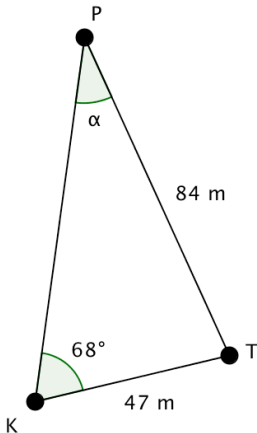
$$= 4,72\dots \approx 4,7 \text{ (m)}$$

Kolmion muut kulmat ovat  $43,8^\circ$  ja  $116,2^\circ$  ja kolmas sivu 10,5 m tai muut kulmat ovat  $136,2^\circ$  ja  $23,8^\circ$  ja kolmas sivu 4,7 m.

Vastaus            kulmat  $43,8^\circ$  ja  $116,2^\circ$  ja sivu 10,5 m tai  
kulmat  $136,2^\circ$  ja  $23,8^\circ$  ja sivu 4,7 m



## 131



Kysytty kulma ratkeaa sinilauseen avulla.

$$\frac{47}{\sin \alpha} = \frac{84}{\sin 68^\circ}$$

$$47 \sin 68^\circ = 84 \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{47 \sin 68^\circ}{84} = 0,518\dots$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0,518\dots = 31,25\dots^\circ \approx 31^\circ$$

Koska  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , kulma voi olla myös

$$\alpha = 180^\circ - 31,25\dots^\circ = 148,7\dots^\circ \approx 148^\circ.$$

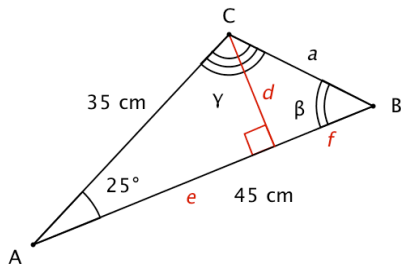
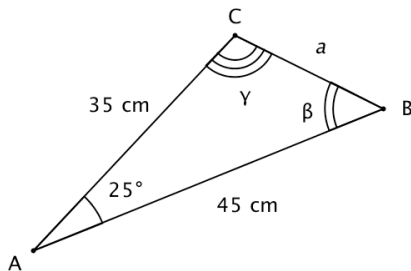
- Kun  $\alpha = 148^\circ$ , kolmion kolmas kulma olisi  $180^\circ - 68^\circ - 148^\circ = -36^\circ$ , mikä ei ole mahdollista. Siis arvo  $148^\circ$  ei kelpaa kolmion kulmaksi.
- Kun  $\alpha = 31^\circ$ , kolmion kolmas kulma olisi  $180^\circ - 68^\circ - 31^\circ = 81^\circ$ , mikä on mahdollista. Siis arvo  $31^\circ$  kelpaa kolmion kulmaksi.

Kioskin ja taksitolpan väli näkyy  $31^\circ$  kulmassa.

Vastaus  $31^\circ$

## 132

Piirretään kolmion sivulle  $AB$  korkeusjana. Nimetään laskemisen apuna tarvittavat janat.



Lasketaan sivujen pituudet  $d$ ,  $e$  ja  $f$ .

$$\sin 25^\circ = \frac{d}{35}$$

$$d = 35 \sin 25^\circ$$

$$\cos 25^\circ = \frac{e}{35}$$

$$e = 35 \cos 25^\circ$$

$$f = 45 - e = 45 - 35 \cos 25^\circ$$

Sivu  $a$  saadaan Pythagoraan lauseen avulla.

$$a^2 = d^2 + f^2$$

$$= (35 \sin 25^\circ)^2 + (45 - 35 \cos 25^\circ)^2$$

$$= 395,13\dots$$

- $a = (\pm)\sqrt{395,13\dots} = 19,87\dots \approx 20 \text{ (cm)}$

Kulma  $B$  saadaan sinilauseen avulla.

$$\frac{35}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin 25^\circ}$$

$$35 \sin 25^\circ = a \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{35 \sin 25^\circ}{a} \quad | \quad a = 19,87\dots$$

$$= \frac{35 \sin 25^\circ}{19,87\dots} = 0,744\dots$$

- $\beta = \sin^{-1} 0,744\dots = 48,08\dots^\circ \approx 48^\circ$  tai  
 $\beta = 180^\circ - 48,08\dots^\circ = 131,91\dots^\circ \approx 132^\circ$

Kulma  $C$  saadaan kulmien  $A$  ja  $B$  avulla.

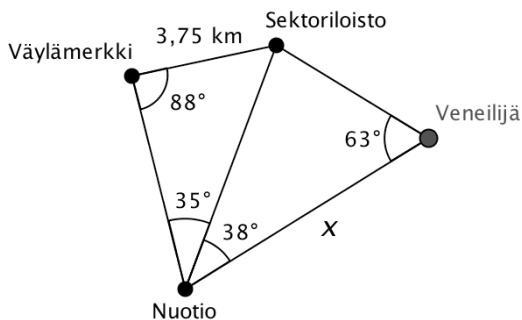
- Jos  $\beta = 48^\circ$ , niin  
 $\gamma = 180^\circ - 25^\circ - 48,08\dots^\circ = 106,91\dots^\circ \approx 107^\circ$  (kelpaa)

Jos  $\beta = 132^\circ$ , niin  
 $\gamma = 180^\circ - 25^\circ - 131,91\dots^\circ = 23,18\dots^\circ \approx 23^\circ$  (ei kelpaa. Kulman  $C$  on oltava tylppä, sillä se on pisimmän sivun vastaisena kulmana kolmion suurin kulma)

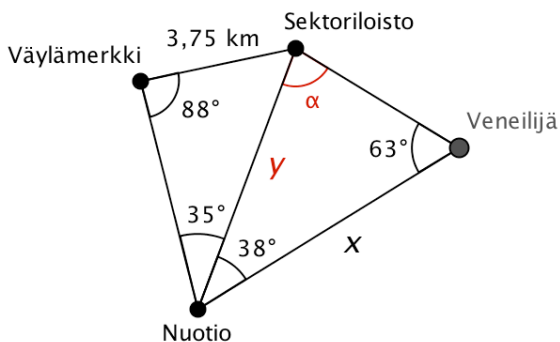
Kolmion kolmas sivu on 20 cm ja kulmat ovat  $48^\circ$  ja  $107^\circ$ .

Vastaus                      kolmas sivu 20 cm ja kulmat  $48^\circ$  sekä  $107^\circ$

## 133



Täydennetään kuvaan laskemisen apuna tarvittavat mitat.



Lasketaan nuotion ja sektoriloiston välinen etäisyys  $y$  sinilauseella.

$$\frac{y}{\sin 88^\circ} = \frac{3,75}{\sin 35^\circ}$$

$$y = \frac{3,75 \cdot \sin 88^\circ}{\sin 35^\circ} = 6,53\dots$$

Lasketaan kulma  $\alpha$ .

$$\alpha = 180^\circ - 38^\circ - 63^\circ = 79^\circ$$

Lasketaan sinilauseella kysytty veneen etäisyys nuotiosta  $x$ .

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{y}{\sin 63^\circ}$$

$$x = \frac{y \sin \alpha}{\sin 63^\circ}$$

$$\left| \begin{array}{l} \alpha = 79^\circ \\ y = 6,53... \text{ km} \end{array} \right.$$

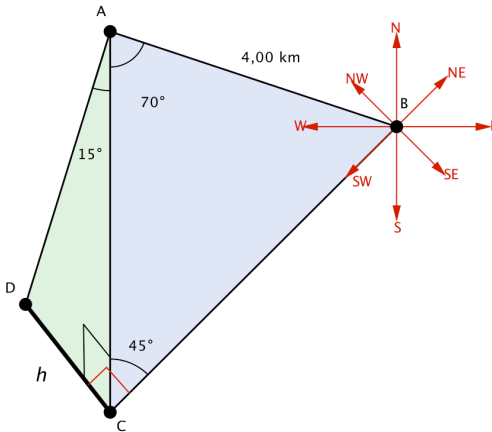
$$= \frac{6,53... \cdot \sin 79^\circ}{\sin 63^\circ}$$

$$= 7,19... \approx 7,2 \text{ (km)}$$

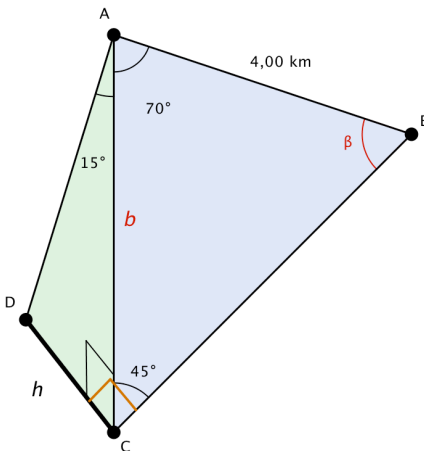
Veneen etäisyys nuotiopaikasta on 7,2 km.

Vastaus            7,2 km

134



Täydennetään kuvaan laskemisen apuna tarvittavat mitat.



Lasketaan kulma  $\beta$ .

$$\beta = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$$

Lasketaan vuoren juuren etäisyys pisteestä  $A$  eli janan  $AC$  pituus  $b$  sinilauseella.

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{4,00}{\sin 45^\circ}$$

$$b = \frac{4,00 \cdot \sin \beta}{\sin 45^\circ} \quad | \beta = 65^\circ$$

$$= \frac{4,00 \cdot \sin \beta}{\sin 45^\circ}$$

$$= 5,126... \text{ (km)}$$

Lasketaan kysytty vuoren korkeus  $h$  suorakulmaisesta kolmiosta  $ACD$ .

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{b}$$

$$h = b \tan 15^\circ \quad | b = 5,126... \text{ km}$$

$$= 5,126... \cdot \tan 15^\circ$$

$$= 1,373...$$

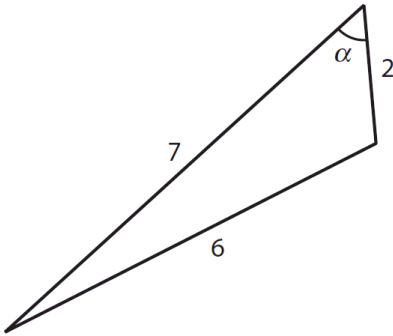
$$\approx 1,37 \text{ (km)}$$

Vuoren korkeus on  $1,37 \text{ km} = 1370 \text{ m}$ .

Vastaus            1370 m



135



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$6^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$$

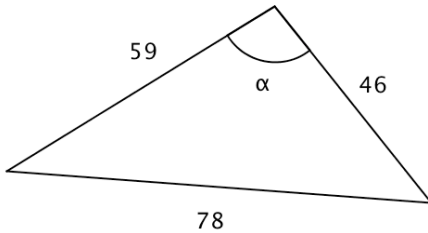
$$2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot \cos \alpha = 7^2 + 2^2 - 6^2$$

$$\cos \alpha = \frac{49 + 4 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 2} = \frac{17}{28}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{17}{28} = 52,61\dots^\circ \approx 52,6^\circ$$

Vastaus             $52,6^\circ$

## 136



Kolmion suurin kulma on pisimmän sivun vastainen kulma.

$$78^2 = 59^2 + 46^2 - 2 \cdot 59 \cdot 46 \cdot \cos \alpha$$

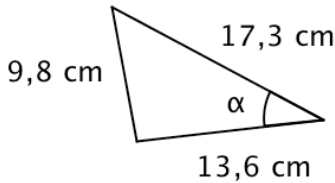
$$2 \cdot 59 \cdot 46 \cdot \cos \alpha = 59^2 + 46^2 - 78^2$$

$$\cos \alpha = \frac{59^2 + 46^2 - 78^2}{2 \cdot 59 \cdot 46} = \frac{-487}{5428}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{487}{5428}\right) = 95,14\dots^\circ \approx 95,1^\circ$$

Vastaus             $95,1^\circ$

137



Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

$$9,8^2 = 17,3^2 + 13,6^2 - 2 \cdot 17,3 \cdot 13,6 \cdot \cos \alpha$$

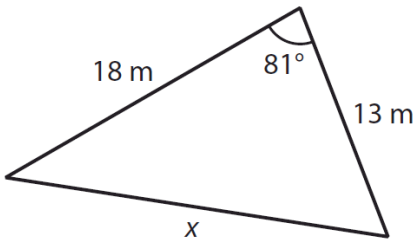
$$2 \cdot 17,3 \cdot 13,6 \cdot \cos \alpha = 17,3^2 + 13,6^2 - 9,8^2$$

$$\cos \alpha = \frac{17,3^2 + 13,6^2 - 9,8^2}{2 \cdot 17,3 \cdot 13,6} = \frac{388,21}{470,56}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{388,21}{470,56}\right) = 34,41\dots^\circ \approx 34,4^\circ$$

Vastaus            34,4°

138



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 13^2 + 18^2 - 2 \cdot 13 \cdot 18 \cdot \cos 81^\circ$$

$$= 493 - 468 \cdot \cos 81^\circ$$

$$= 419,788\dots$$

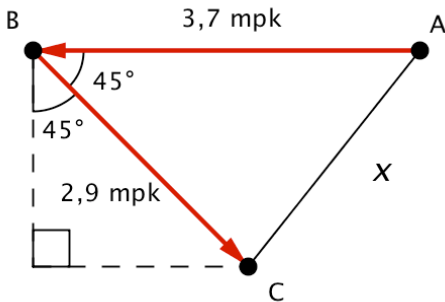
$$x = \pm \sqrt{419,788\dots}$$

$$= 20,48\dots \approx 20 \text{ (m)}$$

Sivun pituus  $x = 20$  metriä.

Vastaus  $x = 20 \text{ m}$

139



Kysytty etäisyys  $x$  saadaan määritettyä kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 3,7^2 + 2,9^2 - 2 \cdot 3,7 \cdot 2,9 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 22,1 - 21,46 \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 6,92\dots$$

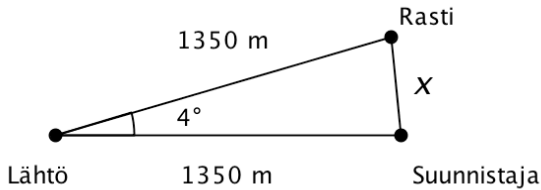
$$x = (\pm)\sqrt{6,92\dots}$$

$$= 2,63\dots \approx 2,6 \text{ (mpk)}$$

Veneilijä päätyi 2,6 meripeninkulman päähän lähtöpisteestä.

Vastaus            2,6 mpk

## 140



Lasketaan suunnistajan ja rastin välinen etäisyys  $x$  kosinilauseen avulla.

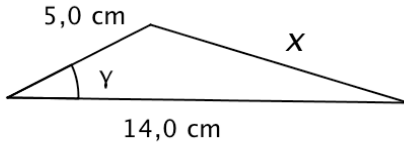
$$\begin{aligned} x^2 &= 1350^2 + 1350^2 - 2 \cdot 1350 \cdot 1350 \cdot \cos 4^\circ \\ &= 2 \cdot 1350^2 - 2 \cdot 1350^2 \cdot \cos 4^\circ \\ &= 8879,03\dots \end{aligned}$$

$$x = \pm \sqrt{8879,03\dots} = 94,22\dots \approx 94 \text{ (m)}$$

Suunnistaja on 94 metrin päässä rastista.

Vastaus            94 m

## 141



Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$$

$$27,9 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 14,0 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 27,9}{5,0 \cdot 14,0} = 0,797\dots$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,797\dots = 52,85\dots^\circ$$

Koska  $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$ , niin kulman  $\gamma$  arvoksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 52,85\dots^\circ = 127,14\dots^\circ.$$

Kosinilauseen avulla saadaan laskettua kolmas sivu.

$$\begin{aligned} x^2 &= 5,0^2 + 14,0^2 - 2 \cdot 5,0 \cdot 14,0 \cdot \cos \gamma \\ &= 221 - 140 \cos \gamma \end{aligned}$$

- Kun  $\gamma = 52,85\dots^\circ$ , niin

$$x^2 = 221 - 140\cos 52,85\dots^\circ = 136,46\dots$$

$$x = (\pm)\sqrt{136,46\dots} = 11,68\dots \approx 11,7 \text{ (cm)}$$

- Kun  $\gamma = 127,14\dots^\circ$ , niin

$$x^2 = 221 - 140\cos 127,14\dots^\circ = 305,53\dots$$

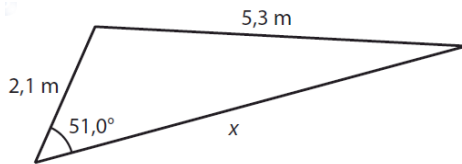
$$x = (\pm)\sqrt{305,53\dots} = 17,47\dots \approx 17,5 \text{ (cm)}$$

Kolmion kolmannen sivun pituus on 11,7 cm tai 17,5 cm.

Vastaus            11,7 cm tai 17,5 cm



## 142



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$5,3^2 = 2,1^2 + x^2 - 2 \cdot 2,1 \cdot x \cdot \cos 51,0^\circ$$

$$x^2 - 4,2 \cdot \cos 51,0^\circ \cdot x + 2,1^2 - 5,3^2 = 0$$

$$x^2 - 4,2 \cdot \cos 51,0^\circ \cdot x - 23,68 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4,2 \cdot \cos 51,0^\circ \pm \sqrt{(-4,2 \cdot \cos 51,0^\circ)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-23,68)}}{2 \cdot 1}$$

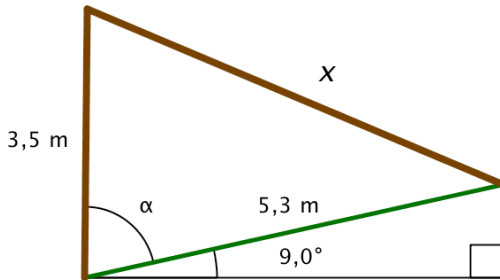
$$x = -3,72... \text{ tai } x = 6,36...$$

Sivun pituus on positiivinen, joten  $x = 6,36... \text{ cm} \approx 6,4 \text{ cm}$ .

(Toisen asteen yhtälön voi ratkaista myös laskimella)

Vastaus  $x = 6,4 \text{ cm}$

143



Männyn pystyyn jääneen tyven ja rinteen välinen kulma on

$$\alpha = 90^\circ - 9,0^\circ = 81,0^\circ.$$

Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} x^2 &= 3,5^2 + 5,3^2 - 2 \cdot 3,5 \cdot 5,3 \cdot \cos 81,0^\circ \\ &= 34,53\dots \end{aligned}$$

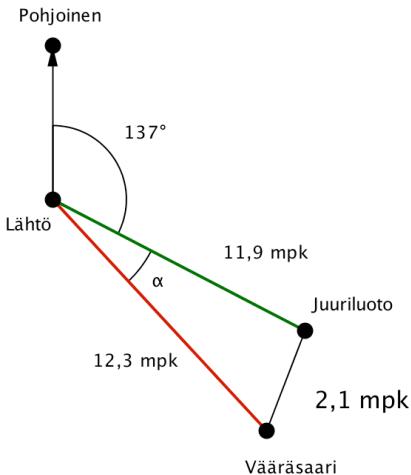
$$x = \pm \sqrt{34,53\dots} = 5,87\dots \text{ (m)}$$

Männyn alkuperäinen pituus oli

$$3,5 \text{ m} + x = 3,5 \text{ m} + 5,87\dots \text{ m} = 9,37\dots \text{ m} \approx 9,4 \text{ m}.$$

Vastaus            9,4 m

## 144



Veneilijä halusi ajaa suuntaan  $137^\circ$ , mutta päätyi ajamaan kulman  $\alpha$  verran väärään suuntaan.

Ratkaistaan kulma  $\alpha$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

$$2,1^2 = 11,9^2 + 12,3^2 - 2 \cdot 11,9 \cdot 12,3 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2,1^2 - 11,9^2 - 12,3^2}{-2 \cdot 11,9 \cdot 12,3} = 0,985\dots$$

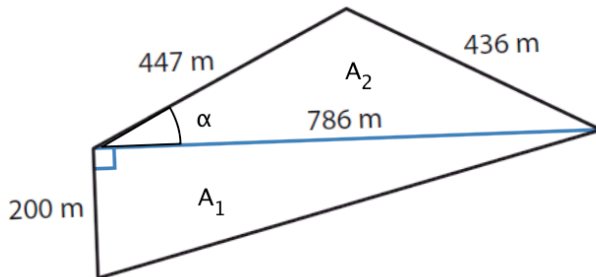
$$\alpha = \cos^{-1} 0,985\dots = 9,77\dots^\circ \approx 9,8^\circ$$

Kompassilukeman virhe oli  $9,8^\circ$ .

(Veneilijän todellinen kompassisuunta oli siis  $146,8^\circ$  tai  $127,2^\circ$ .)

Vastaus  $9,8^\circ$

## 145



Alemman suorakulmaisen kolmion pinta-ala saadaan suoraan annettujen mittojen avulla.

$$A_1 = \frac{200 \cdot 786}{2} = 78\,600 \text{ (m}^2\text{)}$$

Ylemmän kolmion pinta-alan laskemiseksi selvitetään ensin kulma  $\alpha$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$436^2 = 447^2 + 786^2 - 2 \cdot 447 \cdot 786 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{436^2 - 447^2 - 786^2}{-2 \cdot 447 \cdot 786} = 0,893\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,893\dots = 26,745\dots^\circ$$

Alemman kolmion pinta-ala on

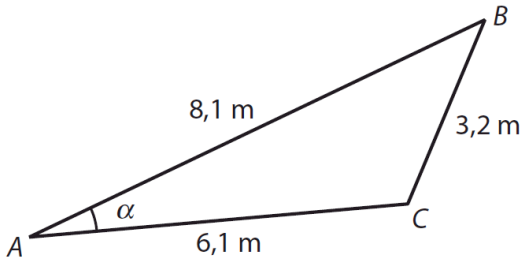
$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 447 \cdot 786 \cdot \sin 26,745\dots^\circ = 79\,055,85\dots \text{ (m}^2\text{)}$$

Koko metsäpalstan pinta-ala on

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = 78\,600 \text{ m}^2 + 79\,055,85\dots \text{ m}^2 \\ &= 157\,655,85\dots \text{ m}^2 \approx 158\,000 \text{ m}^2 \text{ (= 15,8 ha)} \end{aligned}$$

Vastaus             $158\,000 \text{ m}^2 = 15,8 \text{ ha}$

146



Määritetään kulma  $\alpha$  kosinilauseen avulla.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

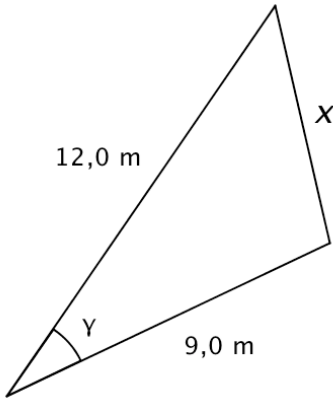
$$3,2^2 = 8,1^2 + 6,1^2 - 2 \cdot 8,1 \cdot 6,1 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3,2^2 - 8,1^2 - 6,1^2}{-2 \cdot 8,1 \cdot 6,1} = 0,936\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,936\dots = 20,47\dots^\circ \approx 20,5^\circ$$

Vastaus  $20,5^\circ$

147



Määritetään tunnettujen sivujen välinen kulma pinta-alan avulla.

$$A = \frac{1}{2}bc \sin \gamma$$

$$27,0 = \frac{1}{2} \cdot 12,0 \cdot 9,0 \cdot \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{2 \cdot 27,0}{12,0 \cdot 9,0} = 0,5$$

$$\gamma = \sin^{-1} 0,5 = 30^\circ$$

Koska  $\sin(180^\circ - \gamma) = \sin \gamma$ , niin kulmaksi kelpaa myös

$$\gamma = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Kysytyn sivun pituus  $x$  saadaan kosinilauseella.

$$\begin{aligned}x^2 &= 12,0^2 + 9,0^2 - 2 \cdot 12,0 \cdot 9,0 \cdot \cos \gamma \\ &= 225 - 216 \cos \gamma\end{aligned}$$

Kun  $\gamma = 30^\circ$ , niin sivun pituudeksi  $x$  saadaan

$$\begin{aligned}x^2 &= 225 - 216 \cos 30^\circ = 37,93\dots \\ x &= (\pm) \sqrt{37,93\dots} = 6,15\dots \approx 6,2 \text{ (m)}.\end{aligned}$$

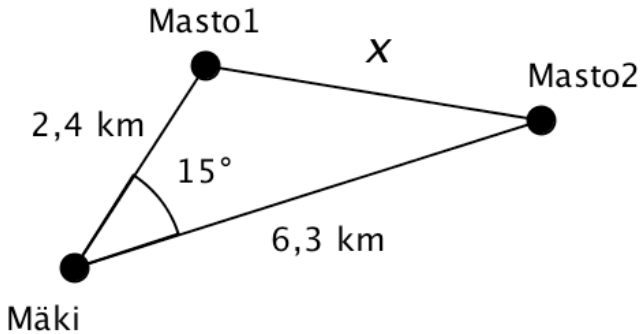
Kun  $\gamma = 150^\circ$ , niin sivun pituudeksi  $x$  saadaan

$$\begin{aligned}x^2 &= 225 - 216 \cos 150^\circ = 412,06\dots \\ x &= (\pm) \sqrt{412,06\dots} = 20,29\dots \approx 20,3 \text{ (m)}.\end{aligned}$$

Vastaus      6,2 m tai 20,3 m



148



Mastojen välinen etäisyys saadaan kosinilauseen avulla.

$$x^2 = 2,4^2 + 6,3^2 - 2 \cdot 2,4 \cdot 6,3 \cdot \cos 15^\circ$$

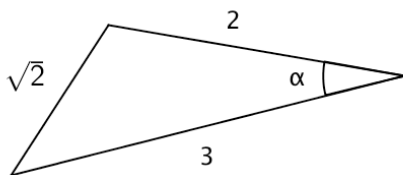
$$= 16,24 \dots$$

$$x = (\pm) \sqrt{16,24 \dots} = 4,02 \dots \approx 4,0 \text{ (km)}$$

Mastojen välinen etäisyys on 4,0 km.

Vastaus      4,0 km

149



- a) Kolmion pienin kulma on lyhintä sivua vastassa.

Kysytty kulma saadaan kosinilauseella.

$$(\sqrt{2})^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{(\sqrt{2})^2 - 2^2 - 3^2}{-2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 - 4 - 9}{-12} = \frac{11}{12}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{11}{12} = 23,55\dots^\circ \approx 23,6^\circ$$

Kolmion pienin kulma on  $23,6^\circ$ .

- b) Tutkitaan toteuttaako kolmio Pythagoraan lauseen.  
Ehdokas hypotenuusaksi on pisin sivu, jonka pituus on 3.

$$3^2 = (\sqrt{2})^2 + 2^2$$

$$9 = 2 + 4$$

$$9 = 6$$

epätosi

Kolmio ei ole suorakulmainen.

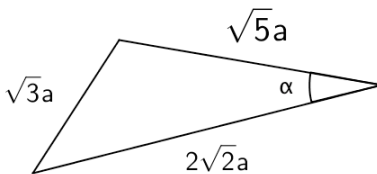
Vastaus            a)  $23,6^\circ$     b) ei ole suorakulmainen

## 150

a) Kolmion sivujen pituudet ovat

$$\sqrt{3}a, \sqrt{5}a \text{ ja } 2\sqrt{2}a = \sqrt{4 \cdot 2}a = \sqrt{8}a.$$

Pienin kulma on lyhimmän  $\sqrt{3}a$ -pituisen sivun vastainen kulma.



Pienin kulma saadaan laskettua kosinilauseen avulla.

$$(\sqrt{3}a)^2 = (\sqrt{5}a)^2 + (\sqrt{8}a)^2 - 2 \cdot \sqrt{5}a \cdot \sqrt{8}a \cdot \cos \alpha$$

$$3a^2 = 5a^2 + 8a^2 - 2 \cdot \sqrt{40} \cdot a^2 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3a^2 - 5a^2 - 8a^2}{-2 \cdot \sqrt{40} \cdot a^2} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot \cancel{a^2}}{\underset{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{40} \cdot \cancel{a^2}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{25}{40}} = \sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\alpha = \cos^{-1} \sqrt{\frac{5}{8}} = 37,76\dots^\circ \approx 37,8^\circ$$

Kolmion pienin kulma on  $37,8^\circ$ .

b) Tutkitaan toteuttaako kolmio Pythagoraan lauseen. Ehdokas hypotenuusaksi on kolmion pisin sivu, pituudeltaan  $\sqrt{8a}$ .

$$(\sqrt{8a})^2 = (\sqrt{3a})^2 + (\sqrt{5a})^2$$

$$8a^2 = 3a^2 + 5a^2$$

$$8a^2 = 8a^2$$

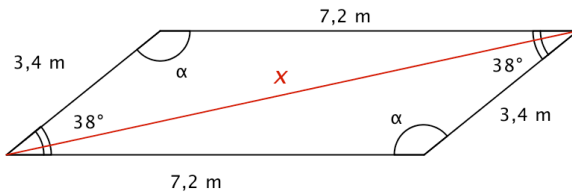
tosi

Kolmio on suorakulmainen.

Vastaus            a)  $37,8^\circ$     b) on suorakulmainen

## 151

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret. Pisin lävistäjä on suunnikkaan suuremman kulman vastainen lävistäjä.



Vierekkäisten kulmien summa on  $180^\circ$ .

$$\alpha = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ .$$

Pidemmän lävistäjän pituus saadaan kosinilauseen avulla.

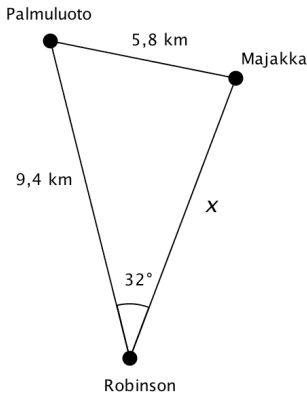
$$\begin{aligned} x^2 &= 3,4^2 + 7,2^2 - 2 \cdot 3,4 \cdot 7,2 \cdot \cos 142^\circ \\ &= 101,98\dots \end{aligned}$$

$$x = (\pm)\sqrt{101,98\dots} = 10,09\dots \approx 10,1 \text{ (m)}$$

Pidemmän lävistäjän pituus on 10,1 m.

Vastaus            10,1 m

152



Muodostetaan yhtälö kosinilauseen avulla.

$$5,8^2 = 9,4^2 + x^2 - 2 \cdot 9,4 \cdot x \cdot \cos 32^\circ$$

$$x^2 - 2 \cdot 9,4 \cdot x \cdot \cos 32^\circ + 9,4^2 - 5,8^2 = 0$$

$$x^2 - 18,8 \cdot \cos 32^\circ \cdot x + 54,72 = 0$$

$$x = \frac{18,8 \cdot \cos 32^\circ \pm \sqrt{(-18,8 \cdot \cos 32^\circ)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 54,72}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 5,00\dots \quad \text{tai} \quad x = 10,94$$

$$x \approx 5,0 \quad \text{tai} \quad x \approx 10,9$$

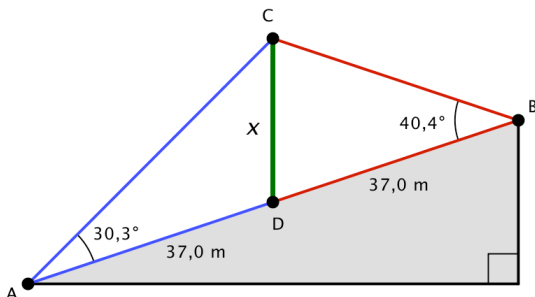
Majakka on 5,0 km tai 10,9 km etäisyydellä Robinsonista.

Vastaus            5,0 km tai 10,9 km

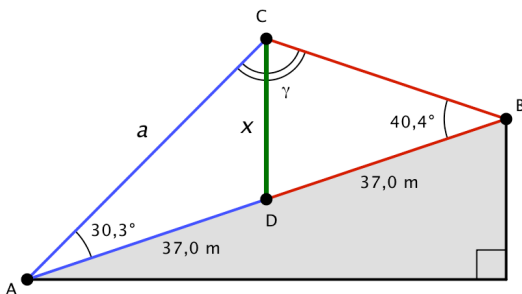
Huomautus: Yhtälön voi ratkaista myös laskimella.

## 153

Piirretään tilanteesta mallikuva.



Kysytty maston korkeus saadaan laskettua kolmiosta  $ADC$  käyttäen kosinilausetta. Tätä varten selvitetään ensin janan  $AC$  pituus sinilauseen avulla. Kolmiosta  $ABC$  tunnetaan kaikki kulmat, joten sinilauseen käyttö onnistuu.



$$\gamma = 180^\circ - 30,3^\circ - 40,4^\circ = 109,3^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 40,4^\circ} = \frac{37,0 + 37,0}{\sin 109,3^\circ}$$

$$a = \frac{74,0 \cdot \sin 40,4^\circ}{\sin 109,3^\circ} = 50,816\dots \text{ (m)}$$

Ratkaistaan kysytty maston korkeus  $x$  kosinilauseella.

$$x^2 = a^2 + 37,0^2 - 2 \cdot a \cdot 37,0 \cdot \cos 30,3^\circ \quad | \quad a = 50,816\dots$$

$$= 50,816\dots^2 + 37,0^2 - 2 \cdot 50,816\dots \cdot 37,0 \cdot \cos 30,3^\circ$$

$$= 704,59\dots$$

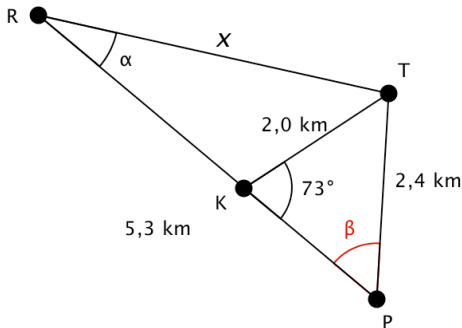
$$x = (\pm)\sqrt{704,59\dots} = 26,54\dots \approx 26,5 \text{ (m)}$$

Maston korkeus on 26,5 metriä.

Vastaus            26,5 m



154



- Lasketaan ensin kulma  $\beta$  kolmiosta  $KPT$  sinilauseen avulla.

$$\frac{2,0}{\sin \beta} = \frac{2,4}{\sin 73^\circ}$$

$$2,0 \sin 73^\circ = 2,4 \sin \beta$$

$$\sin \beta = \frac{2,0 \sin 73^\circ}{2,4} = 0,796\dots$$

$$\beta = \sin^{-1} 0,796\dots = 52,83\dots^\circ$$

$$\text{tai } \beta = 180^\circ - 52,83\dots = 127,16\dots^\circ$$

Jos  $\beta = 52,83\dots^\circ$ , niin

$$\sphericalangle KTP = 180^\circ - 73^\circ - 52,83\dots^\circ = 54,16\dots^\circ \text{ (kelpaa)}$$

Jos  $\beta = 127,16\dots^\circ$ , niin

$$\sphericalangle KTP = 180^\circ - 73^\circ - 127,16\dots^\circ = -20,16\dots^\circ \text{ (ei kelpaa)}$$

Siis on oltava  $\beta = 52,83\dots^\circ$ .

- Lasketaan kosinilauseen avulla janan  $RT$  pituus  $x$  kolmiosta  $RPT$ .

$$x^2 = 5,3^2 + 2,4^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot 2,4 \cdot \cos 52,83\dots^\circ$$

$$= 18,48\dots$$

$$x = (\pm)\sqrt{18,48\dots} = 4,29\dots \text{ (km)}$$

- Lasketaan kulma  $\alpha$  kolmiosta  $RPT$  kosinilauseen avulla.

$$2,4^2 = 5,3^2 + 4,29\dots^2 - 2 \cdot 5,3 \cdot 4,29\dots \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2,4^2 - 5,3^2 - 4,29\dots^2}{-2 \cdot 5,3 \cdot 4,29\dots} = 0,895\dots$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0,895\dots = 26,41\dots^\circ$$

- a) Ruttulasta katsottaessa Pottulan ja Takkulan väli näkyy kulmassa

$$\alpha = 26,41\dots^\circ \approx 26^\circ.$$

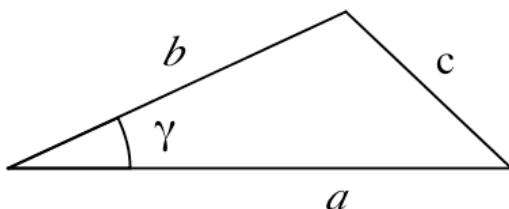
- b) Ruttulan ja Takkulan välinen etäisyys on

$$x = 4,29\dots \text{ km} \approx 4,3 \text{ km}.$$

Vastaus            a)  $26^\circ$             b) 4,3 km

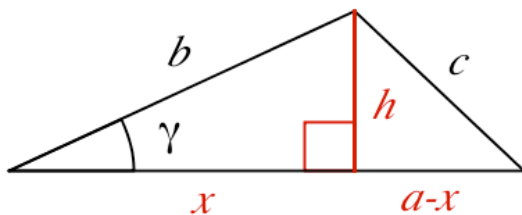
## 155

Piirretään kolmio, jossa on terävä kulma  $\gamma$ .



On osoitettava, että kosinilause  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  pätee, kun kulma  $\gamma$  on terävä.

Täydennetään kolmioon korkeusjana ja jaetaan kanta osiin, joiden pituudet ovat  $x$  ja  $a - x$ .



Kuvan merkinnöillä saadaan kosinin määritelmän ja Pythagoraan lauseen avulla seuraavat yhtälöt.

$$1) \cos \gamma = \frac{x}{b}$$

$$x = b \cos \gamma$$

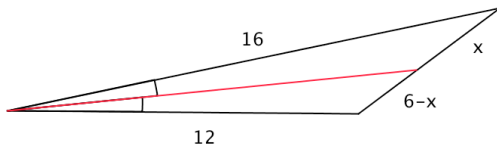
$$2) b^2 = h^2 + x^2$$

$$\begin{aligned}
3) \quad c^2 &= h^2 + (a-x)^2 \\
&= h^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot (-x) + (-x)^2 \\
&= h^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\
&= h^2 + x^2 + a^2 - 2ax & \left| \begin{array}{l} h^2 + x^2 = b^2 \\ x = b \cos \gamma \end{array} \right. \\
&= b^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma \\
&= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma
\end{aligned}$$

Saatiin osoitettua, että kosinilause  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$  pätee, kun kulma  $\gamma$  on terävä.  $\square$



## 156



Pienin kulma on lyhimmän sivun vastainen kulma.

Muodostetaan yhtälö kulmanpuolittajalauseeseen avulla.

$$\frac{x}{6-x} = \frac{16}{12}$$

$$12x = 16 \cdot (6-x)$$

$$12x = 16 \cdot 6 - 16x$$

$$12x + 16x = 96$$

$$28x = 96$$

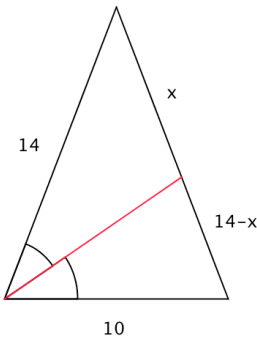
$$x = \frac{96}{28} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$$

$$6-x = \frac{42}{7} - \frac{24}{7} = \frac{18}{7} = 2\frac{4}{7}$$

Osien pituudet ovat  $3\frac{3}{7}$  ja  $2\frac{4}{7}$ .

Vastaus  $3\frac{3}{7}$  ja  $2\frac{4}{7}$

157



Muodostetaan yhtälö kulmanpuolittajalauseen avulla.

$$\frac{x}{14-x} = \frac{14}{10}$$

$$10x = 14(14-x)$$

$$10x = 14^2 - 14x$$

$$10x + 14x = 14^2$$

$$24x = 14^2$$

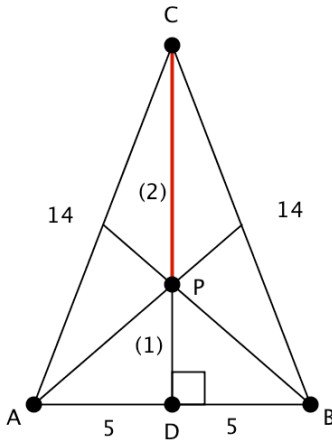
$$x = \frac{14^2}{24} = \frac{49}{6} = 8\frac{1}{6}$$

$$14-x = 14 - 8\frac{1}{6} = 5\frac{5}{6}$$

Osien pituudet ovat  $8\frac{1}{6}$  ja  $5\frac{5}{6}$ .

Vastaus  $8\frac{1}{6}$  ja  $5\frac{5}{6}$

158



Kolmio on tasakylkinen, joten huipusta piirretty mediaani on samalla kolmion korkeusjana.

Lasketaan korkeusjanan  $CD$  pituus Pythagoraan lauseen avulla.

$$14^2 = |CD|^2 + 5^2$$

$$|CD|^2 = 14^2 - 5^2 = 171$$

$$|CD| = (\pm)\sqrt{171} = \sqrt{9 \cdot 19} = 3\sqrt{19}$$

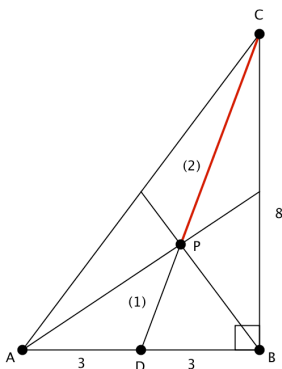
Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Lasketaan kysytty etäisyys  $|CP|$ .

$$|CP| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{19} = 2\sqrt{19}$$

Vastaus  $2\sqrt{19}$



159



Kolmion pienin kulma on lyhimmän sivun eli lyhemmän kateetin vastainen kulma.

Lasketaan janan  $CD$  pituus Pythagoraan lauseen avulla suorakulmaisesta kolmiosta  $DBC$ .

$$\begin{aligned} |DC|^2 &= 3^2 + 8^2 \\ &= 73 \end{aligned}$$

$$|DC| = (\pm)\sqrt{73} = \sqrt{73}$$

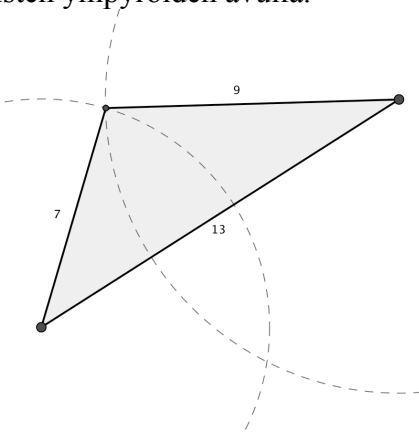
Mediaanien leikkauspiste jakaa mediaanin suhteessa 2 : 1 kärjestä lukien. Lasketaan kysytty etäisyys  $|CP|$ .

$$|CP| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{73} = \frac{2\sqrt{73}}{3}$$

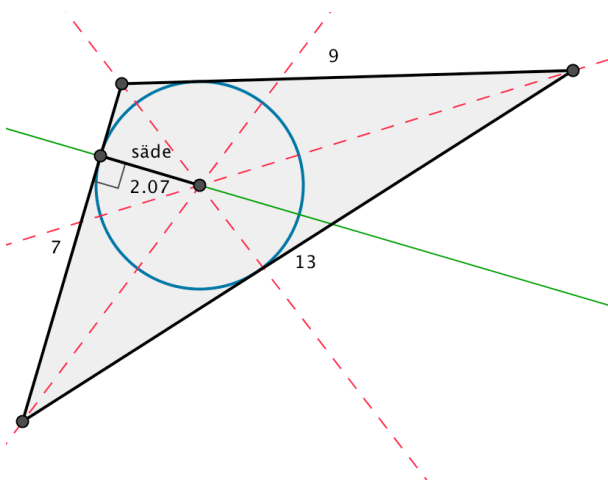
Vastaus            Etäisyys on  $\frac{2\sqrt{73}}{3}$ .

160

Kolmioon saa piirrettyä halutun mittaiset sivut esimerkiksi tietyn säteisten ympyröiden avulla.

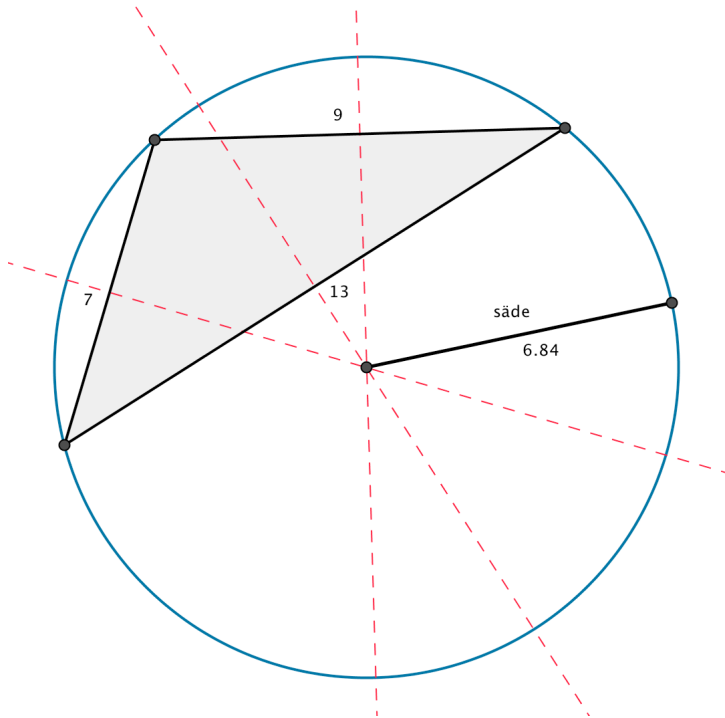


- a) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Säde on ympyrän keskipisteestä piirretyllä kolmion sivun normaalilla.



Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on 2,1.

- b) Kolmion ympäri voi piirtää ympyrän kolmen kärkipisteen avulla. Ympyrän keskipiste löytyy joko keskipistetyökalulla tai kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteestä.

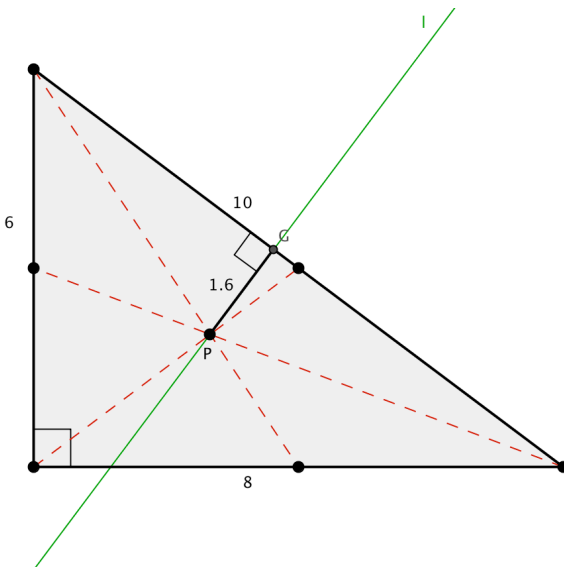
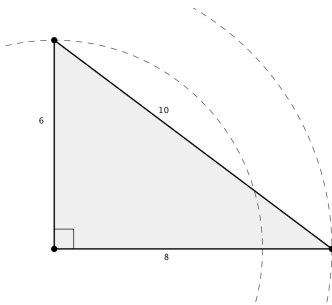


Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 6,8.

Vastaus            a) 2,1            b) 6,8

# 161

Kolmioon saa piirrettyä halutun mittaiset sivut esimerkiksi tietyn säteisten ympyröiden avulla.

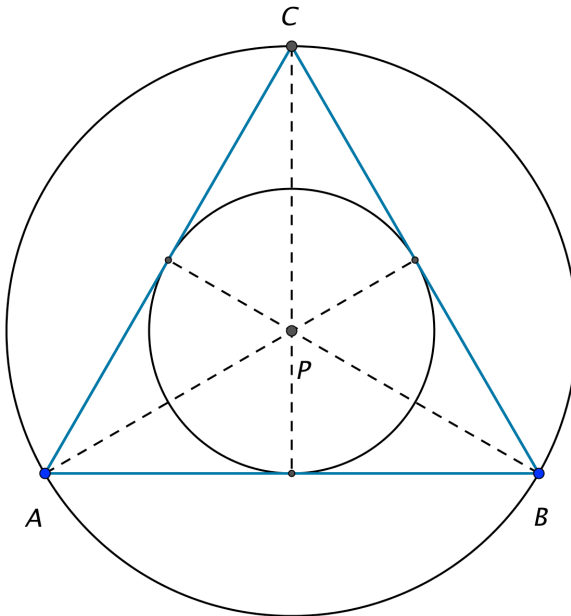


Kolmion painopiste on mediaanien leikkauspisteessä.  
 Kolmion painopisteen etäisyys hypotenuusasta on 1,6.

Vastaus            1,6

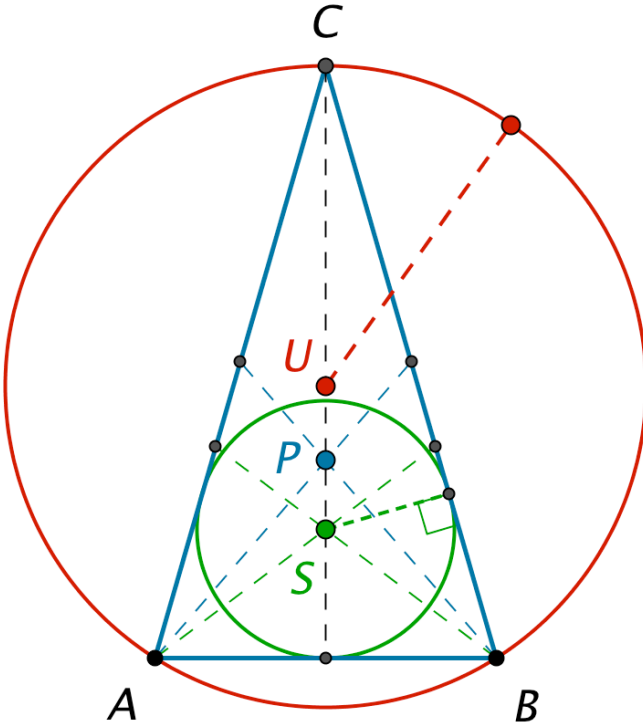
162

a)



Tasasivuisen kolmion painopiste sekä sisään ja ympäri piirrettyjen ympyröiden keskipisteet yhtyvät (piste  $P$ ).

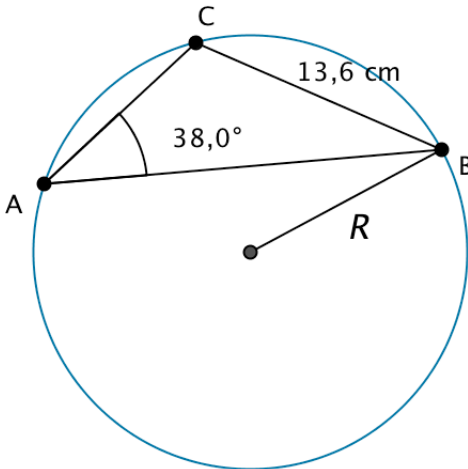
b)



Kolmion painopisteen  $P$  paikka säilyy.

Kolmion sisään piirretyn ympyrän painopiste  $S$  laskee, ympäri piirretyn ympyrän painopiste  $U$  nousee.

163



Ratkaistaan kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän säde laajennetun sinilauseen avulla.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

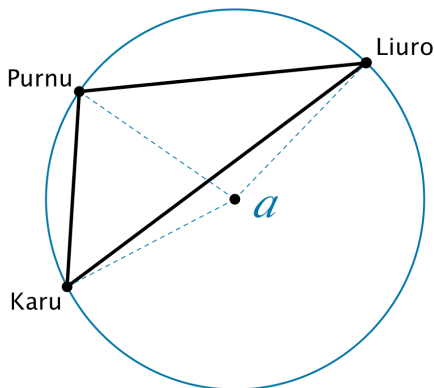
$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{13,6}{2 \cdot \sin 38,0^\circ} = 11,045\dots \approx 11,0 \text{ (cm)}$$

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on 11,0 cm.

Vastaus            11,0 cm

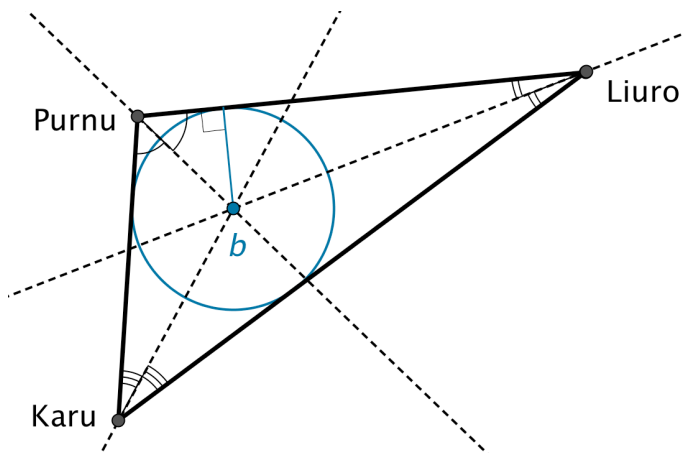
164

a)



Vesitorni sijaitsee kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä. Piirtäminen onnistuu geometriaohjelmalla esimerkiksi kolmion kolmen kärkipisteen avulla.

b)

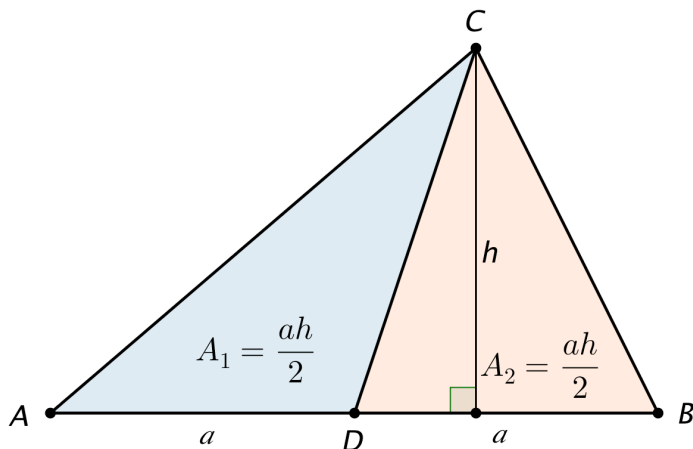


Vesitorni sijaitsee kolmion kulmanpuolittajien leikkauspisteessä.



## 165

On osoitettava, että kolmion mediaani jakaa kolmion pinta-alan kahteen yhtä suureen osaan. Merkitään kolmion kannan pituutta  $2a$ :lla ja piirretään mediaani kolmion huipusta kannalle.



Huipusta piirretty mediaani (eli keskijana) jakaa kolmion kannan kahteen yhtä suureen osaan.

Mediaani jakaa kolmion kahteen pienempään kolmioon, joiden kummankin pinta-ala on  $\frac{ah}{2}$ .

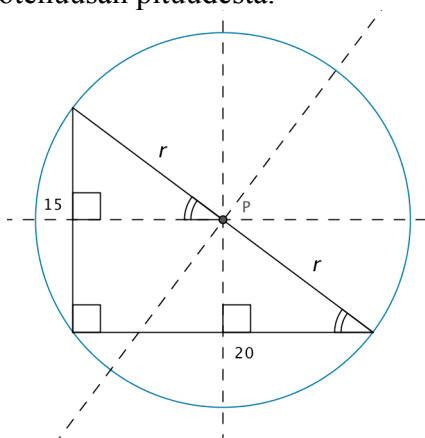
Siis mediaani puolittaa kolmion pinta-alan.  $\square$

## 166

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit erottavat suorakulmaisesta kolmiosta pienemmät suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisia mittakaavassa 1 : 2.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit siis leikkaavat hypotenuusan keskipisteessä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde  $r$  on puolet hypotenuusan pituudesta.



$$\begin{aligned}
 (2r)^2 &= 15^2 + 20^2 & r &= (\pm)\sqrt{\frac{625}{4}} \\
 4r^2 &= 625 & &= \frac{25}{2} \\
 r^2 &= \frac{625}{4} & &= 12\frac{1}{2} = 12,5
 \end{aligned}$$

Vastaus

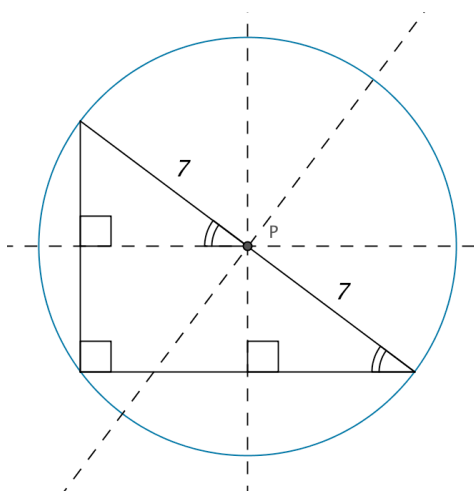
Säde on 12,5.

## 167

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspisteessä.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit erottavat suorakulmaisesta kolmiosta pienemmät suorakulmaiset kolmiot, jotka ovat alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoisia mittakaavassa 1 : 2.

Kateettien suuntaiset keskinormaalit leikkaavat hypotenuusan keskipisteessä. Kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde  $r$  on puolet hypotenuusan pituudesta.



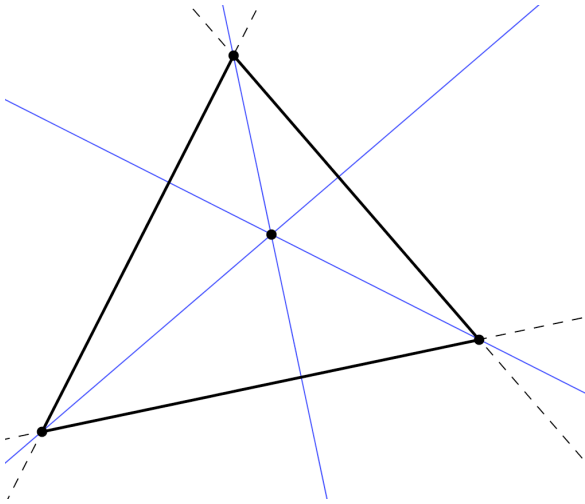
Hypotenuusan pituus on siis sama kuin ympyrän halkaisija  $d$ .

$$d = 2r = 2 \cdot 7 = 14$$

Vastaus

Hypotenuusan pituus on 14.

168

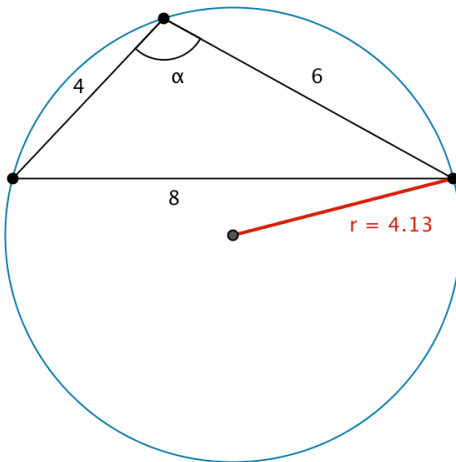


Siniset suorat kulkevat kolmion korkeusjanoja pitkin.

Mustat katkoviivat ovat kolmion sivuja pitkin kulkevia suoria, joita tarvitaan, mikäli korkeusjana ei osu kolmion sisään.

Kolmion muotoa voi muuttaa kärkipisteitä liikuttamalla, jolloin huomaa, että korkeusjanojen kautta kulkevat suorat leikkaavat aina samassa pisteessä, joka voi sijaita kolmion sisällä tai sen ulkopuolella.

169



Geometriaohjelman mukaan ympäri piirretyn ympyrän säde on 4,1.

Tarkistetaan tulos laajennetulla sinilauseella

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Selvitetään tätä varten kulma  $\alpha$  kosinilauseella.

$$8,0^2 = 4,0^2 + 6,0^2 - 2 \cdot 4,0 \cdot 6,0 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{8,0^2 - 4,0^2 - 6,0^2}{-2 \cdot 4,0 \cdot 6,0} = -0,25$$

$$\alpha = \cos^{-1} -0,25 = 104,47\dots^\circ$$

Muodostetaan yhtälö säteen laskemiseksi.

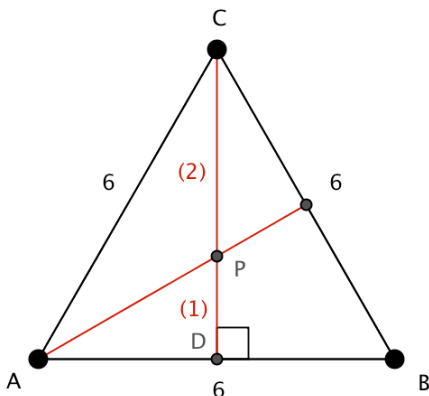
$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{8,0}{2 \cdot \sin 104,47\dots^\circ} = 4,13\dots \approx 4,1$$

Vastaus      Säteen pituus on 4,1.

170

a)



Tasavuisen kolmion mediaanit ovat samalla kolmion korkeusjanoja. Suorakulmaisesta kolmiosta  $ADC$  saadaan mediaanin  $CD$  pituus Pythagoraan lauseella.

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2$$

$$6^2 = 3^2 + |CD|^2$$

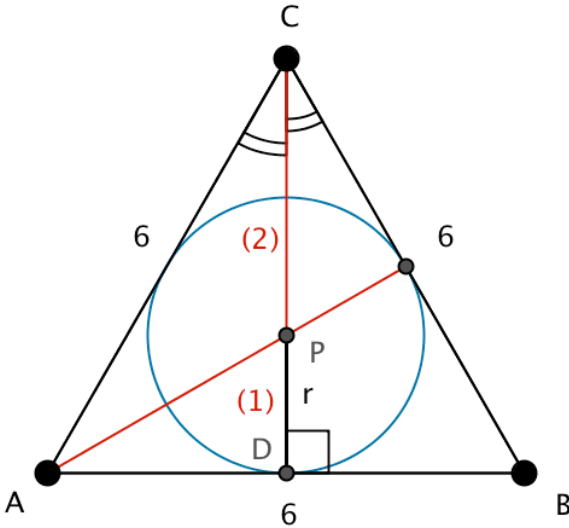
$$|CD| = (\pm)\sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$$

Painopisteen  $P$  etäisyys kolmion kärjestä on

$$|CP| = \frac{2}{3} \cdot |CD| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

- b) Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste.

Tasasivuisen kolmion mediaanit ovat samalla kulmanpuolittajia, joten sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös mediaanien leikkauspiste.



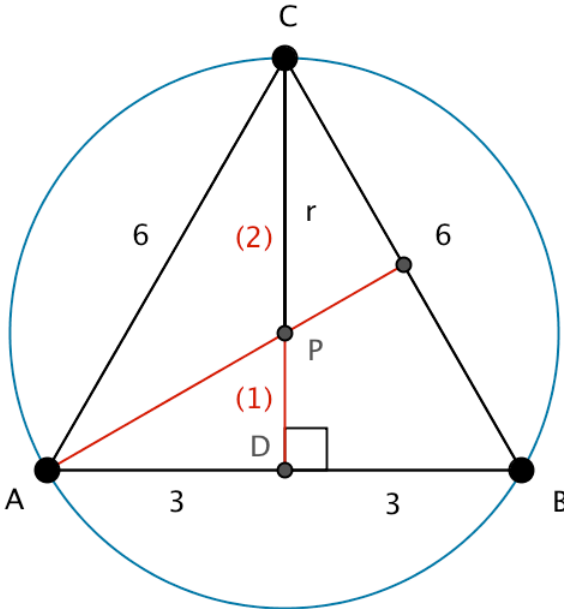
Sisään piirretyn ympyrän säde on

$$r = |PD| = \frac{1}{3} \cdot |CD| = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$



- c) Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste.

Tasasivuisen kolmion mediaanit ovat samalla sivujen keskinormaaleja, joten sisään piirretyn ympyrän keskipiste on myös mediaanien leikkauspiste.

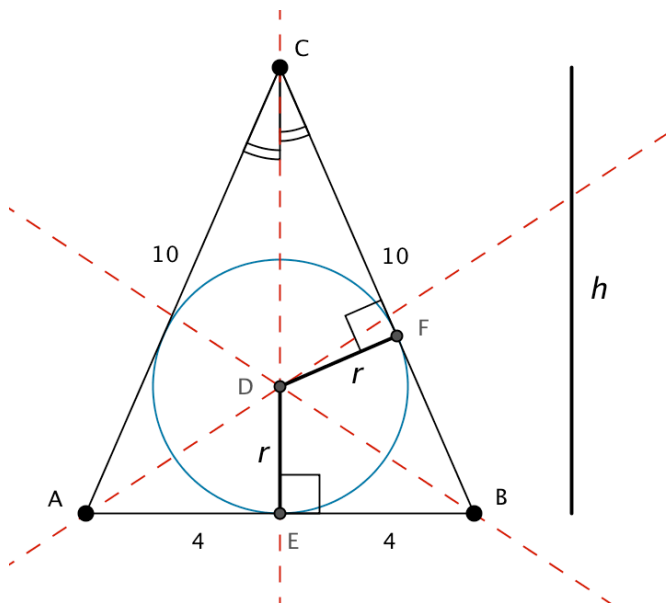


Ympäri piirretyn ympyrän säde on

$$r = |CP| = \frac{2}{3} \cdot |CD| = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Vastaus a)  $2\sqrt{3}$     b)  $\sqrt{3}$     c)  $2\sqrt{3}$

171



Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja on samalla myös kolmion korkeusjana.

Kolmiot  $BCE$  ja  $DFC$  ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- niissä on molemmissa suora kulma
- niillä on yhteisenä kulmana huippukulman puolikas  $\sphericalangle DCF$ .

Vastinjanojen suhde on vakio, joten voidaan muodostaa yhtälö.

$$\frac{|DF|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|BC|} \quad \left| \begin{array}{l} |DF| = r, |BE| = 4 \\ |DC| = h - r, |BC| = 10 \end{array} \right.$$

$$\frac{r}{4} = \frac{h-r}{10}$$

$$\left| \begin{array}{l} 10^2 = h^2 + 4^2 \\ h^2 = 10^2 - 4^2 = 84 \\ h = (\pm)\sqrt{84} = 2\sqrt{21} \end{array} \right.$$

$$\frac{r}{4} = \frac{2\sqrt{21} - r}{10}$$

$$10r = 8\sqrt{21} - 4r$$

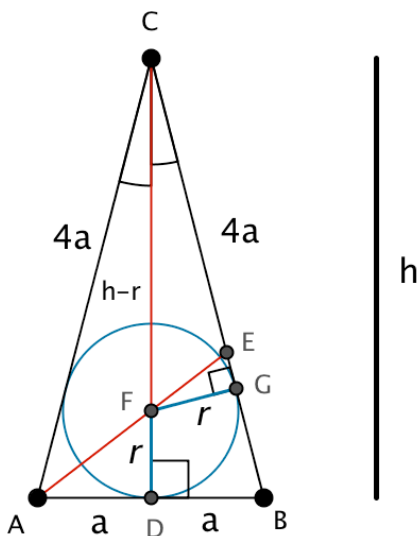
$$14r = 8\sqrt{21}$$

$$r = \frac{8\sqrt{21}}{14} = \frac{4\sqrt{21}}{7}$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on  $\frac{4\sqrt{21}}{7}$ .

Vastaus  $\frac{4\sqrt{21}}{7}$

172



Kolmion sisään piiretyn ympyrän keskipiste on kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion huippukulman puolittaja on myös kolmion korkeusjana.

Kolmiot  $FGC$  ja  $DBC$  ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- molemmissa on suora kulma
- kolmioilla on yhteinen kulma  $\sphericalangle FCG = \sphericalangle DCB$ .

Vasinjanojen suhde on vakio. Muodostetaan yhtälö.

$$\frac{|FC|}{|BC|} = \frac{|FG|}{|BD|} \qquad \begin{cases} |FC| = h - r, & |BC| = 4a \\ |FG| = r, & |BD| = a \end{cases}$$

$$\frac{h - r}{4a} = \frac{r}{a} \qquad | \cdot a (> 0)$$

$$\frac{h-r}{4} = \frac{r}{1}$$

$$h-r = 4r$$

$$5r = h$$

$$r = \frac{h}{5}$$

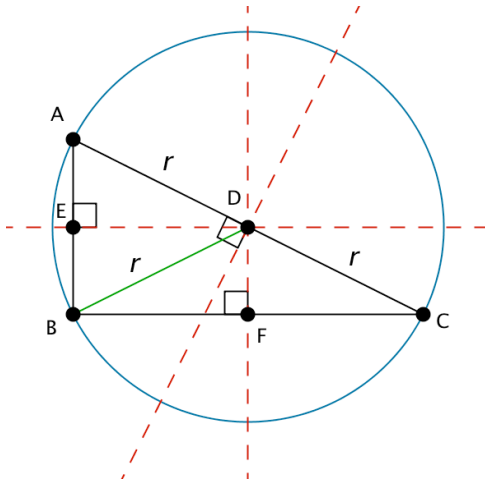
$$= \frac{\sqrt{15}a}{5} = \frac{\sqrt{15}}{5}a$$

$$\left| \begin{array}{l} (4a)^2 = h^2 + a^2 \\ h^2 = 16a^2 - a^2 \\ h = (\pm)\sqrt{15a^2} = \sqrt{15}|a| = \sqrt{15}a \end{array} \right.$$

Kolmion sisään piirretyn ympyrän säde on  $\frac{\sqrt{15}}{5}a$ .

Vastaus  $\frac{\sqrt{15}}{5}a$

173



Käytetään kuvan merkintöjä.

Oletuksena on, että kolmion  $ABC$  ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivulla  $AC$ . On osoitettava, että kolmio  $ABC$  on suorakulmainen.

Kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. Koska ympyrän keskipiste  $D$  on kolmion sivulla  $AC$ , se on välttämättä samalla sivun  $AC$  keskipiste.

Ympyrän säde  $r = |AD| = |DC| = |BD|$ .

Alkuperäinen kolmio  $ABC$  jakautuu ympyrän säteen  $BD$  sekä keskinormaaleilla olevien janojen  $ED$  ja  $FD$  avulla neljään pienempään kolmioon.

Kolmioissa  $BDE$  ja  $AED$  on yhtä pitkät vastinsivut:

$|AD| = |BD|$ ,  $|BE| = |EA|$  ja sivu  $ED$  on yhteinen.

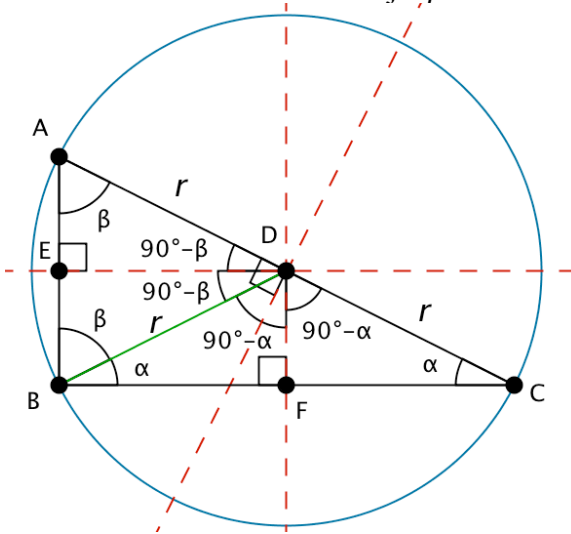
Siis kolmiot  $BDE$  ja  $AED$  ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa  $1 : 1$  eli ne ovat yhtenevät.

Vastaavasti kolmioissa  $BFD$  ja  $CDF$  on yhtä pitkät vastinsivut:

$|BF| = |FC|$ ,  $|BD| = |DC|$  ja sivu  $FD$  on yhteinen.

Siis myös kolmiot  $BFD$  ja  $CDF$  ovat yhdenmuotoiset mittakaavassa 1 : 1 eli ne ovat yhtenevät.

Täydennetään kuvioon kulmat  $\alpha$  ja  $\beta$ .



Kulmat  $ADB$  ja  $BDC$  ovat vieruskulmia, joten

$$\sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = 180^\circ$$

$$2 \cdot (90^\circ - \beta) + 2 \cdot (90^\circ - \alpha) = 180^\circ$$

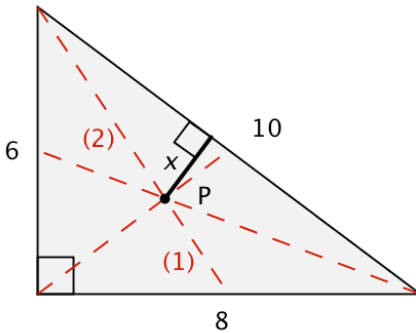
$$180^\circ - 2\beta + 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ$$

$$180^\circ = 2\alpha + 2\beta \quad | :2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Siis kolmion  $ABC$  kulma  $\sphericalangle CBA = \alpha + \beta = 90^\circ$ , joten saatiin osoitettua kolmio  $ABC$  suorakulmaiseksi.  $\square$

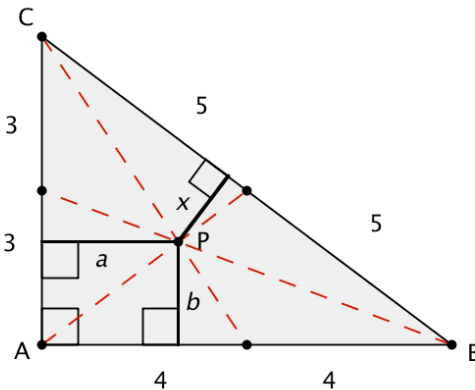
174



Painopiste  $P$  jakaa mediaanit  $2 : 1$  kärjestä lukien.  
 Merkitään kysyttyä painopisteen  $P$  etäisyyttä hypotenuusasta kirjaimella  $x$ .

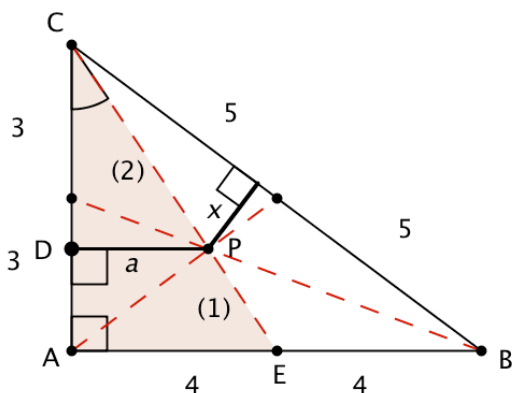
Huomaa, että mediaani jakaa kolmion sivut kahteen yhtä pitkään osaan. Tutkittava  $x$ :n pituinen jana ei ole osa mediaania, joten se ei jaa hypotenuusaa kahteen yhtä pitkään osaan.

Täydennetään kuviota.



Selvitetään kirjaimilla  $a$  ja  $b$  merkittyjen janojen pituudet yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Lasketaan tämän jälkeen kysytty  $x$  kolmion pinta-alan avulla.



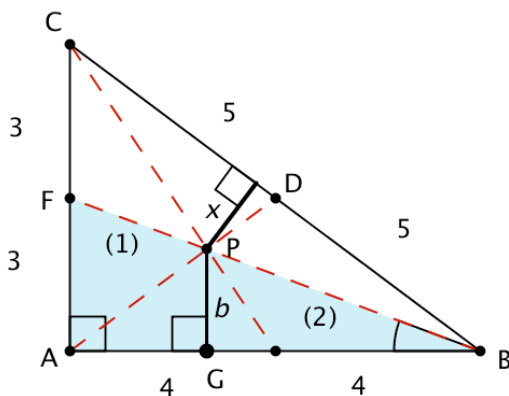


Kolmiot  $AEC$  ja  $DPC$  ovat yhdenmuotoiset (kk), koska

- molemmissa on suora kulma ja
- kulma  $ACE$  on yhteinen.

Saadaan yhtälö vastinjanojen suhteen avulla.

$$\frac{a}{4} = \frac{2}{3} \quad \text{eli} \quad a = \frac{8}{3}$$



Vastaavasti kolmiot  $ABF$  ja  $GBP$  ovat yhdenmuotoiset (kk).

Saadaan yhtälö vastinjanojen suhteen avulla.

$$\frac{b}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{eli} \quad b = \frac{6}{3}$$

Alkuperäisen kolmion  $ABC$  pinta-ala on

$$A = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24.$$

Toisaalta kolmion  $ABC$  pinta-ala on

$$A = \frac{6 \cdot a}{2} + \frac{8 \cdot b}{2} + \frac{10 \cdot x}{2}$$
$$\left| \begin{array}{l} a = \frac{8}{3} \\ b = \frac{6}{3} \end{array} \right.$$

$$= \frac{6 \cdot \frac{8}{3}}{2} + \frac{8 \cdot \frac{6}{3}}{2} + \frac{10x}{2}$$

$$= 8 + 8 + 5x$$

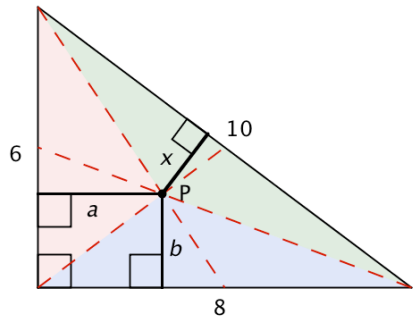
$$= 16 + 5x.$$

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan  $x$ .

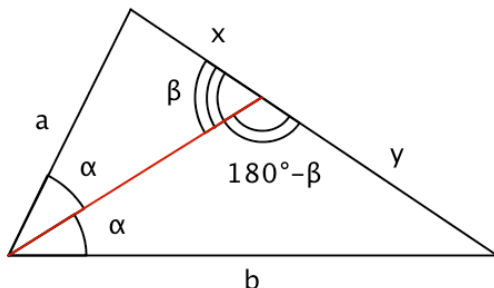
$$16 + 5x = 24 \quad \text{eli} \quad 5x = 8 \quad \text{eli} \quad x = \frac{8}{5}$$

Painopisteen etäisyys hypotenuusasta on  $\frac{8}{5}$ .

Vastaus  $\frac{8}{5}$



## 175



On osoitettava, että kolmion kulmanpuolittaja jakaa kulman vastaisen sivun viereisten suhteessa eli  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ .

**Tapa 1**

Sovelletaan sinilauseetta erikseen molempiin syntyneisiin osakolmioihin.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta} \\ \frac{y}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \beta)} \end{array} \right. \quad \left| \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \sin \beta = a \sin \alpha \\ y \sin \beta = b \sin \alpha \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = \frac{x \sin \beta}{a} \\ y \sin \beta = b \sin \alpha \end{array} \right. \quad \left| \text{Sijoitetaan alempaan yhtälöön.} \right.$$

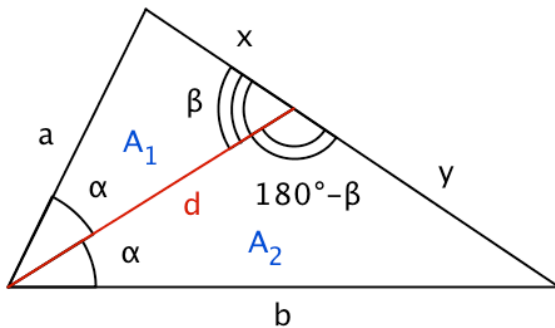
$$y \sin \beta = b \cdot \frac{x \sin \beta}{a} \quad \left| \cdot \frac{a}{\sin \beta} \right.$$

$$y \cdot a = b \cdot x \quad \left| : by \right.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Saatiin osoitettua, että  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ , joten väite on todistettu.  $\square$

## Tapa 2



Lasketaan osakolmioiden pinta-alat  $A_1$  ja  $A_2$  ja muodostetaan yhtälöpari.

$$(A_1 =) \frac{1}{2} ad \sin \alpha = \frac{1}{2} xd \sin \beta \quad \left| \cdot \frac{2}{d} \right.$$

$$a \sin \alpha = x \sin \beta$$

$$(A_2 =) \frac{1}{2}bd \sin \alpha = \frac{1}{2}yd \sin(180^\circ - \beta) \quad \left| \cdot \frac{2}{d} \right.$$

$$b \sin \alpha = y \sin(180^\circ - \beta) \quad \left| \sin(180^\circ - \beta) = \sin \beta \right.$$

$$b \sin \alpha = y \sin \beta$$

Muodostetaan yhtälöpari.

$$\begin{cases} a \sin \alpha = x \sin \beta \\ b \sin \alpha = y \sin \beta \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Ratkaistaan ylemmästä } \sin \alpha \\ \text{ja sijoitetaan alempaan yhtälöön.} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{x \sin \beta}{a} \\ b \sin \alpha = y \sin \beta \end{cases}$$

$$b \sin \alpha = y \sin \beta$$

$$b \cdot \frac{x \sin \beta}{a} = y \sin \beta \quad \left| : \sin \beta \right.$$

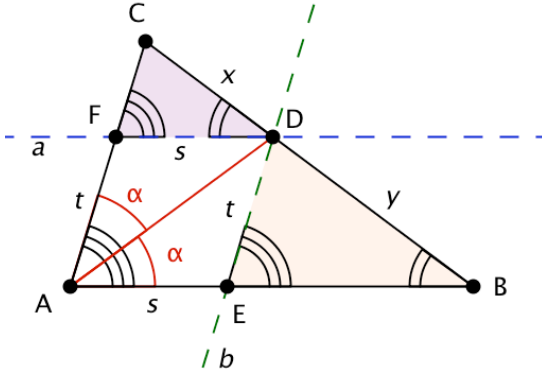
$$b \cdot \frac{x}{a} = y \quad \left| \cdot \frac{a}{by} \right.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

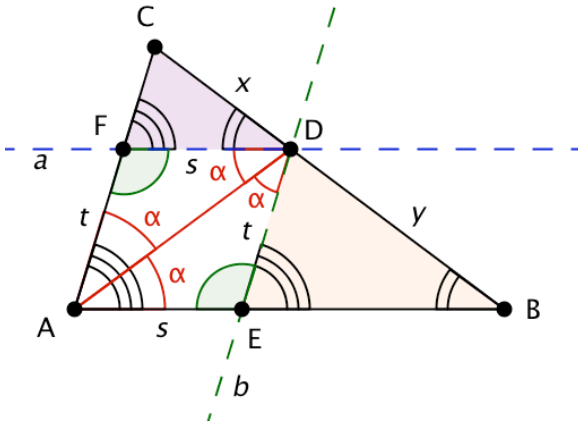
Saatiin osoitettua, että  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ , joten väite on todistettu.  $\square$

### Tapa 3

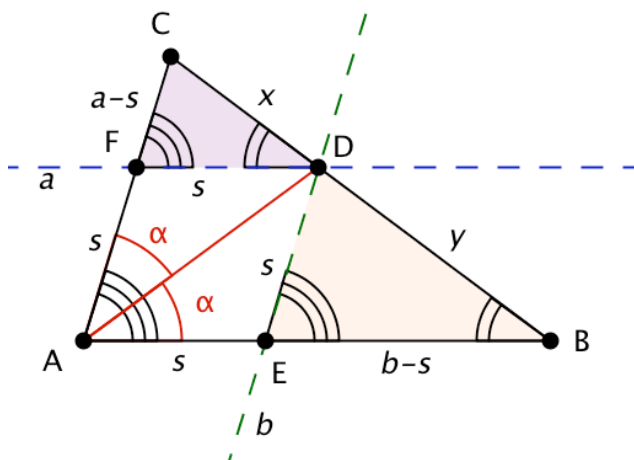
Piirretään kulmanpuolittajan ja sivun  $BC$  leikkauspisteeseen sivujen  $AC$  ja  $AB$  suuntaiset suorat. Syntyy kolme kolmiota:  $\triangle ABC$ ,  $\triangle EBD$  ja  $\triangle FDC$ .



Kolmiot  $\triangle ABC$ ,  $\triangle EBD$  ja  $\triangle FDC$  ovat yhdenmuotoiset (kk), koska niissä on kaksi samaa vastinkulmaparia (samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuret, koska piirretyt suorat ovat yhdensuuntaisia kolmion sivujen kanssa).



Lisäksi havaitaan, että kolmiot  $AED$  ja  $AFD$  ovat tasakylkisiä, koska niiden kantakulmat ovat yhtäsuuret ( $\alpha$ , punainen kaari), joten  $s = t$ .



Yhdenmuotoisissa kolmioissa vastinjanojen suhde on vakio.

Kolmioiden  $ABC$  ja  $EBD$  avulla saadaan yhtälö

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|ED|}{|EB|}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{s}{b-s}$$

Toisaalta kolmioiden  $FDC$  ja  $EBD$  avulla saadaan yhtälö

$$\frac{|CD|}{|DB|} = \frac{|FD|}{|EB|}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{s}{b-s}$$

Siis  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$  ja väite on todistettu.  $\square$