Matematiikkaa laskimella TI-*n*spire CX CAS

Timo Mäkelä

Sisällysluettelo

0. ESIPUHE

Tässä kirjassa käsitellään sitä, miten laskinta TI-*n*spire CX CAS voidaan käyttää matematiikassa. Lähtökohtana on siis matematiikka, eikä tämä niin muodoin ole laskimen esittely. Toki laskimen käyttö tulee samalla hyvin tutuksi.

Laskimen valmistaja puhuu kämmenlaitteesta, joka nimitys pyrkii tuomaan eroa tavalliseen laskimeen. Laskimen ominaisuudet ovatkin sellaiset, että se lähestyy tietokonetta. Tässä laitetta sanotaan kuitenkin laskimeksi, koska sitä käytetään hyvin laskimen omaisesti.

Laskin tuntuu hyvältä ja monipuoliselta. Jossain asioissa se on jopa parempi kuin olemassa olevat matematiikkaohjelmat, joihin sitä hyvin voidaan verrata. Toki vaativampien laskujen ja korkeamman matematiikan tarpeisiin laskin ei riitä.

Nykyään matematiikkaa voidaan yhä enemmän tehdä laskimilla ja tietokoneohjelmilla. Ei ole järkevää pysyttäytyä ns. käsinlaskennassa, vaan on osattava käyttää tehokkaasti keskeisimpiä olemassa olevia työkaluja. Tässä voidaan mennä toiseenkin ääripäähän: saatetaan ajatella, että riittäisi osata käyttää matematiikan työkaluja. Tällöin matematiikka olisi pelkästään laskinten ja matematiikkaohjelmien käytön opettelua. Tämä on kuitenkin väärä ajatus, sillä matematiikka on paljon muutakin kuin laskentaa. Matematiikka on ajattelutapa. Jotta pystyisi tehokkaasti käyttämään olemassa olevia matematiikan työkaluja on tiedettävä, mitä operaatioita lausekkeilla voidaan suorittaa, millaisia yhtälöitä voidaan ratkaista ja millaisia nämä ratkaisut ovat. On osattava matematiikan peruskäsitteitä ja rakenteita. Kun nämä hallitsee, pystyy myös matematiikan työkaluja käyttämään tehokkaasti. Aina työkalut eivät tee kaikkea, vaan niitä on autettava käsin laskennalla. Nykyään matematiikka parhaimmillaan onkin ihmisen ja teknisten laskuvälineiden välistä yhteistyötä.

1. PERUSASIOITA LASKIMESTA

2. LASKIMEN KÄYTTÄMINEN

2.1 Laskutekniikkaa

Tässä luvussa on esitetty laskimen tehokkaaseen käyttöön liittyviä asioita. Jos joku asia on vieras tai tuntuu vaikealta, niin sen voi ohittaa ja siirtyä seuraavaan asiaa. Tarpeen vaatiessa siihen voi uudestaan palata. Tässä esitetyt ohjeet ovat tietenkin subjektiivisia. Jokainen laskimen käyttäjä omaksuu omat käytänteensä. Joitain tässä esitetyistä asioista käsitellään uudelleen myöhemmissä luvuissa.

Laskettaessa on aina laskimen näytöltä tarkistettava syötön oikeellisuus*. Laskin laskee oikein, jos syöttö on oikea ja laskimen asetukset ovat tehtävän mukaiset*. On aina oltava tietoinen laskimen asetuksista.

1. Laskutila

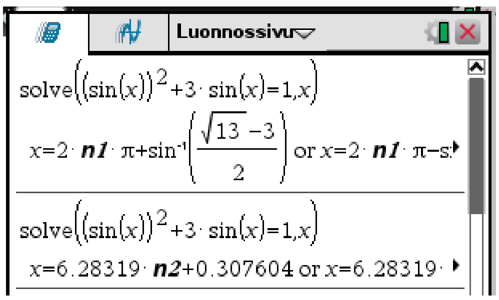
Laskin kannattaa yleensä pitää laskutilassa **Automaattinen**. Jos tällöin syötössä olevissa luvuissa ei esiinny desimaalipistettä, laskin pyrkii `enter`-näppäintä painettaessa esittämään tarkan arvon. Desimaaliesityksen saa, kun painaa näppäimiä `ctrl` `enter`. Jos syötössä esiintyy desimaalilukuja esittää laskin tuloksen desimaaliesityksenä.

Desimaalipistettä käyttäen voi joissain tilanteissa ohjata tuloksen muotoa: osa esitetään tarkasti, osa desimaaliesityksenä. Tällöin komento on päätettävä näppäimellä `enter`.

ESIMERKKEJÄ

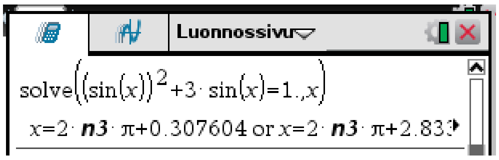
1. Ratkaistaan yhtälö

$$\sin^2 x + 3\sin x = 1$$



Ensimmäisessä solve-komennossa yhtälö on kirjoitettu sellaisenaan (ei desimaalipisteitä) ja komento päätetty näppäimellä `enter`. Tulos on tarkka, mutta siinä esiintyy termi, jonka arvoa ei ole laskettu.

Toisessa solve-komennossa yhtälö on samassa muodossa, mutta komento on päätetty näppäimillä `ctrl` `enter`. Nyt laskin laskee termille 2π desimaaliesityksen, joka on huono asia, sillä trigonometrisissa yhtälöissä ratkaisun jakso halutaan yleensä esittää luvun π avulla.



Yllä yhtälöön on luvun 1 perään laitettu desimaalipiste ja komento päätetty näppäimellä enter. Nyt ratkaisu on helposti luettavassa muodossa. Ratkaisu on

$$x = 0{,}307604 + n \cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x = 2{,}83399 + n \cdot 2\pi$$

♦

2. Arvon laskenta

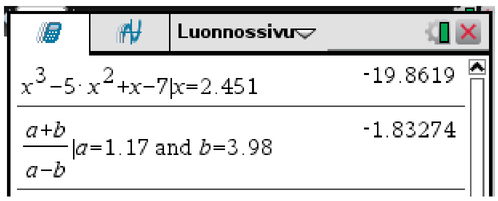
Lausekkeen arvon laskenta on syytä tehdä *rajoitusoperaattoria* | käyttäen. Tällöin muuttujat säilyvät arvoista vapaina ja syötöstä näkee heti onko se oikein. Rajoitusoperaattori löytyy näppäimillä ctrl = aukeavasta ikkunasta.

ESIMERKKEJÄ

2. Lasketaan lausekkeiden arvoja

$$x^3 - 5x^2 + x - 7 \quad \text{, kun} \quad x = 2{,}451$$

$$\frac{a+b}{a-b} \quad \text{, kun} \quad a = 1{,}17 \quad \text{ja} \quad b = 3{,}98$$



Sanaa **and** käytetään useita arvoja syötettäessä.

♦

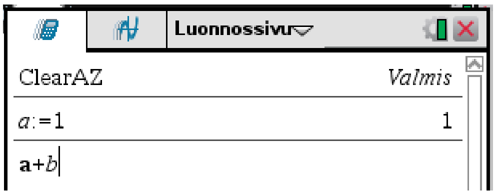
3. Kirjaimilla laskeminen

Kirjaimilla laskettaessa on aina hyvä ennen laskemista tyhjentää kirjaimet *a* ... z menu-valikon komennolla **1: Toiminnot >> 4: Tyhjennä a-z …** Komento näkyy syöttörivillä komentona **ClearAZ**. Yhden kirjaimen muuttujia *a* ... z voi käyttää väliaikaisten tulosten tallentamiseen. Pysyvämmät tallennukset on tehtävä muuttujiin, joissa on ainakin kaksi merkkiä. Syöttövaiheessa muuttuja, jossa on arvoja näkyy lihavoituna.

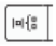
Asiakirjassa määritellyt muuttujat ovat käytettävissä kaikkialla samassa asiakirjassa. Esimerkiksi piirtofunktio voidaan määritellä laskentatilassa.

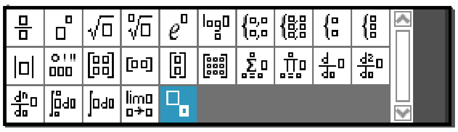
ESIMERKKEJÄ

3. Seuraavassa muuttujassa a on arvo, muuttujassa b ei ole arvoa.



♦

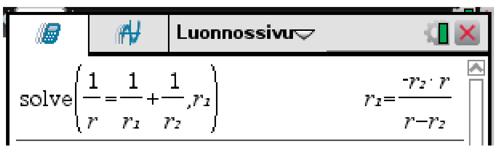
Tehtäviä ratkaistaessa on syytä käyttää tehtävässä esiintyviä kirjaimia. Tämä koskee erityisesti sovellustehtäviä. Tällöin yhteyden selvittäminen omien muuttujien ja tehtävän muuttujien välillä jää pois. On kuitenkin huomattava, että laskimessa isot ja pienet kirjaimet ovat samoja ja ne näkyvät pieninä kirjaimina. Laskuissa ei siis kannata käyttää isoja kirjaimia. Alaindeksit, jos niitä haluaa käyttää, löytyy näppäimellä  aukeavasta lausekemallistosta.



ESIMERKKEJÄ

4. Ratkaistaan R_1 yhtälöstä

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\quad .$$



Siis

$$R_1=-\frac{R_2 R}{R-R_2}$$

♦

4. Lausekkeiden kirjoittaminen

Lausekkeita kirjoitettaessa on huomattava seuraavaa:

- Kirjaimia kerrottaessa on väliin laitetta kertomerkki
- Sulkumerkkeinä saa käyttää vain kaarisulkuja.
- Kirjaimen ja perässä olevan alkavan sulun väliin täytyy laittaa kertomerkki.
- Miinusmerkkejä on kaksi:
    - − on *vähennyslaskumerkki*, joka tulee lausekkeiden väliin.
    - (−) on *etumerkki miinus*, joka tule lausekkeen eteen.

  Näitä ei saa sotkea.

Näyttöriviä voi kelata näkyviin nuolipainikkeilla ► ja ◄. Kun kohdistin on tuloslausekkeessa, voi näppäimellä

- ctrl 7 hypätä suoraan rivin alkuun, jos kohdistin ei ole rivin alussa.
- ctrl 1 hypätä suoraan rivin loppuun, jos kohdistin ei ole rivin lopussa.

ESIMERKKEJÄ

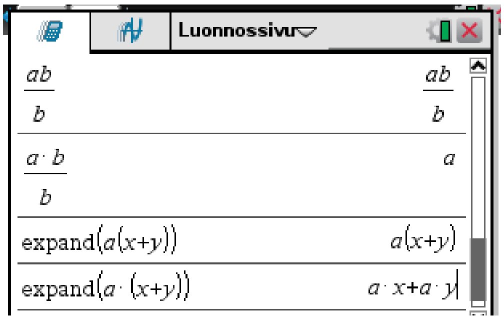
5. Lausekkeita

$$\frac{a\,b}{a}$$

ja

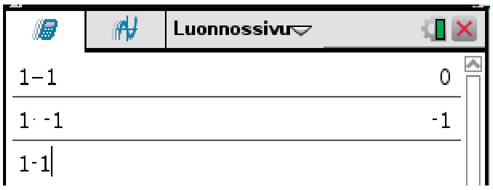
$$a(x+y)$$

syötettäessä on käytettävä kertomerkkiä.



♦

6. Näppäimiä − ja (−) ei saa sotkea.



Ylinnä on vähennyslasku, joka on saatu aikaiseksi näppäimellä −. Seuraavalla rivillä on kertolasku, jonka syöttö näkyy alinna. Siinä on käytetty näppäintä (−).

♦

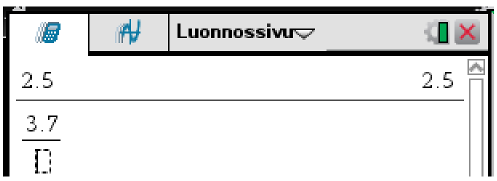
Lausekkeiden syöttämisessä voi käyttää lausekemalleja, jotka saa näppäimellä . Lausekemallin paikasta toiseen kannattaa siirtyä näppäimellä tab.

Osamäärän syöttäminen tapahtuu kätevästi näppäimillä ctrl ÷, jolloin aukeaa murtolukumalli, jonka paikat täytetään. Jos nimittäjään haetaan arvo historiatiedoista, ei tämä kuitenkaan toimi. Tällöin on parempi käyttää jakolaskuun näppäintä ÷.

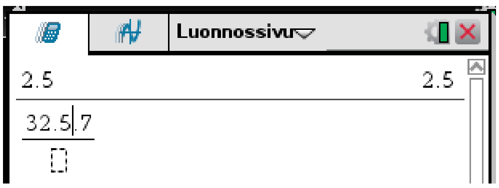
ESIMERKKEJÄ

7. Tutkitaan jakolaskun suorittamista.

Aukaistaan murtolukumalli ctrl ÷ ja täytetään osoittaja.

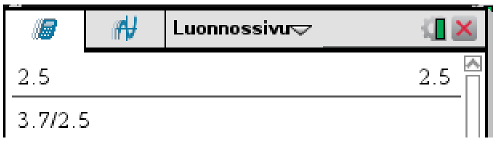


Nimittäjään haetaan historiatiedoista luku 2.5 viemällä kohdistin nuolipainikkeella ▲ luvun päälle ja painamalla näppäintä enter.



Luku tulee väärään paikkaan! Tietenkin sen voi kopioida ja sitten liittää oikeaan paikkaan.

Käyttämällä näppäintä ÷ tätä ongelmaa ei tule



Tästä huolimatta jakolasku on kätevä toteuttaa näppäimillä .

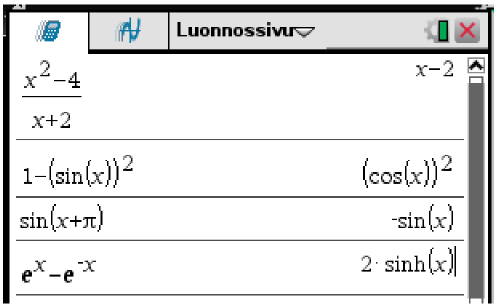
♦

5. Automaattiset sievennykset

Laskin suorittaa joskus automaattisia sievennyksiä, jolloin laskin kirjoittaa syötetyn lausekkeen eri muodossa.

ESIMERKKEJÄ

8. Laskin supistaa ja käyttää joitain trigonometrian kaavoja automaattisesti.



♦

6. Yhtälöiden ratkaisujen jatkokäyttö

Jos yhtälöllä on useita ratkaisuja ja niitä pitää jatkotyöstää, voi olla parempi komennon **solve** sijasta käyttää komentoa **zeros**. Koska

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$$

voidaan yhtälö aina muuttaa nollakohtien määrittämiseksi tai päinvastoin. Siis komennot

solve(f(x)=g(x), x)

ja

zeros(f(x)-g(x), x)

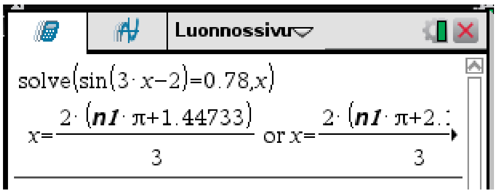
antavat saman ratkaisujoukon.

ESIMERKKEJÄ

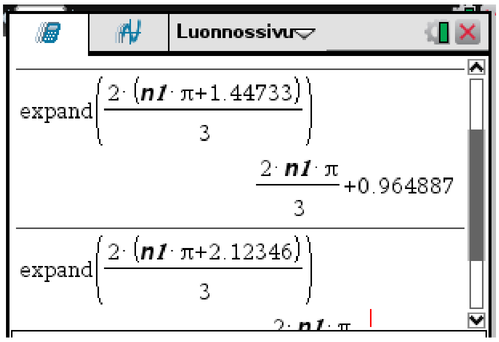
9. Ratkaistaan yhtälö

$$\sin(3x-2)=0{,}78$$

Solve-komento antaa tuloksen



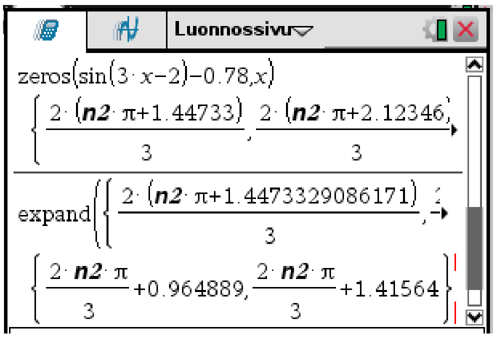
jossa pitäisi suorittaa vielä kerto- ja jakolaskut. Tämä ei kuitenkaan onnistu yhdellä komennolla, vaan ratkaisujoukon molemmat osat on käsiteltävä erikseen. Maalataan ⇧shift -näppäin pohjassa halutut ratkaisun osat, ja annetaan **expand**-komento.



Muuttamalla yhtälö muotoon

$$\sin(3x-2)-0{,}78=0 \quad ,$$

voidaan käyttää **zeros**-komentoa, jonka tulos on listarakenne. Tähän voidaan kohdistaa **expand**-komento[1].



Ratkaisu on siis

$$x=0{,}964889+n\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{tai} \quad x=1{,}41564+n\cdot\frac{2\pi}{3}$$

♦

[1] Huomaa, että laskennan tarkkuus ei muutu, kuten edellisessä tavassa.

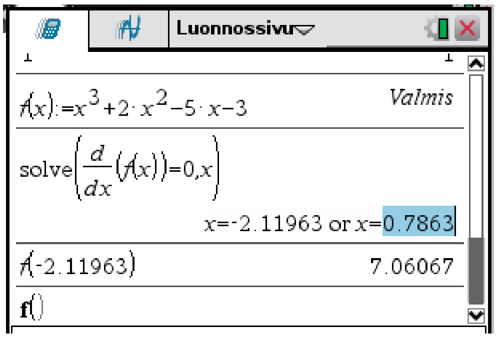
10. Lasketaan funktion

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-3$$

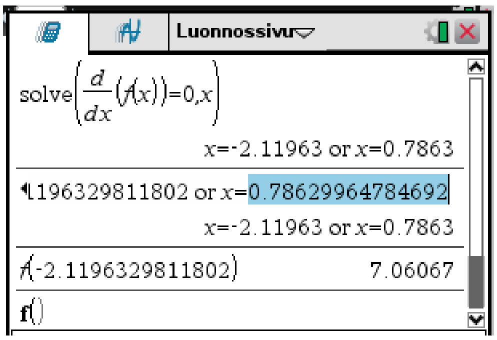
arvot funktion derivaatan nollakohdissa.

Tallennetaan funktio ensin funktioksi $f(x)$.

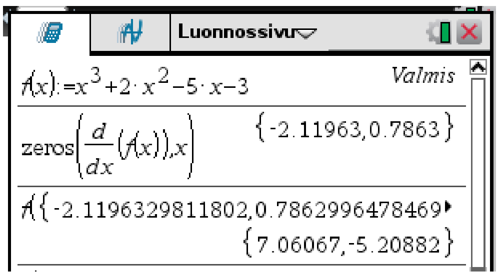
Käytettäessä **solve**-komentoa derivaatan nollakohtien määrittämiseen, on funktion arvot nollakohdissa laskettava erikseen kullekin nollakohdalle. Nollakohdat voidaan hakea maalaamalla.



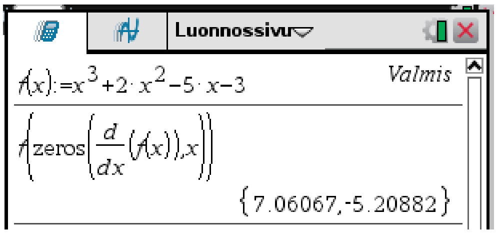
Jos nollakohdat haetaan kuvan mukaisesti solve-komennon tuloksesta, saadaan nollakohdat vain 5-6 desimaalilla. Parempi tapa on ottaa solve-komennon tulos syöttöriville ja hakea nollakohdat sieltä.



Käytettäessä **zeros**-komentoa derivaatan 0-kohtien määrittämiseen, voidaan funktion arvot nollakohdissa laskea yhdellä käskyllä ja tarkkuus säilyy.



Koko asia voidaan tehdä vielä lyhyemmin.



Funktio arvot derivaatan nollakohdissa ovat siis 7,06067 ja −5,20882 .

♦

7. Derivointi ja integrointi

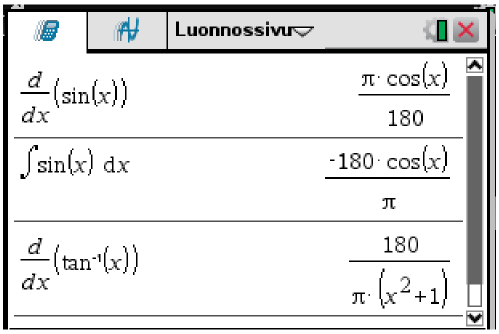
Derivoitaessa ja integroitaessa on laskimen asetusten oltava seuraavat:

- Kulma: **Radiaani**
- Reaali- tai kompleksiluku: **Reaali**.

ESIMERKKEJÄ

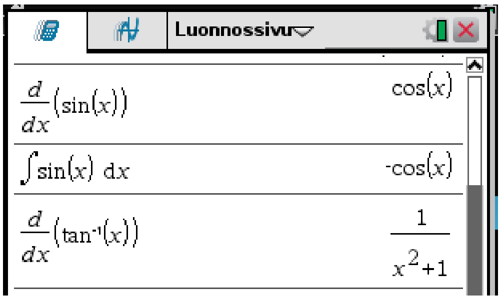
11. Jos laskimen kulma-asetus on väärä, menee trigonometristen funktioiden ja niiden käänteisfunktioiden derivaatat ja integraalit väärin.

    Seuraavissa laskuissa kulma-asetus on **Aste**.



Tulokset ovat väärin.

Seuraavissa laskuissa kulma-asetus on **Radiaani**.



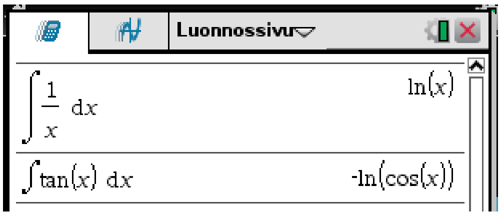
Tulokset ovat nyt oikein.

♦

ESIMERKKEJÄ

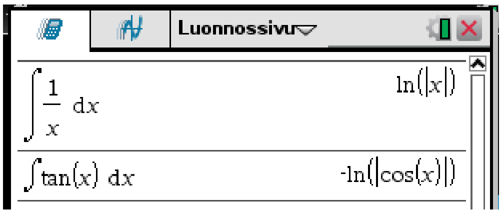
12. Logaritmiin päätyviä integraaleja laskettaessa tulos on väärin, jos kompleksilukuasetus on jokin muu kuin **Reaali**, koska logaritmista puuttuu itseisarvo.

Kompleksilukuasetus: **Suorakulma**



Näissä pitäisi olla itseisarvon logaritmi.

Kompleksilukuasetus: **Reaali**



Tulokset ovat nyt oikein.

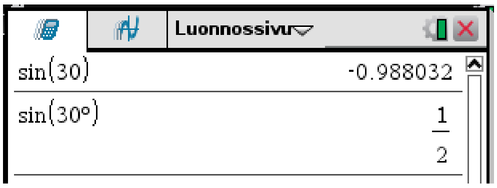
♦

8. Asteet radiaanimoodissa

Jos laskimen kulma-asetus on **Radiaani**, voi astemerkkiä käyttämällä laskea asteissa. Astemerkki löytyy näppäimellä ?!▸ aukeavasta ikkunasta.

ESIMERKKEJÄ

13. Seuraavassa laskimen kulma-asetus on **Radiaani**



♦

9. Komentoparametrit

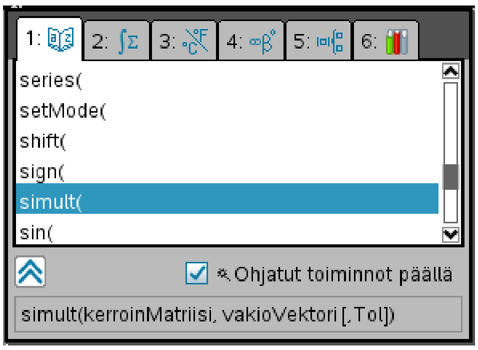
Jos komennon parametreja ei tiedä, voi ne tarkistaa hakemalla komento *katalogista*, joka aukeaa näppäimillä 1. Kun kohdistin viedään komennon päälle, näyttää laskin komennon kutsuparametrit. Katalogissa on hyvä pitää ohjatut toiminnot päällä.

Katalogissa voi liikkua seuraavasti:

- Painamalla kirjannäppäintä siirrytään aakkosjärjestyksessä ensimmäiseen ko. kirjaimella alkavaan komentoon.
- Nuolinäppäimillä ▲ ja ▼ voi siirtyä ylös ja alas rivi kerrallaan.
- Näppäimillä
    - ctrl 3 siirrytään näytön verran eteenpäin.
    - ctrl 9 siirrytään näytön verran taaksepäin.
    - ctrl 7 siirrytään katalogin ensimmäiselle riville.
    - ctrl 1 siirrytään katalogin viimeiselle riville.

ESIMERKKEJÄ

14. Kuvassa on komennon **simult** kutsuparametrit.



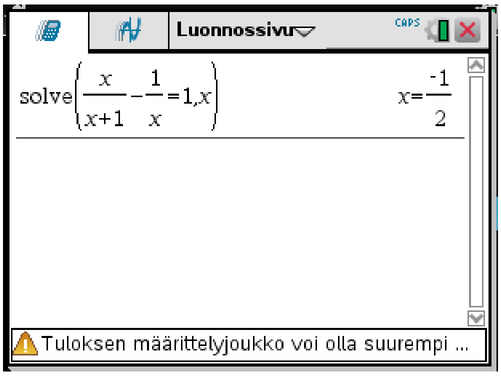
Ohjatut toiminnot ovat myös päällä.

♦

Usein laskin antaa näytön alareunaan aiheettoman varoituksen ⚠Tuloksen määrittelyjoukk, josta ei tarvitse välittää.

ESIMERKKEJÄ

15. Ratkaistaan yhtälö



Tämä varoitus on turha.

♦

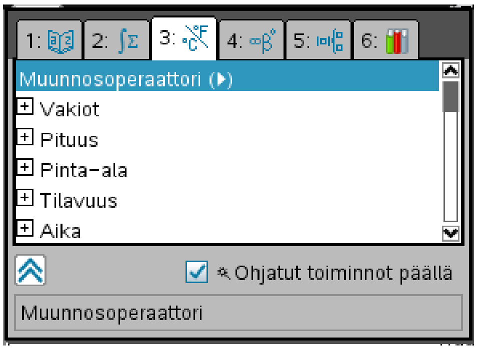
10. Historiatietojen käyttö

Useammasta vaiheesta koostuvia laskuissa on aikaisemmat tulokset haettava historiatiedoista, joissa voi liikkua nuolipainikkeilla ▲ ja ▼. Kun haluttu tulos on sinisellä pohjalla, saa sen syöttöriville enter-näppäimellä. Historiatiedoista voi myös maalata vain osan pitämällä ⇧shift-näppäintä pohjassa ja liikkumalla nuolipainikkeilla ► ja ◄. Maalatun osan saa syöttöriville enter-näppäimellä. Takaisin syöttöriville pääsee esc-näppäimellä.

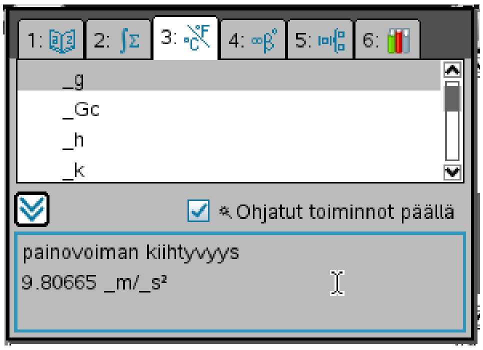
2.2 Yksiköiden ja vakioiden käyttö

Laskimella voi laskea yksiöitä käyttäen. Yksikköjärjestelmä määritetään kotinäytön asetuksissa 5 Asetukset, josta valitaan **2: Asiakirjan asetukset...** Avautuvan ikkunan kohdassa **Yksikköjärjestelmä** valitaan yksikköjärjestelmäksi joko **SI** tai **Eng/US**. Seuraavassa yksikköjärjestelmä on **SI**.

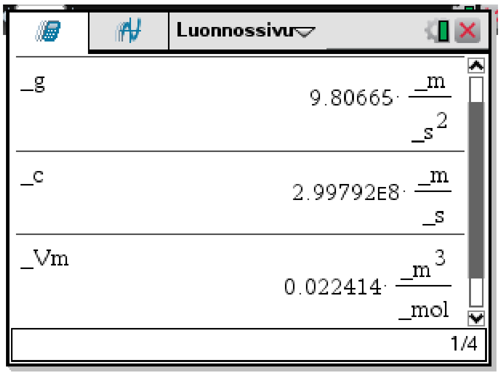
Yksiköt ja vakiot löytyvät komennolla 📖 3 aukeavasta ikkunasta.



Fysiikan vakiot löytyvät kohdasta ⊞ Vakiot. Vakioiden nimet alkavat alaviivalla. Viemällä kohdistin vakion kohdalle, tulee näytön alareunaan tieto siitä, mikä vakio on kyseessä.



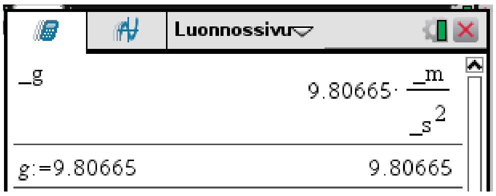
Painamalla näppäintä enter saadaan valittu vakio syöttöriville. Se sisältää yksiköt.



Jos haluaa laskea ilman yksiköitä voidaan yksiköt poistaa.

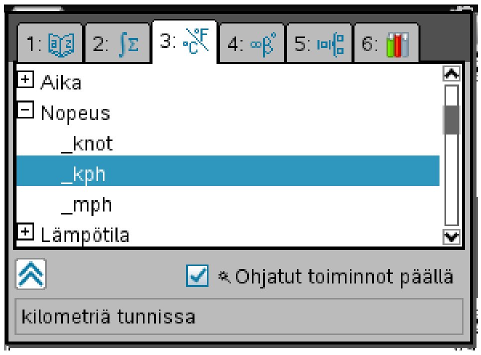
ESIMERKKEJÄ

1. Jos halutaan käyttää vain putoamiskiihtyvyyden arvoa, poistetaan yksikkö ja tallennetaan arvo muuttujaan *g*.



♦

Yksiköt on ryhmitelty suureen mukaan. Yksiköiden nimet alkavat alaviivalla. Viemällä kohdistin yksikön kohdalle, tulee näytön alareunaan tieto siitä, mikä yksikkö[1] on kyseessä.

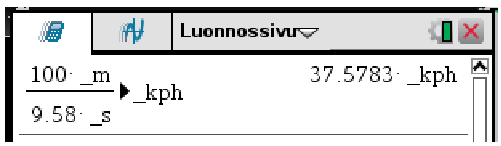


Yksikön voi myös kirjoittaa myos itse. Tarvittava alaviiva löytyy näppäimellä aukeavasta ikkunasta.

Muunnos yksiköstä toiseen tapahtuu *muunnosoperaattorilla*, joka on ylinnä yksiköt- ja vakiot-ikkunassa. Operaattori tulee muunnettavan lausekkeen perään ja sen perään laitetaan tuloksen yksikkö.

ESIMERKKEJÄ

2. Pikajuoksun 100 m maailmanennätys on 9,58 s. Määritetään keskinopeus km/h.



Siis keskinopeus on 37,58 km/h.

♦

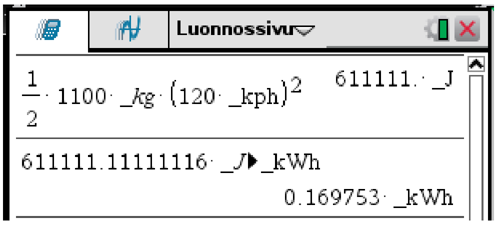
3. Kappale, jonka massa on 1100 kg kulkee nopeudella 120 km/h. Määritetään kappaleen kineettinen energia.

[1] Joissain kohdin nämä on oudosti suomennettu. Esim. yksikkö **_s** on **toinen**. Pitäisi olla **sekunti**.

Kineettinen energia on

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2 \quad ,$$

missä *m* on kappaleen massa ja *v* kappaleen nopeus.
Lasketaan laskimella.



Kineettinen energia on siis 611,111 kJ, joka on 0,169753 kWh.

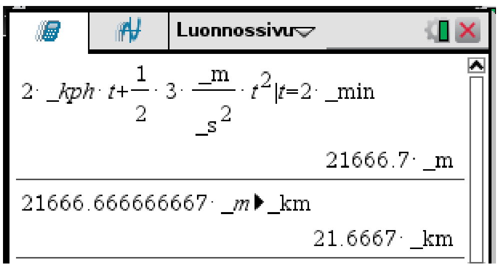
♦

4. Tarkastellaan tasaisesti kiihtyvä suoraviivaista liikettä. Olkoon hiukkasen kiihtyvyys $a=3\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ja hetkellä $t=0$
   - sijainti on $s_0=0\,m$
   - nopeus on $v_0=2\,\dfrac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

   Tällöin hiukkasen sijainti *s* hetkellä *t* lasketaan kaavasta

$$s=s_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2 \quad .$$

Määritetään hiukkasen sijainti hetkellä $t=2\,\mathrm{min}$. Annetaan tulos kilometreinä.



Siis sijainti on 21,6667 km.

♦

3. LUVUT

3.1 Kokonaisluvut

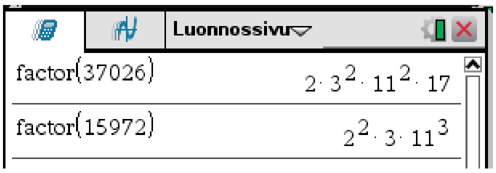
Kokonaislukuihin liittyviä komentoja löytyy menu-valikosta **2: Luku**:

- **3: Tekijä**: Kokonaisluvun tekijöihin jako. Komento näkyy syöttörivillä komentona **factor**. Kokonaisluvun tekijöihin jaossa luku esitetään alkulukujen potenssien tulona.
- **4: Pienin yhteinen jaettava**: Kahden kokonaisluvun pyj. Komento näkyy syöttörivillä komentona **lcm**
- **5: Suurin yhteinen tekijä**: Kahden kokonaisluvun syt. Komento näkyy syöttörivillä komentona **gcd**

Komennoissa **lcm** ja **gcd** argumentteina on kaksi lukua, jotka erotetaan pilkulla.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään lukujen 37026 ja 15972 tekijöihin jako.



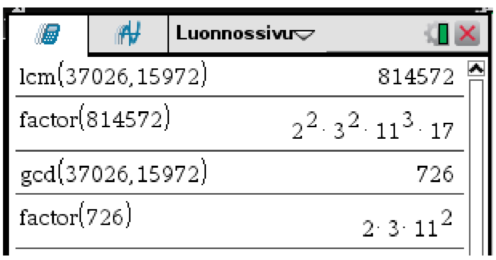
♦

Lukujen

- pienin yhteinen jaettava on tulo, jonka tekijöinä ovat lukujen tekijöihin jaossa esiintyvien kaikkien alkulukujen suurimmat potenssit.
- suurin yhteinen tekijä on tulo, jonka tekijöinä ovat lukujen tekijöihin jaossa esiintyvien yhteisten alkulukujen pienimmät potenssit.

ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään lukujen 37026 ja 15972 pienin yhteinen jaettava ja suurin yhteinen tekijä.



Huomaa, kuinka lukujen pyj ja syt saadaan lukujen tekijöihin jaoista, jotka on laskettu edellisessä esimerkissä.

♦

menu-valikon komento **2: Luku >> 6: Jakojäännös** muodostaa kahden luvun jakolaskun jakojäännöksen. Komento näkyy syöttörivillä komentona **remain**. Komennon muoto on

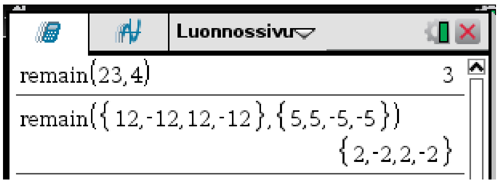
remain(m, n)

ja se muodostaa lukujen **m** ja **n** jakolaskun **m/n** jakojäännöksen, jonka tulos on samanmerkkinen kuin **m** tai nolla. Jos **n** = 0, on **remain(m,** 0**) = m**.

Komentojen argumenttina voi olla myös listat, jolloin komentoa sovelletaan listan vastinalkioihin ja tulos esitetään listana samassa järjestyksessä.

ESIMERKKEJÄ

3. Kokeillaan komentoa **remain**.



Jälkimmäisestä laskusta huomataan, että tulos on samanmerkkinen kuin kutsun ensimmäinen argumentti.

♦

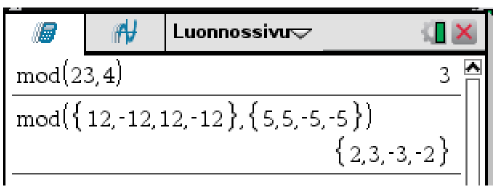
menu-valikon komento **2: Luku >> 8: Lukutyökalut >> 5: Mod** muodostaa myös kahden luvun jakolaskun jakojäännöksen. Komento näkyy syöttörivillä komentona **mod**. Komennon muoto on

mod(m, n)

ja se muodostaa lukujen **m** ja **n** jakolaskun **m/n** jakojäännöksen, jonka tulos on samanmerkkinen kuin **n** tai nolla. Jos **n** = 0, on **mod(m,** 0**) = m**.

ESIMERKKEJÄ

4. Kokeillaan komentoa **mod**.



Jälkimmäisestä laskusta huomataan, että tulos on samanmerkkinen kuin kutsun toinen argumentti.

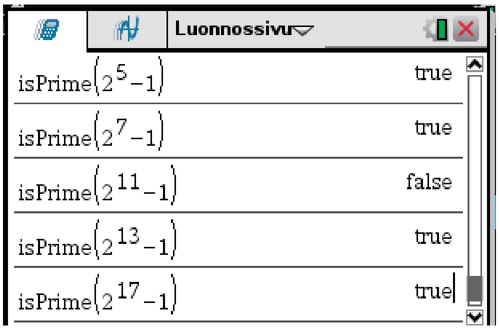
♦

Komennot **remain** ja **mod** antavat siis samat tulokset positiivisille kokonaisluvuille.

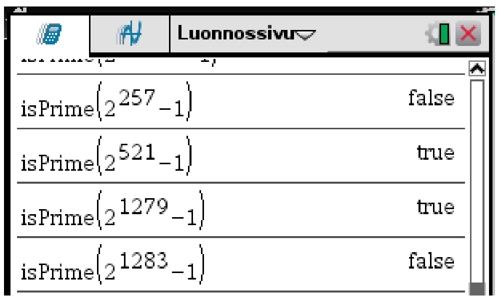
Katalogista löytyvä komento **isprime** määrittää onko luku alkuluku. Tulos esitetään totuusarvona.

ESIMERKKEJÄ

5. **Mersennen luvut.** Mersennen[1] alkuluku on muotoa $2^n - 1$ oleva alkuluku. Tällöin eksponentin n on oltava alkuluku. Kuitenkaan jokainen muotoa $2^n - 1$, missä n on alkuluku, ei ole alkuluku. Kokeillaan laskimella



Kokeellista tutkimista voisi jatkaa...



Seuraavassa on Wolfram|Aplhalla tulostettu tällä hetkellä tiedossa olevat Mersennen alkuluvut

[1] **Marin Marsenne** (1588-1648) oli ranskalainen munkki, joka oli kirjeenvaihdossa aikansa huomattavimpien matemaatikkojen kanssa. Hän tutki lukuteoriaa, erityisesti nimensä mukaan nimettyjä alkulukuja.

Mersennen luvut ovat matematiikassa edelleen aktiivisen tutkimuksen kohteena.

♦

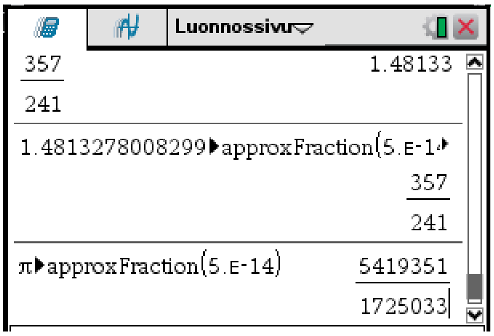
3.2 Murtoluvut

Jos laskin on laskutilassa **Automaattinen** niin laskin esittää enter -näppäintä painettaessa kokonaislukujen osamäärän supistettuna murtolukuesityksenä. Jos ainakin toisessa kokonaisluvussa esiintyy desimaalipiste tai painetaan näppäimiä ctrl enter, niin laskin esittää osamäärän desimaaliesityksenä.

menu -valikon komento **2: Luku >> 2: Likiarvo murtoluvuksi** muodostaa desimaaliluvun murtolukuapproksimaation. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **approxFraction(5.E-14)** ja se muodostaa murtolukuapproksimaation käyttäen toleranssia $5\cdot10^{-14}$. Komento tulee luvun perään. Toleranssia voi halutessaan muuttaa.

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan komentoa **approxFraction**.



♦

Murtoluvun muuttaminen sekaluvuksi tapahtuu menu-valikon komennolla **2: Luku** >> **7: Murtolukutyökalut** >> **1: Sekaluku**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **propFrac**. Tulos esitetään muodossa kokonaisosa + murto-osa.

ESIMERKKEJÄ

2. Kokeillaan komentoa **propFrac**.

♦

3.3 Lukujen pyöristämiset

Lukujen pyöristämiset tapahtuvat menu-valikon **2: Luku** >> **8: Lukutyökalut** komennoilla

- **1: Pyöristetty**, joka pyöristää luvun annetun desimaalimäärän tarkkuudella. Komento näkyy syöttörivillä komentona **round**. Komennon muoto on

  round(luku, desimaalit)

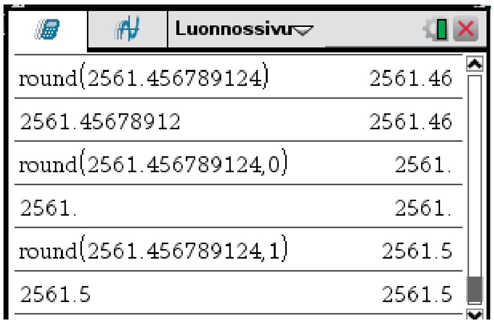
  missä

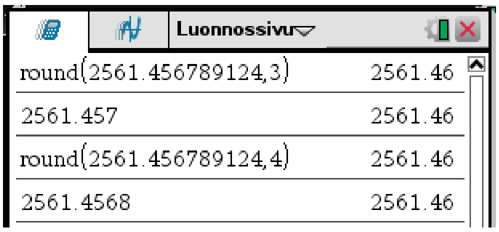
  - **luku** on pyöristettävä luku
  - **desimaalit** on luku, joka ilmaisee desimaalien määrän.

  Jos argumentin **desimaalit** jättää pois, pyöristetään luku 12 merkitsevän numeron tarkkuudella.
- **6: Lattia**, joka pyöristää alaspäin kokonaisluvuksi. Komento näkyy syöttörivillä komentona **floor**.
- **7: Katto**, joka pyöristää ylöspäin kokonaisluvuksi. Komento näkyy syöttörivillä komentona **ceiling**.

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan komento **round**.

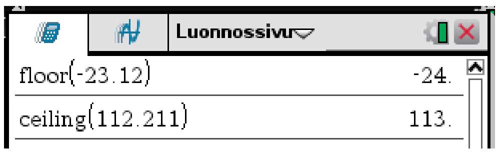




Laskin näyttää tulokset enter-näppäimen painamisen jälkeen näytön tarkkuuden mukaisesti, joka tässä on **Liukuva 6**. Todellinen tarkkuus saadaan selville ottamalla tulos syöttöriville, joka näkyy tulosta seuraavalla rivillä.

♦

2. Kokeillaan komentoja **floor** ja **ceiling**.



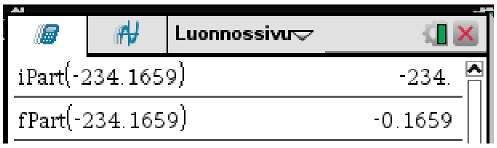
♦

menu-valikon **2: Luku** >> **8: Lukutyökalut** komento

- **2: Kokonaisosa** muodostaa desimaaliluvun kokonaisosan. Komento näkyy syöttörivillä komentona **iPart**.
- **3: Murto-osa** muodostaa desimaaliluvun desimaaliosan. Komento näkyy syöttörivillä komentona **fPart**.

ESIMERKKEJÄ

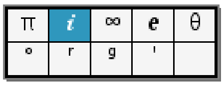
3. Kokeillaan komentoja **iPart ja fPart.**



♦

3.4 Kompleksiluvut

Kompleksiluvut syötetään normaaliin tapaan. Imaginaariyksikkö *i* löytyy näppäimellä .



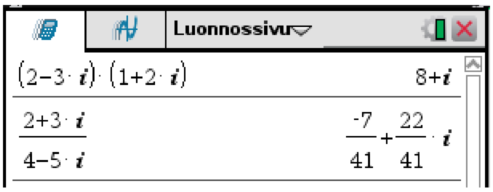
Laskenta tapahtuu luonnollisella tavalla.

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan

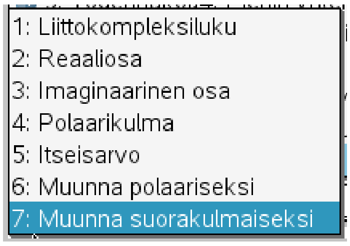
$$(2-3i)(1+2i)$$

$$\frac{2+3i}{4-5i}$$



♦

Kompleksilukuihin liittyviä komentoja löytyy -valikosta **2: Luku >> 9: Kompleksi**.



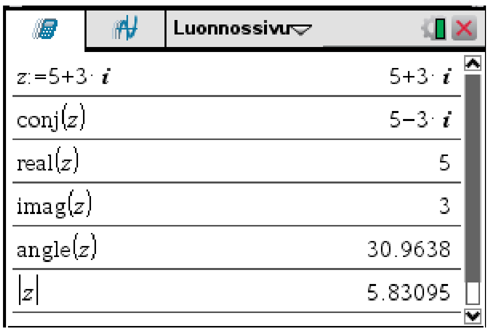
Komento

- **1: Liittokompleksiluku** muodostaa kompleksiluvun z liittoluvun $\bar{z}$. Komento näkyy syöttörivillä komentona **conj**.
- **2: Reaaliosa** muodostaa kompleksiluvun z reaaliosan $\operatorname{Re} z$. Komento näkyy syöttörivillä komentona **real**.
- **3: Imaginaarinen osa** muodostaa kompleksiluvun z imaginaariosan $\operatorname{Im} z$. Komento näkyy syöttörivillä komentona **imag**.
- **4: Polaarikulma** muodostaa kompleksiluvun z argumentin $\arg z$. Komento näkyy syöttörivillä komentona **angle**.
- **5: Itseisarvo** muodostaa kompleksiluvun z itseisarvon $|z|$. Komento näkyy syöttörivillä itseisarvomerkkeinä.
- **6: Muunna polaariseksi** muuntaa kompleksiluvun osoitin- tai eksponenttimuotoon. Komento tulee kompleksiluvun perään. Se näkyy syöttörivillä komentona ►**Polar**.

ESIMERKKEJÄ

2. Kokeillaan komentoja.

   Laskimen kulma-asetus on seuraavassa Aste.



♦

Kompleksiluvun $z = x + yi$

- osoitinesitys on $z = r\angle\theta$
- eksponenttiesitys on $z = r\,e^{i\theta}$

Näissä esityksissä r ja θ ovat kompleksilukua vastaavan tasopisteen (x, y) napakoordinaatit

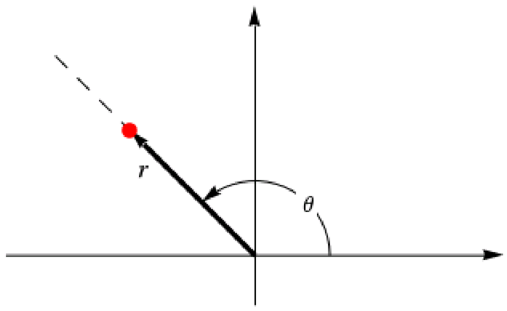
- *r*: pisteen etäisyys origosta
- θ: pisteen vaihekulma,

jolloin

$$r=|z|$$

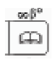
ja

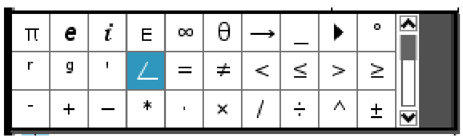
$$\theta=\arg(z)\quad .$$



Laskimeen kompleksiluvun osoitinesitys syötetään muodossa

$(r\ \angle\theta)$

Esityksessä oleva kulmamerkki löytyy näppäimillä   aukeavasta ikkunasta.



Komento **6: Muunna polaariseksi** toiminta riippuu laskimen kulma-asetuksista:

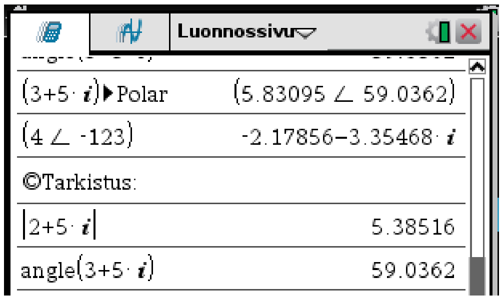
- Jos kulma-asetus on **Aste**, niin tuloksena on osoitinesitys
- Jos kulma-asetus on **Radiaani**, niin tuloksena on eksponenttiesitys.

Jos laskimen kompleksilukuasetus on **Reaali** tai **Suorakulma**, niin muunnos summamuotoon tapahtuu kirjoittamalla lauseke osoitin- tai eksponenttimuodossa[1] ja painamalla näppäintä  tai näppäimiä  .

ESIMERKKEJÄ

3. Kokeillaan muunnoksia, kun laskimen kulma-asetus on **Aste**.

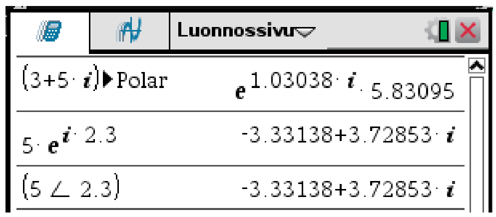
[1] Huomaa, että kulmamuodossa **Aste** ei voi käyttää eksponenttiesitystä.



Siis kompleksiluvun $3+5i$ itseisarvo on 5,83095 ja argumentti on 59,0362°.

♦

4. Kokeillaan muunnoksia, kun laskimen kulma-asetus on Radiaani.
   Muodostetaan luvun $3+5i$ eksponenttiesitys.
   Muunnetaan luku $5\,e^{i\,2{,}3}$ ja osoitinesitys (5 ∠2,3) summamuotoon.



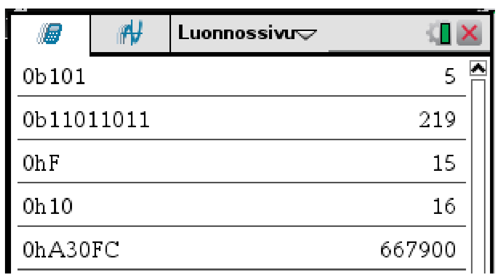
♦

3.5 Binääri- ja heksaluvut

Laskimella voi käsitellä binäärisiä ja heksalukuja. Binääriluvun edessä on **0b**, heksaluvun edessä **0h**. Laskin muuntaa luvun automaattisesti 10-kantaiseksi[1].

ESIMERKKEJÄ

1. Muodostetaan binääri- ja heksalukuja.



[1] Tässä laskin on normaalissa 10-kantaisessa lukuesityksessä.

♦

Luku **a** muunnetaan

- binääriluvuksi komennolla

  a ▶ Base2

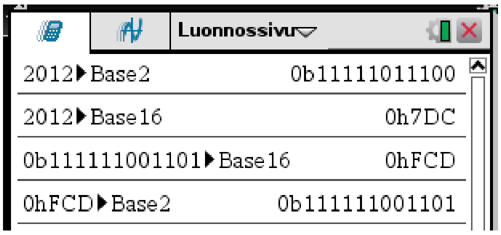
- heksaluvuksi komennolla

  a ▶ Base16

Komennot löytyvät *katalogista* 1.

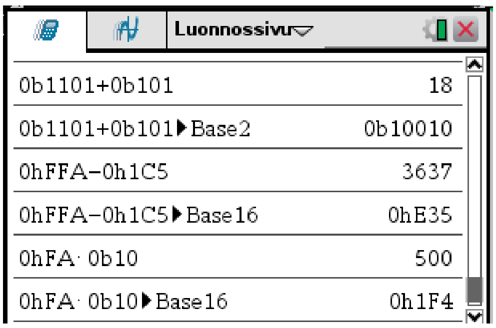
ESIMERKKEJÄ

2. Kokeillaan muunnoksia.



♦

3. Kokonaislukuihin päätyviä laskutoimituksia voi suorittaa normaalin tapaan ja tuloksen voi välittömästi muuntaa haluttuun kantalukuun.



♦

Binääriluvut voidaan helposti muuntaa heksaluvuiksi ryhmittelemällä binääriluvut oikealta lähtien neljän bitin ryhmiin ja muuntamalla kukin ryhmä erikseen heksaluvuksi käyttämällä seuraavaa taulukkoa. Viimeisen ryhmän alkuun voidaan tietenkin lisätä mahdollisesti puuttuva nollat.

Desimaaliluku	Binääriluku	Heksaluku
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Tietenkin heksaluvut voidaan muuntaa binääriluvuiksi korvaamalla kukin heksamerkki taulukon mukaisella neljän bitin ryhmällä. Vasemman puoleisesta ryhmästä voi jättää alkunollat pois.

ESIMERKKEJÄ

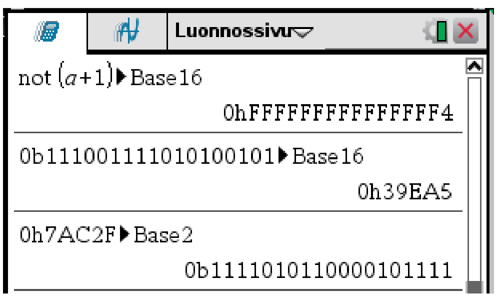
4. Muunnetaan binääriluku heksaluvuiksi

   11001011001100101 = 11 1001 1110 1010 0101 = 39EA5

   Muunnetaan heksaluku binääriluvuksi

   7AC2F = 111 1010 1100 0010 1111 = 1111010110000101111

   Tarkistetaan laskut vielä laskimella.



♦

4. ALGEBRAA

4.1 Lausekkeiden kirjoittaminen

Laskimessa lausekkeet voi syöttää normaaliin tapaan käyttäen operaattoreita +, – ,* ja /, näppäimet ja . Kertomerkkinä voi käyttää myös välilyöntiä. *Kerrottaessa kirjaimia keskenään on väliin aina laitettava kertomerkki*. Sen sijaan luku kertaa kirjain ei vaadi kertomerkkiä.

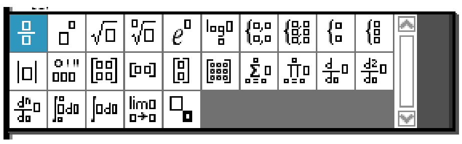
Miinusmerkkejä on kaksi:

- näppäin on vähennyslaskumerkki, joka tulee lausekkeiden väliin.
- näppäin on etumerkki miinus, joka tule lausekkeen eteen.

Potenssi on hattumerkki ^, näppäin . Hattumerkkiä käytettäessä on potenssin jälkeen painettava nuolinäppäintä ►, jolloin syöttö siirtyy perustasolle. Toinen potenssi saadaan kätevästi näppäimellä .

Sulkumerkkeinä voi käyttää vain kaarisulkuja, jotka saadaan kaksoisnäppäimellä . Painamalla vasemmanpuoleista näppäintä kohdistin jää sulkumerkkien sisälle ja painamalla oikeanpuoleista näppäintä kohdistin jää sulkumerkkien perään. Sulkumerkin ulkopuolelle päästään nuolinäppäimellä ►. Sulkumerkkien käytössä on huomattava, että *kirjaimen ja perässä olevan alkavan sulun väliin täytyy laittaa kertomerkki*[1].

Lausekkeiden syöttämisessä voi käyttää lausekemalleja, jotka saa näppäimellä



Lausekemallin paikasta toiseen voi siirtyä näppäimellä . Esimerkiksi alaindeksi saadaan lausekemalliston painikkeella .

Osamäärän syöttäminen tapahtuu kätevästi näppäimillä joko siten, että ensin painetaan näppäimiä ja sitten täytetään paikat tai siten, että ensin kirjoitetaan osoittaja, sitten painetaan näppäimiä ja täytetään nimittäjä. Jälkimmäisessä tavassa saattaa joutua valitsemaan osoittajan klikkaamalla useamman kerran kosketuslevyn painiketta tai maalaamalla osoittaja.

Virheellisen syötön voi tietenkin poistaa -näppäimellä.

Usein laskin sieventää automaattisesti syötetyn lausekkeen.

ESIMERKKEJÄ

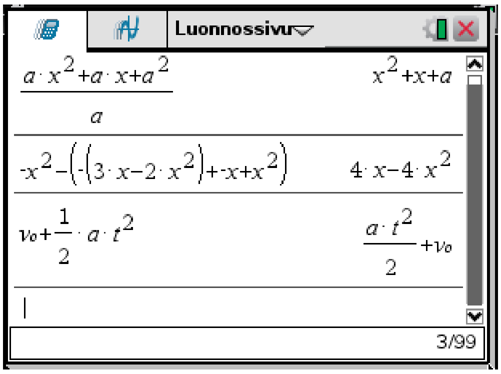
1. Syötetään lausekkeet

[1] Muuten laskin käsittelee tilanteen funktion arvona laskentana.

$$\frac{a\,x^2+a\,x+a^2}{a}$$

$$-x^2-[-(3\,x-2\,x^2)+(-x+x^2)]$$

$$v_0+\frac{1}{2}a\,t^2$$



Huomaa, että laskin sieventää lausekkeet.

♦

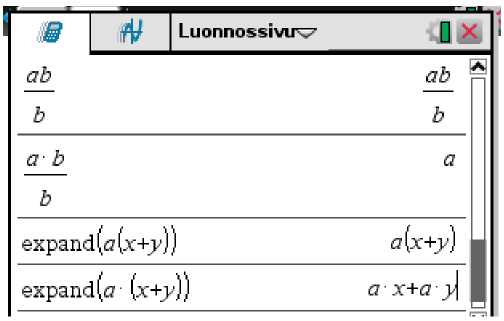
2. Lausekkeita

$$\frac{a\,b}{a}$$

ja

$$a(x+y)$$

syötettäessä on käytettävä kertomerkkiä.

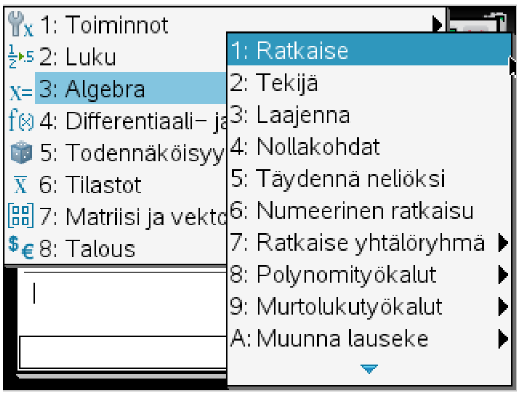


♦

4.2 Algebrallisten lausekkeiden sieventäminen ja muokkaaminen

Murtolausekkeissa laskin suorittaa automaattisesti supistamisen, mikäli mahdollista. Myös joitain muita automaattisia sievennystoimintoja laskin tekee.

Lausekkeiden sievennys- ja muokkauskomentoja löytyy menu-valikostosta **3: Algebra**.



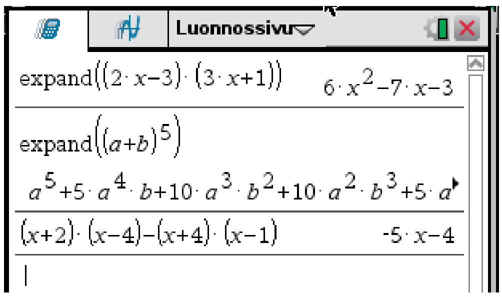
4.2.1 Kertolasku

Algebra-valikon komento **3: Laajenna** suorittaa auki kertomisen. Komento näkyy syöttörivillä komentona **expand**.

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan auki lausekkeet

$$(2x-3)(3x+1)$$
$$(a+b)^5$$
$$(x+2)(x-4)-(x+4)(x-1)$$



♦

Edellisessä esimerkissä kahden ensimmäisen lausekkeen kertolasku vaatii erillisen komennon. Sen sijaan kolmannen lausekkeen sieventäminen tapahtuu automaattisesti. Laskin suorittaa kertolaskut automaattisesti sellaisessa lausekkeessa, jossa esiintyy samalla tasolla sekä yhteen- että kertolaskua. Ensimmäistä lauseketta syötettäessä sulkujen väliin ei tarvitse laittaa kertomerkkiä. Toisen lausekkeen tulos ei mahdu kokonaisuudessaan näytölle vaan jatkuu oikealla. Sitä voi kelata näkyviin nuolipainikkeilla. Kun kohdistin on tuloslausekkeessa, voi näppäimellä

- ctrl 7 hypätä suoraan rivin alkuun, jos kohdistin ei ole rivin alussa.

- ctrl 1 hypätä suoraan rivin loppuun, jos kohdistin ei ole rivin lopussa.

TEHTÄVIÄ

1. Sievennä lausekkeet

   a) $(3x+1)(2x-5)$ b) $(z+3)(z^2+2z-3)$

   c) $(x+a)(x-1)+(x-a)(x+1)$ d) $\dfrac{3h^2k^2\cdot 10p^2q}{5pq\cdot 12hk}$

   f) $\dfrac{(a^3-a)(4a^2-36)}{(4a+12)(a^2-2a+1)}$

2. Laske auki

   a) $\left(z+\dfrac{5}{2a}\right)^4$ b) $(a-2)^{10}$

4.2.2 Tekijöihin jako

Algebra-valikon komento **2: Tekijä** suorittaa jaon reaalisiin tekijöihin. Komento näkyy syöttörivillä komentona **factor**.

Komennon muoto

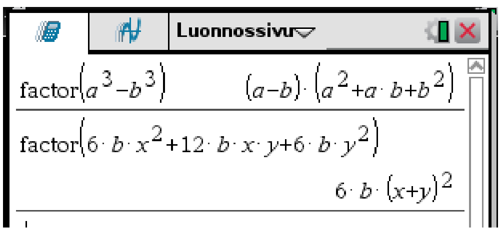
- **factor(lauseke)** suorittaa tekijöihin jaon rationaalilukujen joukossa.
- **factor(lauseke, muuttuja)** suorittaa tekijöihin jaon reaalilukujen joukossa.

ESIMERKKEJÄ

1. Jaetaan tekijöihin

   a^3-b^3

   $6bx^2+12bxy+6by^2$

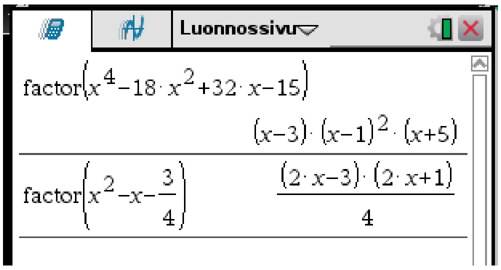


♦

2. Jaetaan tekijöihin

   $x^4-18x^2+32x-15$

$$x^2 - x - \frac{3}{4}$$



♦

Edellisestä esimerkistä havaitaan, että laskin esittää rationaaliset tekijät kokonaislukuina:

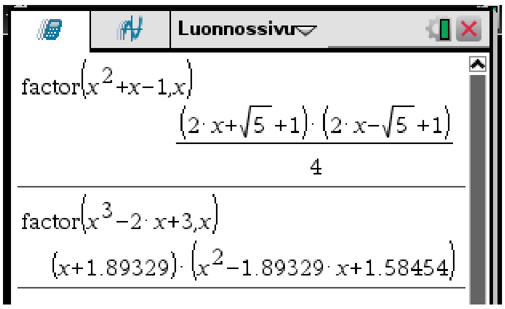
$$\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) = \frac{(2x-3)(2x+1)}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

ESIMERKKEJÄ

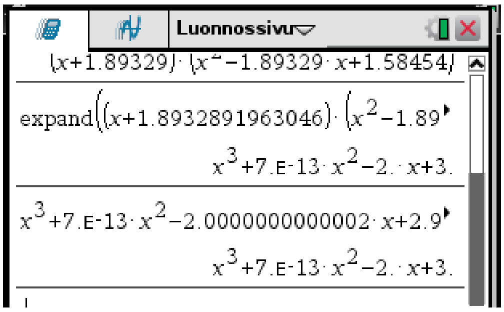
3. Jaetaan tekijöihin

$$x^2 + x - 1$$
$$x^3 - 2x + 3$$

Seuraavat komennot on päätetty näppäimellä enter.



Havaitaan, että jälkimmäisen polynomin tekijöihin jaossa esiintyy desimaalilukuja. Tulos on ilmeisestikin likimääräinen. Tarkistetaan asia kertolaskulla. Otetaan tulos syöttöriville ja suoritetaan kertolasku.



Tulos ei ole sama kuin alkuperäinen lauseke.

♦

Edellisen esimerkin mukaan, jos tekijöihin jaettava polynomi on korkeampaa kuin toista astetta, saattaa tekijöin jako olla approksimatiivinen desimaaliesitys.

Algebra-valikon komento **C: Kompleksi >> 2: Tekijä** suorittaa jaon kompleksisiin tekijöihin. Komento näkyy syöttörivillä komentona **cFactor**.

Komennon muoto

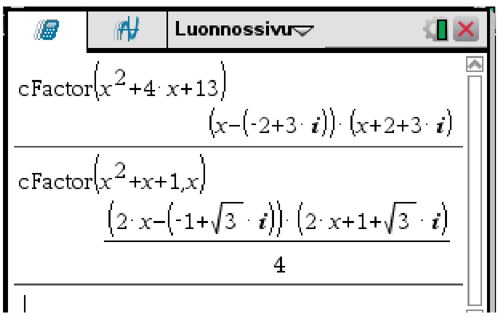
- **cFactor(lauseke)** suorittaa tekijöihin jaon rationaalisten kompleksilukujen joukossa.
- **cFactor(lauseke, muuttuja)** suorittaa tekijöihin jaon kompleksilukujen joukossa.

ESIMERKKEJÄ

4. Jaetaan tekijöihin

$$x^2+4x+13$$

$$x^2+x+1$$

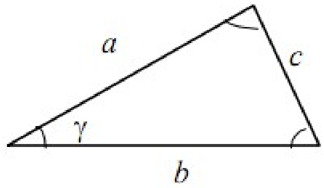


♦

Tekijöihin jako tulee esille monessa eri yhteydessä. Seuraavassa esimerkissä tulee esille laskimen käytön ja käsin laskennan vuorovaikutus.

ESIMERKKEJÄ

5. **Kolmion pinta-ala.** Määritetään kolmion pinta-ala, kun kolmion sivujen pituudet ovat a, b ja c.



Olkoon sivun c vastainen kulma γ. Tällöin kosinilauseen perusteella

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad ,$$

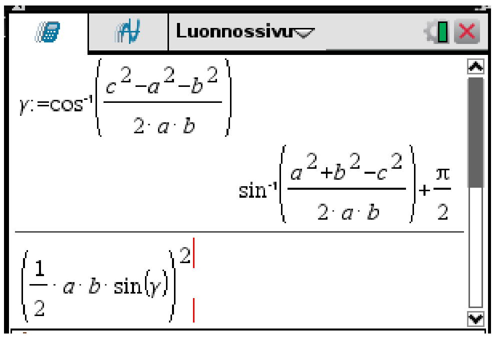
josta saadaan

$$\gamma = \arccos\left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}\right)$$

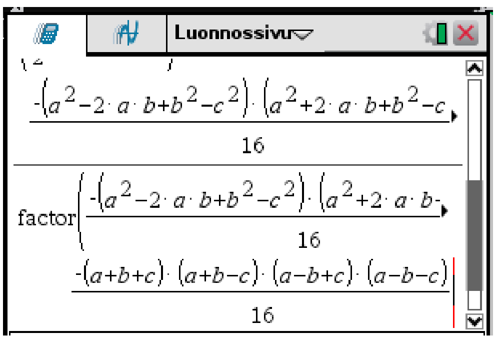
Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Lasketaan pinta-alan neliö A^2 laskimella ja jaetaan se tekijöihin.



Yllä oleva lasku jatkuu alla.



Yllä alin lauseke on pinta-alan neliö. Se voidaan kirjoittaa muotoon[1]

$$A^2=\frac{1}{16}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \quad , \qquad (1)$$

josta ottamalla neliöjuuri saadaan kolmion pinta-alalle kaava

$$A=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Kaavassa on tiettyä symmetriaa, josta sen voi muistaa. Tämä ei ole kuitenkaan se kaava, joka tässä yhteydessä yleensä esitetään. Johdetaankin se toinen kaava.

Merkitsemällä

$$p=a+b+c$$

kolmion piiri, voidaan yhtälö (1) kirjoittaa muotoon

$$A^2=\frac{1}{16}p(s-2a)(p-2b)(p-2c) \quad ,$$

josta saadaan edelleen

$$A^2=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right) \quad .$$

Siis kolmion pinta-ala on

$$A=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad ,$$

missä

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

on kolmion piirin puolikas. Tämä kaava on nimeltään *Heronin kaava*.

♦

TEHTÄVIÄ

Jaa tekijöihin seuraavat lausekkeet.

1. a) a^2x-ax^2 b) $16-8a+a^2$
2. a) $-a^2+6ab-9b^2$ b) $20ab^2-100ab+125a$
3. a) a^3+b^3 b) a^5-b^5
4. a) $81x^4-625y^4$ b) $x^3y^3+8x^3-y^3-8$

[1] Ihminen huomaa mahdolliset symmetriat, jotka helpottavat tuloksen mieltämistä.

4.2.3 Murtolausekkeiden yhteenlasku

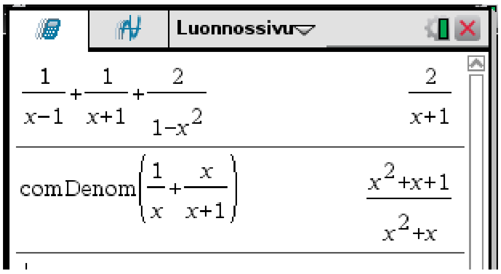
Usein laskin suorittaa automaattisesti murtolausekkeiden yhteenlaskun. Jos näin ei tapahdu, voidaan käyttää Algebra-valikon komentoa **9: Murtolukutyökalut >> 4: Yhteinen nimittäjä**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **comDenom**.

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan yhteen murtolausekkeet

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{2}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{x+1}$$



Jälkimmäisen lausekkeen laskemiseen täytyy käyttää komentoa.

♦

TEHTÄVIÄ

Suorita laskutoimitukset ja sievennä.

1. a) $\frac{x}{y}-\frac{y}{x}+1$ b) $\frac{a+b}{a}-\frac{a-b}{b}$
2. a) $\frac{a-b}{2ab}+\frac{a-c}{3ac}$ b) $\frac{a}{a+3b}-\frac{b}{a-2b}$
3. a) $\frac{y}{x+y}-\frac{x+y}{x}$ b) $\frac{t+u}{t-u}+\frac{t-u}{t+u}$
4. a) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}$ b) $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$
5. a) $x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}$ b) $\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x}$
6. a) $\frac{a}{2-a}+\frac{a}{a+2}-\frac{2}{a^2-4}$ b) $\frac{2}{a}+\frac{2}{a-1}-\frac{4a}{a^2-1}$

7. a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)+\frac{1}{x}$ b) $\left\{1-\left[\left(\frac{1}{x}+1\right):\frac{1}{x}-1\right]:\frac{1}{x}\right\}:\frac{x+1}{x}$

8. a) $\left(\frac{a-b}{a}-1\right):\frac{b}{a}$ b) $\left[\left(\frac{1}{a}-1\right):\left(\frac{1}{b}-1\right)\right]:\frac{\frac{1}{a\,b}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a\,b}-\frac{1}{a}}$

4.2.4 Neliöksi täydentäminen

Toisen asteen polynomin neliöksi täydentämisessä polynomi esitetään muodossa, jossa muuttuja esiintyy vain yhdessä lausekkeessa, joka on korotettu toiseen potenssiin.

Neliöksi täydentäminen voidaan suorittaa Algebra-valikon komennolla **5: Täydennä neliöksi**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **completeSquare**. Komennon muoto on

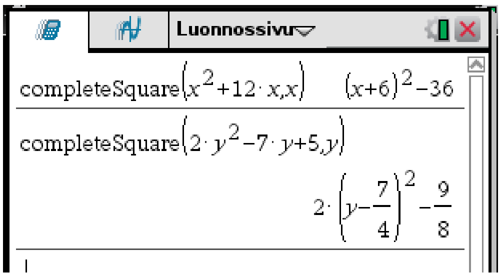
completeSquare(lauseke, muuttuja)

ESIMERKKEJÄ

1. Täydennetään neliöksi lausekkeet

$x^2+12\,x$

$2\,y^2-7\,y+5$



♦

TEHTÄVIÄ

Täydennä neliöksi

1. a) $x^2+6\,x$ b) $x^2-3\,x+1$
2. a) $2\,x^2+5\,x$ b) $-4\,x^2+6\,x+3$

4.3 Eksponenttilausekkeiden käsittely

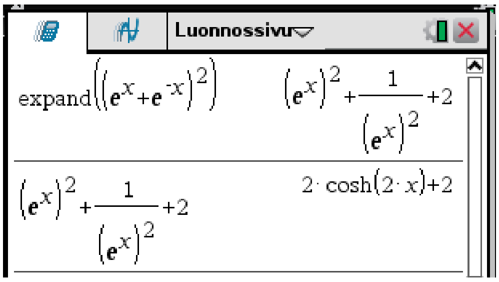
Algebra-valikon komennolla[1] **A: Muunna lauseke >> 3: Muunna lauseke-muotoon** voidaan joitain lausekkeita muuntaa muotoon, jossa esiintyy Napierin luku e. Komento laitetaan lausekkeen perään ja se esiintyy muodossa ►**exp**.

Esimerkiksi hyperbolisia funktiota laskin esittää tällöin eksponenttifunktion avulla.

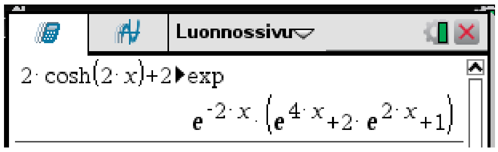
ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan

$$\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}$$



Laskimen sievennetyssä muodossa esiintyy siis hyperbolinen funktio. Käytetään muunnoskomentoa



Jos tässä vielä suorittaa kertolaskun päädytään uudelleen hyperboliseen funktioon.

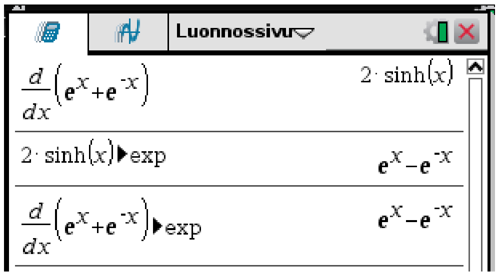
♦

2. Lasketaan derivaatta

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$

---

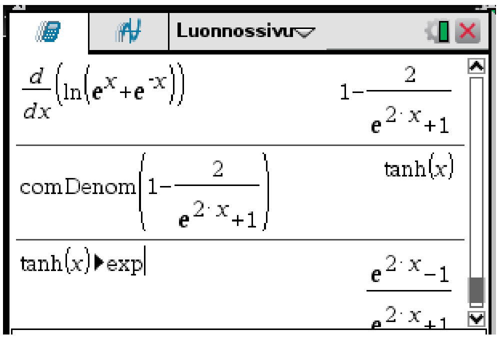
[1] Komennon nimi on outo.



Derivointi antaa tulokseksi hyperbolisen funktio, joka voidaan muuntaa eksponenttimuotoon. Muunnos voidaan suorittaa myös derivointikomennon yhteydessä, kuten alimmalla rivillä on esitetty.

3. Lasketaan derivaatta

$$\frac{d}{dx}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)$$



Derivoinnin tulosta on yritetty sieventää laskemalla murtolausekkeet yhteen. Tulokseksi saadaan hyperbolinen funktio, joka on muunnettu eksponenttimuotoon.

Siis

$$\frac{d}{dx}\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

♦

TEHTÄVIÄ

1. Lausu eksponenttifunktio käyttäen

a) $\frac{d}{dx}\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)$ b) $\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}$

4.4 Logaritmilausekkeiden käsittely

Luonnollinen eli e-*kantainen logaritmi* $\ln x$ muodostetaan näppäimillä ctrl e^x (ln). Komento näkyy laskimessa komentona **ln**. Yleisempi *a-kantainen logaritmi* $\log_a x$ saadaan näppäimillä ctrl 10^x (log). Tällöin laskimen näytölle tulee logaritmin laskumalli

$$\log_{\square}(\square)$$

joka täytetään. Jos kantaluku ei laiteta on kyseessä 10-*kantainen logaritmi* $\lg x$.

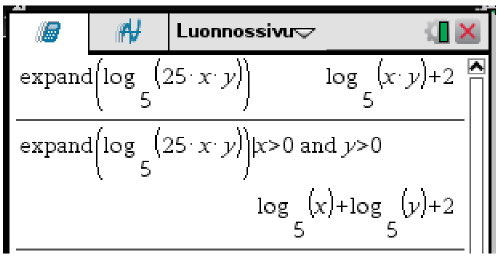
Usein logaritmilausekkeita sievennettäessä on käytettävä **expand**-komentoa ja *logaritmien argumentit rajoitettava positiivisiksi*. Tähän liittyvät operaattorit saadaan näppäimillä ctrl = (≠≥▸) aukeavasta ikkunasta.

>	<	≠
≥	≤	|

ESIMERKKEJÄ

1. Muunnetaan summamuotoon lauseke

   $\log_5 25xy$.

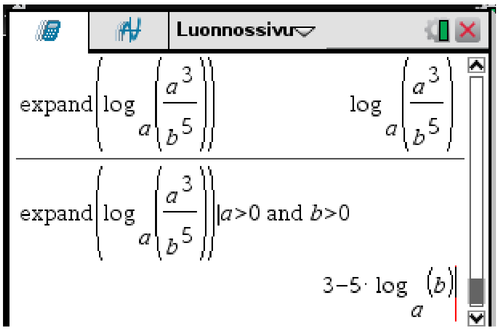


   Komento vaatii toimiakseen rajoitusehdon.

♦

2. Muunnetaan summamuotoon lauseke

   $\log_a a^3 b^5$.



Taaskin tarvitaan rajoitusehto.

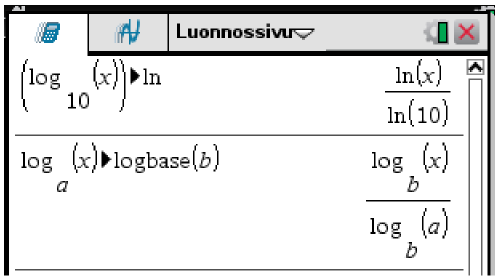
♦

Algebra-valikon komennolla **A: Muunna lauseke**

- **1: Muunna ln-muotoon** voidaan joitain logaritmilausekkeita muuntaa muotoon joissa esiintyy vain luonnollisia logaritmeja. Komento laitetaan lausekkeen perään ja se esiintyy muodossa **►ln**.
- **2: Muunna logkantamuotoon** voidaan joitain logaritmilausekkeita muuntaa muotoon joissa esiintyy vain tietyn kantaisia logaritmeja. Komento laitetaan lausekkeen perään ja se esiintyy muodossa **►logbase**. Komennon argumentiksi laitetaan haluttu kantaluku.

ESIMERKKEJÄ

3. Muunnetaan logaritmeja.



Siis

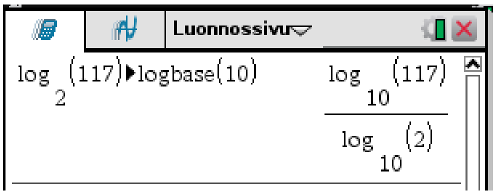
$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

♦

4. Esitetään logaritmi 10-kantaisten logaritmien avulla.

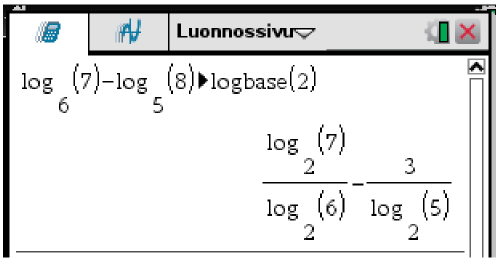
$$\log_2 117$$



♦

5. Esitetään logaritmi 2-kantaisten logaritmien avulla.

$$\log_6 7 - \log_5 8$$



♦

TEHTÄVIÄ

1. Kirjoita summamuotoon seuraavat logaritmilausekkeet

a) $\log_a \dfrac{b}{cd}$ b) $\log_a b^4 \sqrt[3]{c}$

c) $\log_a \sqrt{x^3 y}$ d) $\log_a \dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^a}$

e) $\log_a \dfrac{1}{x^2} \sqrt[5]{\dfrac{y^3}{z^7}}$

4.5 Polynomit

Polynomien *jakoyhtälön* mukaan polynomien $P(x)$ ja $R(x)$ osamäärä voidaan esittää muodossa

$$\frac{P(x)}{R(x)} = Q(x) + \frac{S(x)}{R(x)} , \tag{1}$$

missä $Q(x)$ ja $S(x)$ ovat polynomeja siten, että polynomin $S(x)$ aste on pienempi kuin polynomin $R(x)$ aste.

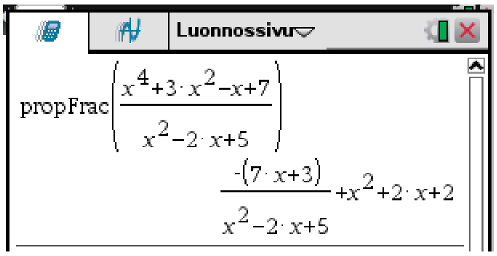
Polynomien jakoyhtälö saadaan aikaiseksi Algebra-valikon komennolla **9: Murtolukutyökalut >> 1: Sekaluku**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **propFrac**. Komennon muoto on

propFrac(lauseke, muuttuja)

josta argumentin **muuttuja** voi jättää pois, jos sekaannuksen vaaraa ei ole.

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan komentoa **propFrac**.



Siis

$$\frac{x^4+3x^2-x+7}{x^2-2x+5}=x^2+2x+2+\frac{-7x-3}{x^2-2x+5}$$

♦

Esityksen (1) polynomia $Q(x)$ sanotaan **osamääräksi** ja polynomia $S(x)$ **jakojäännökseksi**. Tällöin

$$P(x)=Q(x)R(x)+S(x) \quad .$$

Polynomit $Q(x)$ ja $S(x)$ voidaan muodostaa laskimen Algebra-valikon **8: Polynomityökalut** komennoilla

- **4: Polynomien osamäärä**. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **polyQuotient**.
- **3: Polynomien jakojäännös**. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **polyRemainder**.

Komentojen muodot ovat

polyQuotient(jaettava, jakaja, muuttuja)

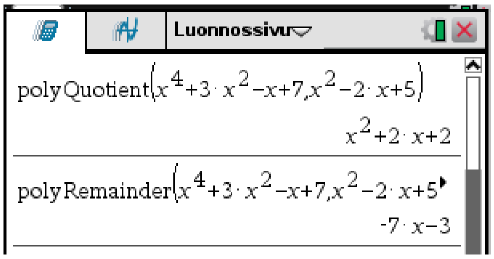
polyRemainder(jaettava, jakaja, muuttuja),

joista argumentin **muuttuja** voi jättää pois, jos sekaannuksen vaaraa ei ole.

ESIMERKKEJÄ

2. Lasketaan edellisessä esimerkissä esiintyvien polynomien jakolaskun osamäärä ja jakojäännös.

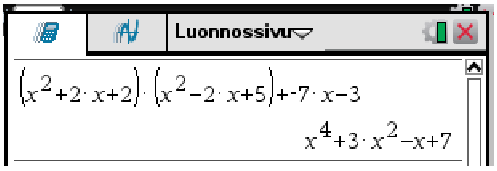
$$\frac{x^4+3x^2-x+7}{x^2-2x+5}$$



Tämä vastaa edellisessä esimerkissä saatua tulosta.

Tarkistetaan vielä: lasketaan

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+5)+(-7x-3)$$



Tulokseksi saadaan x^4+3x^2-x+7 , kuten pitääkin.

♦

Polynominen *tekijöihin jako* voidaan suorittaa komennoilla

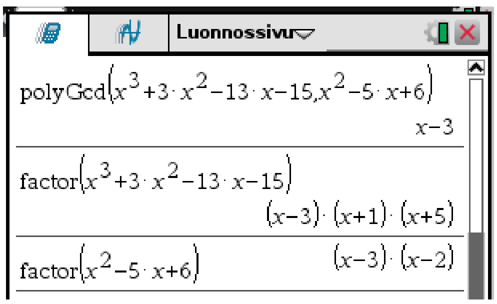
- **factor**: reaaliset tekijät
- **cfactor**: kompleksilukutekijät

Näitä komentoja on esitelty luvussa 4.2.2.

Kahden polynomin *suurin yhteinen tekijä* (syt) voidaan muodostaa Algebra-valikon komennolla **8: Polynomityökalut >> 6: Suurin yhteinen tekijä**. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **polyGcd**. Komennon argumentteina ovat nämä polynomit.

ESIMERKKEJÄ

3. Määritetään polynomien $x^3+3x^2-13x-15$ ja x^2-5x+6 suurin yhteinen tekijä.



Suurin yhteinen tekijä on siis polynomi $x-3$. Asia on tarkistettu jakamalla polynomit tekijöihin.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Suorita seuraavat polynomien jakolaskut:

a) $\dfrac{2x^3+7x^2-x-2}{2x+1}$ b) $\dfrac{2x^3+x^2-3}{2x+1}$

c) $\dfrac{x^4+6x^3+6x^2+14x-5}{x^2+x+4}$ d) $\dfrac{x^4-2x+2}{x^2+3x+1}$

4.6 Rationaalifunktiot

Rationaalifunktio on kahden polynomin osamäärä eli muotoa

$$\frac{P(x)}{R(x)}$$

missä $P(x)$ ja $R(x)$ ovat polynomeja.

Rationaalifunktion osoittaja ja nimittäjä saadaan Algebra-valikon komennoilla

- **9: Murtolukutyökalut** >> **2: Hae osoittaja**, joka näkyy syöttörivillä komentona **getNum**
- **9: Murtolukutyökalut** >> **3: Hae nimittäjä**, joka näkyy syöttörivillä komentona **getDenom**

Näissä komennoissa laskin ensin supistaa mahdolliset yhteiset tekijät pois.

ESIMERKKEJÄ

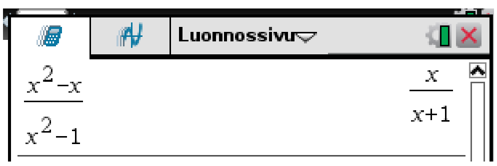
1. Määritetään rationaalifunktion

$$\frac{x^2-x}{x^2-1}$$

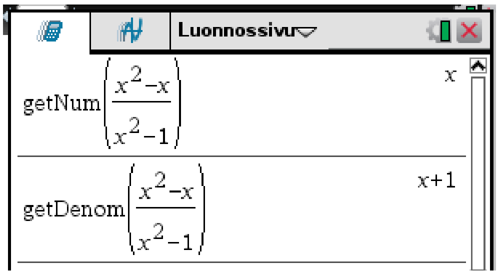
osoittaja ja nimittäjä.

Rationaalifunktion supistettu muoto on

$$\frac{x}{x+1}$$



Määritetään rationaalifunktion osoittaja ja nimittäjä.



♦

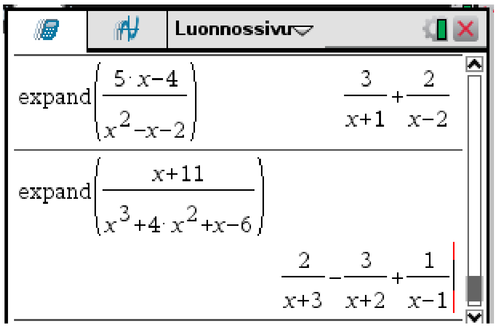
Rationaalifunktion *osamurtokehitelmä* voidaan muodostaa Algebra-valikon komennolla **3: Laajenna**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **expand**. Komennon muoto on

expand(lauseke, muuttuja)

josta argumentin **muuttuja** voi jättää pois.

ESIMERKKJÄ

2. Muodostetaan osamurtokehitelmiä.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Muodosta seuraavien rationaalifunktioiden osamurtokehitelmät.

a) $\dfrac{8x-5}{x^2-3x-10}$ b) $\dfrac{-4x+46}{x^2-4x-32}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2+x}$ d) $\dfrac{2x^2+3x+2}{x^3+x^2+x}$

4.7 Yhden tuntemattoman yhtälöt

Yhden tuntemattoman yhtälöitä voidaan ratkaista Algebra-valikon komennolla **1: Ratkaise**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **solve**. Komennon muoto on

solve(yhtälö, muuttuja)

Funktion nollakohdat voi määrittää Algebra-valikon komennolla **4: Nollakohdat**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **zeros**. Komennon muoto on

zeros(lauseke, muuttuja)

Nämä komennot määrittävät *reaaliset ratkaisut*, joten mahdollisia imaginaarisia ratkaisuja ne eivät esitä.

Komennot antavat tarkan ratkaisun mikäli mahdollista. Tarkka ratkaisu sisältää kaikki juuret tai nollakohdat. Jos tarkkaa ratkaisua ei löydy pyrkivät komennot määrittämään ratkaisun numeerisesti. Tällöin laskimen ratkaisu ei välttämättä sisällä kaikkia juuria tai nollakohtia ja näytön alareunaan tulee siitä varoitus.

Zeros-komento esittää ratkaisun listana, joka mahdollistaa nollakohtien jatkokäsittelyn yhtenä kokonaisuutena.

Koska

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \quad ,$$

voidaan yhtälö aina muuttaa nollakohdan määrittämiseksi tai päinvastoin. Siis komennot

solve(f(x)=g(x), x)

ja

zeros(f(x)-g(x), x)

antavat saman ratkaisujoukon.

Algebra-valikon komento[1]

- **D: Etsi juuri** >> **1: Vasen** ottaa yhtälöstä vasemman puolen. Komento näkyy syöttörivillä komentona **left**.
- **D: Etsi juuri** >> **2: Oikea** ottaa yhtälöstä oikean puolen. Komento näkyy syöttörivillä komentona **right**.

Näitä komentoja käyttäen voidaan ratkaista myös seuraavalla komennolla:

zeros(left(yhtälö)-right(yhtälö), muuttuja)

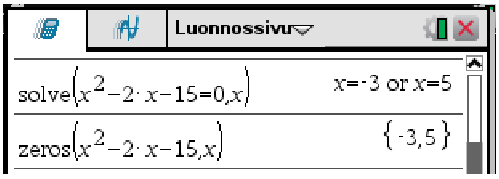
ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan yhtälö

$$x^2-2x-15=0$$

molemmilla tavoilla.

[1] Valikon nimi on vähän outo.

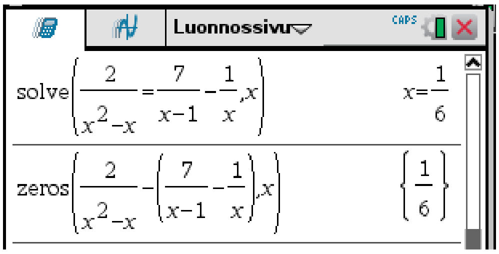


♦

2. Ratkaistaan yhtälö

$$\frac{2}{x^2-x}=\frac{7}{x-1}-\frac{1}{x}$$

molemmilla tavoilla.



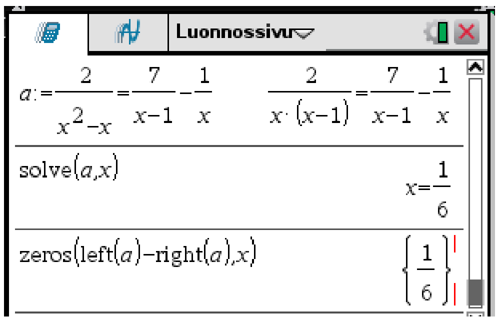
Huomaa, että **zeros**-komennossa yhtälön oikea puoli on vähennetty yhtälön vasemmasta puolesta.

♦

3. Käytetään edellisen esimerkin yhtälön

$$\frac{2}{x^2-x}=\frac{7}{x-1}-\frac{1}{x}$$

ratkaisemisessa komentoja **left** ja **right**.



Huomaa, että yhtälö voidaan tallentaa muuttujaan!

♦

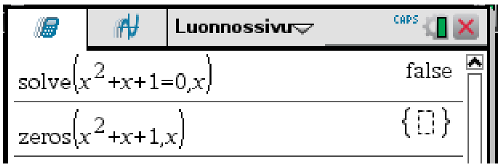
Jos ratkaisut tai nollakohdat eivät ole reaalisia, niin komento **solve** antaa tulokseksi **false** ja komento **zeros** tyhjän listan.

ESIMERKKEJÄ

4. Ratkaistaan yhtälö

$$x^2+x+1=0$$

molemmilla tavoilla.



Yhtälön juuret ovat imaginaariset!

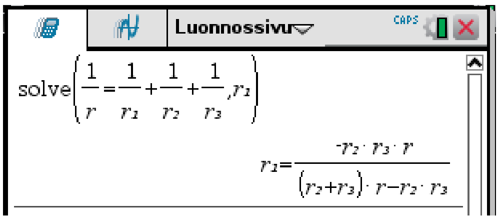
♦

Laskin ratkaisee myös kirjaimia sisältäviä yhtälöitä. Koska laskennassa isot ja pienet kirjaimet ovat samoja ja näkyvät vain pieninä kirjaimina, ei isoja kirjaimia kannata käyttää.

ESIMERKKEJÄ

5. Ratkaistaan R_1 kaavasta

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$



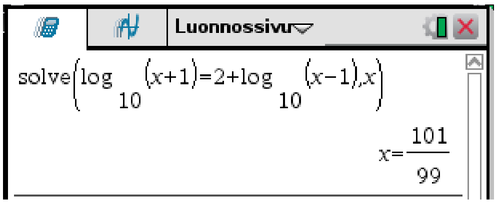
♦

Laskin ratkaisee hyvin monenlaisia yhtälöitä.

ESIMERKKEJÄ

6. Ratkaistaan yhtälö

$$\lg(x+1)=2+\lg(x-1)$$



♦

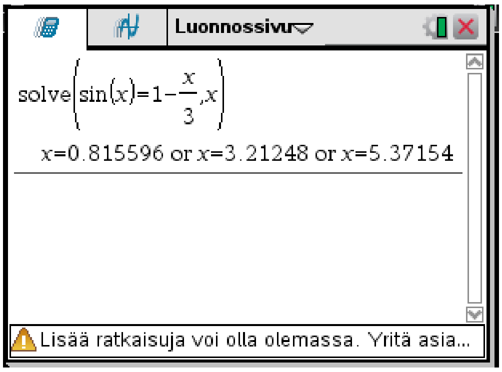
Jos yhtälöllä ei ole tarkkaa ratkaisua pyrkii laskin määrittämään ratkaisun numeerisesti.

ESIMERKKEJÄ

7. Ratkaistaan yhtälö

$$\sin x = 1 - \frac{x}{3}$$

Tässä esimerkissä laskimen on oltava radiaani-moodissa!

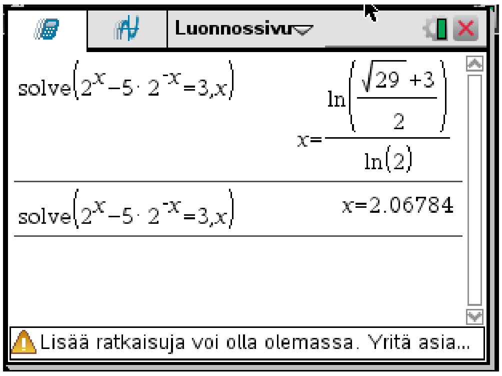


Näytön alareunassa oleva varoitus merkitsee sitä, että laskin on ratkaissut yhtälön numeerisesti. On erikseen tutkittava ratkaisujen lukumäärä ja etsittävä mahdolliset lisäratkaisut. Tätä asiaa käsitellään myöhemmin yhtälön numeerisen ratkaisemisen yhteydessä.

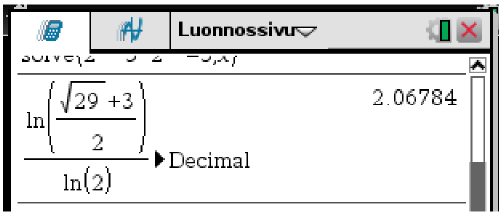
♦

8. Ratkaistaan yhtälö

$$2^x - 5 \cdot 2^{-x} = 3$$



Painamalla enter-näppäintä saadaan tarkka ratkaisu ilman mitään varoitusta. Painamalla näppäimiä ctrl, enter saadaan ratkaisun desimaaliesitys, jonka laskin on määrittänyt numeerisesti ja laskin antaa varoituksen. Nämä esittävät samaa ratkaisua:



♦

Komentojen **solve** ja **zeros** vastineet kompleksilukualueella ovat

- **cSolve**, joka saadaan Algebra-valikon komennolla **C: Kompleksi >> 1: Ratkaise**.
- **cZeros**, joka saadaan Algebra-valikon komennolla **C: Kompleksi >> 3: Nollakohdat**.

Komennot voidaan muodostaa siis vastaavista reaalialueen komennoista laittamalla kirjain **c** eteen. Komentojen antamat ratkaisut sisältävät sekä reaaliset että imaginaariset ratkaisut. Komentojen toiminta on hyvin samanlaista kuin vastaavien reaalialueen komentojen.

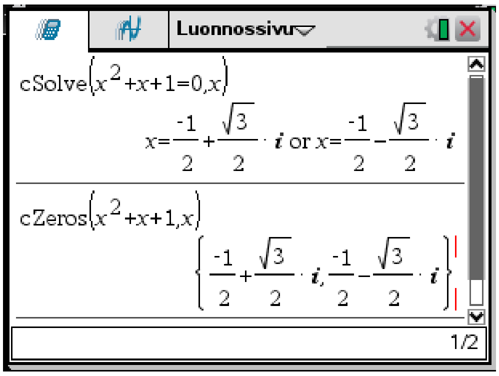
ESIMERKKEJÄ

9. Ratkaistaan yhtälö

$$x^2 + x + 1 = 0$$

molemmilla tavoilla.

Esimerkissä 3 yritettiin yhtälö ratkaista komennoilla **solve** ja **zeros** ja todettiin, että ne eivät antaneet ratkaisua. Nyt käytetään komentoja **cSolve** ja **cZeros**.

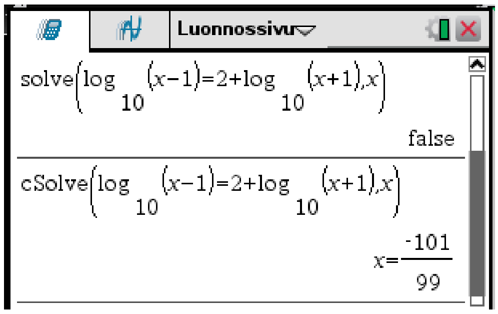


Ratkaisut ovat imaginaarisia.

♦

10. Ratkaistaan yhtälöt

$$\lg(x-1)=2+\lg(x+1)$$

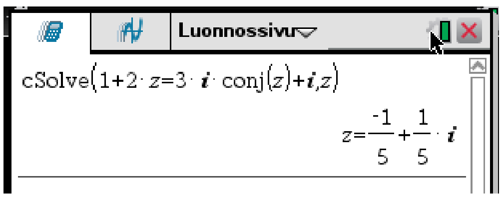


Koska **solve** antaa tulokseksi **false**, ei yhtälöllä ole ratkaisua reaalilukujen joukossa. Komento **cSolve** antaa reaalisen ratkaisun. Tämä ratkaisu on kuitenkin sellainen, että yhtälössä logaritmi otetaan negatiivisesta luvusta $\log_{10}(x-1)$, joka ei ole reaalinen.

♦

11. Ratkaistaan yhtälö

$$1+2z=3i\bar{z}+i$$



♦

TEHTÄVIÄ

1. Ratkaise yhtälöt

a) $x^3+5x^2-x+7=0$

b) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{2x+3}=-\dfrac{2}{3}$

c) $\sqrt{x-2}+x-4=0$

d) $\sqrt{6x+7}-\sqrt{3x+3}=1$

e) $7^{2x+3}=4\cdot 5^x$

f) $5^{2x}+3\cdot 5^x=23$

g) $4\sin x=\dfrac{x}{3}+1$

h) $1+3z=2i\bar{z}+5i$

2. Ratkaise yhtälöt

a) $\lg(x-1)+1=\lg(x^2-1)$

b) $\ln(x-3)-\ln(x+3)=-1$

d) $(\lg x)^2-5\lg x+4=0$

e) $\dfrac{1}{2}\log_5(x+10)=\log_5(2x-5)-1$

3. Ratkaise kysytty suure

a) $\epsilon=\alpha\cdot\Delta t+\dfrac{\sigma}{E}$, $E=?$

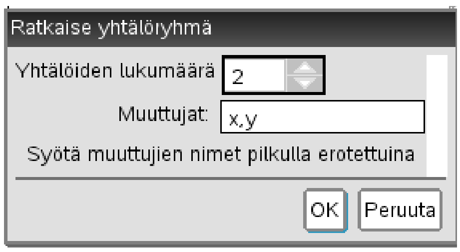
b) $U_0=U\dfrac{R_1}{R_1+R_2}$, $R_1=?$

c) $n=\left(\dfrac{1+k}{2}\right)^3$, $k=?$

4.8 Yhtälöryhmät

Laskimella voi ratkaista sekä lineaarisia että epälineaarisia yhtälöryhmiä.

Yleinen yhtälöryhmän ratkaisukomento on Algebra-valikon komento **7: Ratkaise yhtälöryhmä >> 1: Ratkaise yhtälöryhmä...** Komento aukaisee ikkunan, johon täytetään yhtälöiden lukumäärä ja muuttujien nimet.



Komento näkyy syöttörivillä komentona **solve**.

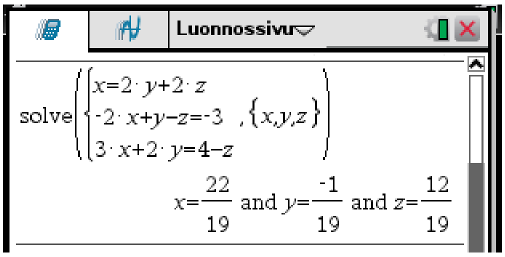
Lineaarinen yhtälöryhmä voidaan ratkaista myös Algebra-valikon komennolla **7: Ratkaise yhtälöryhmä >> 2: Ratkaise lineaarinen yhtälöryhmä...** Komento aukaisee samanlaisen ikkunan kuin edellä. Komento näkyy syöttörivillä komentona **linSolve**. Komennon tulos esitetään listana.

ESIMERKKEJÄ

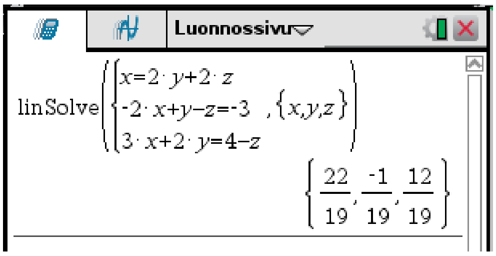
1. Ratkaistaan lineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x=2y+2z \\ -2x+y-z=-3 \\ 3x+2y=4-z \end{cases}$$

Käytetään komentoa **solve**:



Käytetään komentoa **linSolve**:

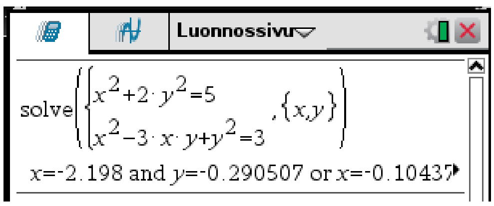


Huomaa kuinka komennon **linSolve** ratkaisu luetaan. Huomaa myös, että yhtälöryhmän yhtälöiden ei tarvitse olla missään standardimuodossa.

♦

2. Ratkaistaan epälineaarinen yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x^2+2y^2=5 \\ x^2-3xy+y^2=3 \end{cases}$$



Koska tarkka ratkaisu on aika monimutkainen, on komento on päätetty näppäimillä ctrl enter, jolloin on saatu ratkaisun desimaaliesitys. Ratkaisu ei mahdu kokonaisuudessaan laskimen näytölle. Kelaamalla näyttöä saadaan ratkaisuksi

$$\begin{cases} x=-2{,}198 \\ y=-0{,}290507 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x=2{,}198 \\ y=0{,}290507 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x=-0{,}104375 \\ y=1{,}57942 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x=0{,}104375 \\ y=-1{,}57942 \end{cases}$$

♦

Laskimella voidaan ratkaista kaikki lineaariset yhtälöryhmät, myös sellaiset, joissa yhtälöiden määrä on eri kuin tuntemattomien määrä. Yleisesti lineaarisella yhtälöryhmällä voi olla yksikäsitteinen ratkaisu, äärettömän monta ratkaisua tai ei yhtään ratkaisua. Laskin esittää ratkaisut seuraavasti:

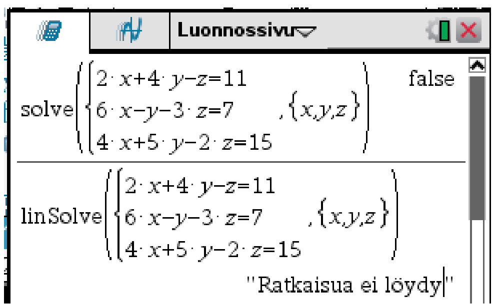
- yksikäsitteinen ratkaisu: Laskin esittää yhden ratkaisun.
- äärettömän monta ratkaisua: Ratkaisussa esiintyy muuttujia ***c1***, ***c2***, … Tällainen muuttuja tarkoittaa mielivaltaista reaalilukua.
- ei yhtään ratkaisua: Laskin tulostaa tekstin **false** tai tekstin ”Ratkaisua ei löydy”.

ESIMERKKEJÄ

3. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x+4y-z=11 \\ 6x-y-3z=7 \\ 4x+5y-2z=15 \end{cases}$$

Käytetään sekä komentoa **solve** että komentoa **linSolve**.



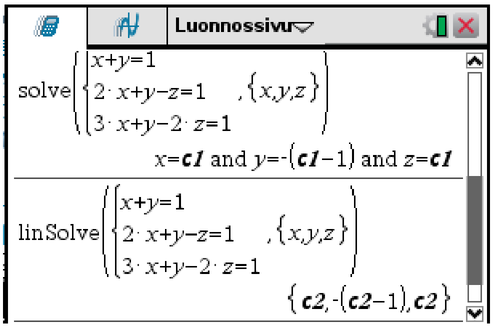
Mikään x, y, z ei toteuta yhtälöryhmää.

♦

4. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+y-2z=1 \end{cases}$$

Käytetään komentoja **solve** ja **linSolve**.



Yhtälöryhmällä on äärettömän monta ratkaisua. Merkitsemällä muuttujaa ***c1*** kirjaimella t, voidaan ratkaisu kirjoittaa muodossa[1]

$$\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}$$

♦

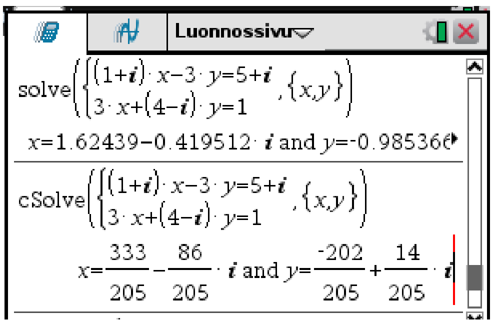
Yhtälöryhmien kertoimet voivat olla myös imaginaarilukuja. Tällöin komento **solve** antaa ratkaisun desimaaliesityksenä ja ratkaisun on oltava yksikäsitteinen. Komento **csolve** toimii kompleksiluvuilla kuten **solve** reaalikertoimisilla yhtälöryhmillä. Myös komento **linSolve** toimii kompleksiluvuilla samoin kuin reaalikertoimisilla yhtälöryhmillä.

ESIMERKKEJÄ

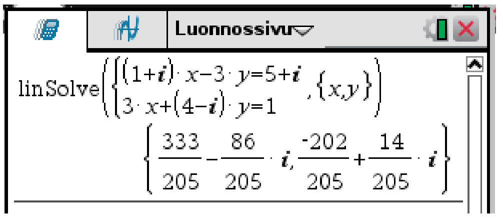
5. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} (1+i)x-3y=5+i \\ 3x+(4-i)y=1 \end{cases}$$

eri komennoilla. Komennot päätetään näppäimellä enter.



[1] y:n lauseketta on sievennetty.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Ratkaise yhtälöryhmät

a) $\begin{cases} x-2y=2z \\ -2x+y-z=-3 \\ 2y=-3x-z+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+4y-z=11 \\ 6x-y-3z=7 \\ 4x+5y-2z=15 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+y-2z=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-4y+5z=3 \\ -x+y-z=-2 \end{cases}$

2. Ratkaise X ja Y yhtälöryhmästä

$$\begin{cases} zX-3z=-X-2Y \\ zY-2z=-3X-2Y \end{cases}$$

3. Ratkaise yhtälöryhmät

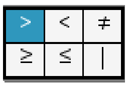
a) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2-y^2=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+y^2=9 \\ x^2+4y^2=7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x^2+y^2=6 \\ x=y-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x^2+y^2+3x-1=0 \\ -x^2-2y^2+x+y=0 \end{cases}$

4.9 Epäyhtälöt

Laskimella voi ratkaista tavallisia murto- ja itseisarvoepäyhtälöitä.

Epäyhtälömerkit saadaan näppäimillä  aukeavasta ikkunasta



Epäyhtälö ratkaistaan käyttäen Algebra-valikon komentoa **1: Ratkaise**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **solve**. Komennon muoto on

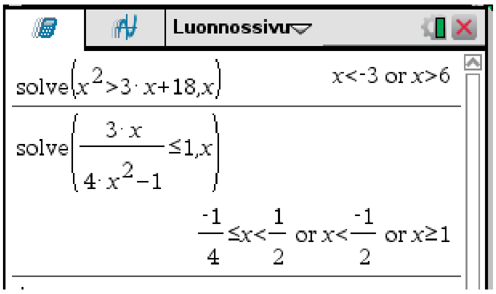
solve(epäyhtälö, muuttuja)

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan epäyhtälöt

$$x^2 > 3x + 18$$

$$\frac{3x}{4x^2 - 1} \le 1$$



Edellisen epäyhtälön ratkaisu on siis

$$x > -3 \quad \text{tai} \quad x > 6$$

Jälkimmäisen epäyhtälön ratkaisu on

$$x < -\frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad -\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{2} \quad \text{tai} \quad x \ge 1$$

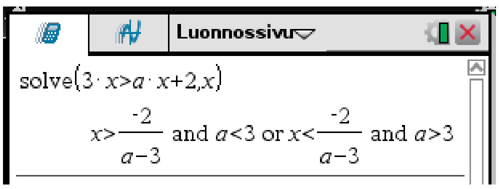
♦

Epäyhtälöt voivat sisältää myös määräämättömiä vakioita.

ESIMERKKEJÄ

2. Ratkaistaan epäyhtälö

$$3x > ax + 2$$



Ratkaisu on siis

$$x > -\frac{2}{a-3} \quad \text{, kun} \quad a < 3$$

$$x < -\frac{2}{a-3} \quad \text{, kun} \quad a > 3$$

♦

TEHTÄVIÄ

Ratkaise epäyhtälöt

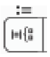
1. a) $x(x+2) \le -2x+3$ b) $\dfrac{2x}{x^2-x-6} > 2$
2. a) $\dfrac{2}{x^2-x} \le \dfrac{1}{x^2+3x}$ b) $\dfrac{x+1}{x} > \dfrac{x}{x-3}$
3. a) $|2x-1| < 5$ b) $|2x-3|-|x+2| < 2$

4.10 Funktio

4.10.1 Funktion määrittely

Laskimessa voidaan määritellä funktioita sijoituskäskyillä

funktio(muuttujat) 



funktion lauseke

tai

funktion lauseke 

funktio(muuttujat)

missä

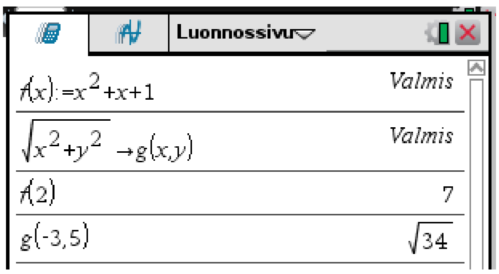
- **funktio** on funktion nimi
- **muuttujat** ovat funktion argumentit pilkulla erotettuna
- **funktion lauseke** on funktion määrittelevä lauseke.

Komennot näkyvät syöttörivillä merkkeinä **:=** ja **→**.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritellään funktiot $f(x)=x^2+x+1$

$$f(x)=x^2+x+1$$
$$g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$



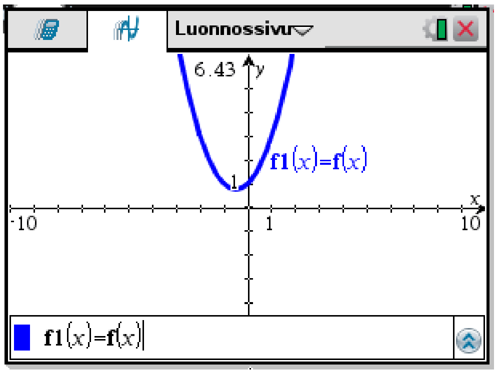
Edellä *f* on yhden muuttujan funktio ja *g* kahden muuttujan funktio. Määrittelyissä on käytetty molempia tapoja. Funktion arvoja voidaan laskea normaaliin tapaan.

♦

Funktioiden määrittelyt ovat voimassa kaikkialla samassa asiakirjassa. Siirtymällä piirtosivulle, voidaan niiden kuvaajia piirtää. Yhden muuttujan funktion kuvaajien piirtämistä on käsitelty luvussa 6.1.1.

ESIMERKKEJÄ

2. Piirretään edellisessä esimerkissä määritellyn funktion *f* kuvaaja

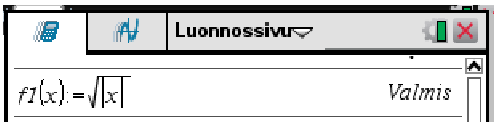


♦

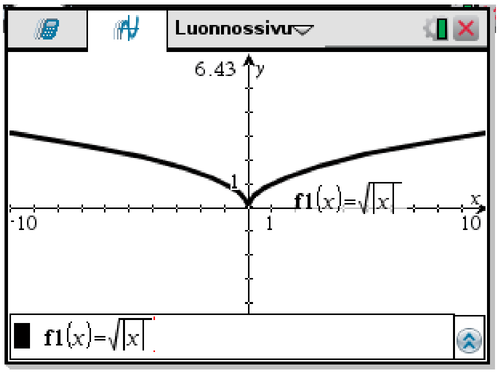
Jos funktiolle annetaan piirtofunktion nimi ***f1***, ***f2***, ***f3***, … on kuvaaja heti piirrettävissä piirtosivulla.

ESIMERKKEJÄ

3. Jos laskentasivulla määritellään funktio



on se heti piirtosivulla piirrettävissä.



♦

Katalogista löytyvällä komennolla **domain** voi määrittää yhden muuttujan funktion määrittelyjoukon. Funktion määrittelyjoukko koostuu niistä muuttujan arvoista, joilla funktion määrittelevä lauseke on reaalinen. Komennon muoto on

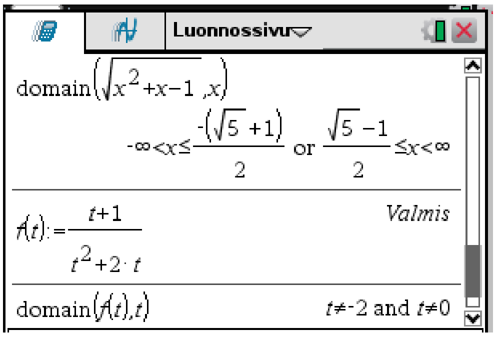
domain(funktio, muuttuja),

missä

- **funktio** on funktio tai lauseke
- **muuttuja** on funktion argumentti.

ESIMERKKEJÄ

4. Määritetään funktioiden määrittelyjoukot.



♦

TEHTÄVIÄ

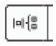
1. Määritä seuraavien funktioiden määrittelyjoukot

a) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-5}$

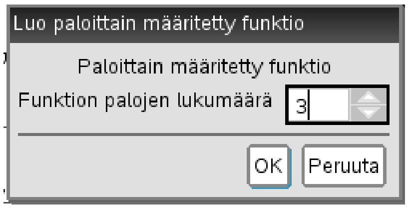
4.10.2 Paloittain määritelty funktio

Paloittain määritelty funktio on muotoa

$$f(x)=\begin{cases} lauseke\,1, \text{ kun } ehto\,1 \\ \quad\vdots \\ lauseke\,n, \text{ kun } ehto\,n \end{cases}$$

Paloittain määritelty funktio voidaan määritellä näppäimellä  aukeavasta ikkunasta lauseke-malleilla

Ensimmäisessä laskentamallissa funktio koostuu kahdesta palasta, jälkimmäisessä palojen määrän itse päättää esille aukeavassa ikkunassa



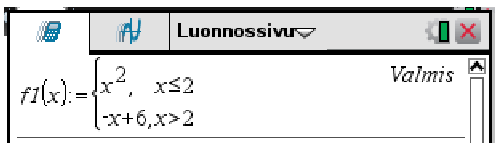
Laskentamallissa kullekin riville tulee ensin funktion lauseke, sitten pilkun jälkeen muuttujaa koskeva ehto. Ylimääräiset rivit voi poistaa  -näppäimellä.

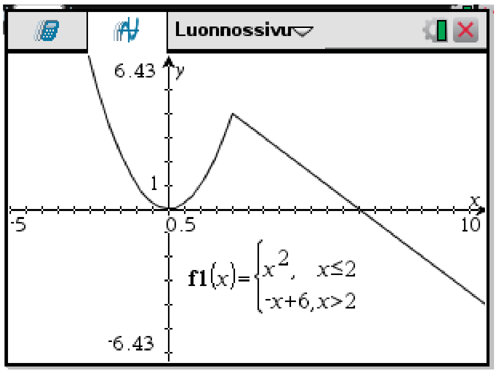
ESIMERKKEJÄ

1. Määritellään funktio

$$f(x)=\begin{cases} x^2 &, \text{ kun } x\le 2 \\ -x+6 &, \text{ kun } x>2 \end{cases}$$

ja piirretään sen kuvaaja.





♦

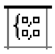
Funktio

$$f(x)=\begin{cases} lauseke\,1, & \text{kun } ehto \\ lauseke\,2, & \text{muulloin} \end{cases}$$

voidaan toteuttaa *katalogista* [1] löytyvällä komennolla **when**, jonka muoto on

when(*ehto*, *lauseke* 1, *lauseke* 2**)**

tai lausekemallilla



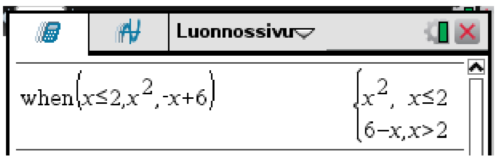
josta alemman yhtälön ehto jätetään tyhjäksi. Tällöin laskin laittaa sen paikalle sanan **Else**.

ESIMERKKEJÄ

1. Edellisen esimerkin funktion

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \text{ kun } x\le 2 \\ -x+6 & , \text{ kun } x>2 \end{cases}$$

toteutus komentoa **when** käyttäen on seuraava:

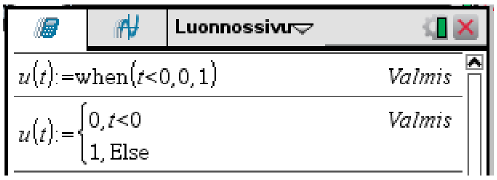


♦

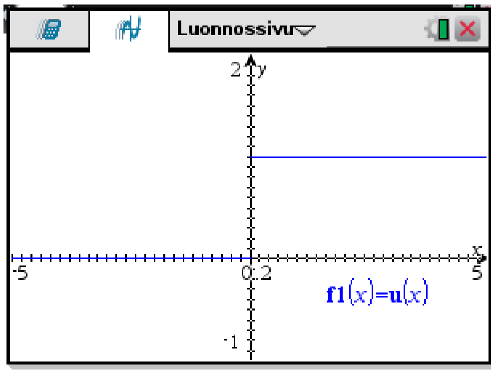
2. *Yksikköaskel*

$$u(t)=\begin{cases}0, \text{ kun } t<0\\ 1, \text{ kun } t\geq 0\end{cases}$$

voidaan toteuttaa komennolla **when** tai lausekemallilla.



Seuraavassa yksikköaskeleen kuvaaja:



♦

TEHTÄVIÄ

1. Piirrä funktion

$$f(x)=\begin{cases}x+6 & , \text{ kun } x\leq -2\\ x^2 & , \text{ kun } -2<x\leq 2\\ -x+6 & , \text{ kun } x>2\end{cases}$$

kuvaaja välillä $[-8,8]$.

4.10.3 Funktion jaksollinen jatko

Tietyllä välillä määritellyn funktion jaksollinen jatko koko reaaliakselille voidaan muodostaa käyttäen menu-valikon komentoa **2: Luku** >> **8: Lukutyökalut** >> **5: Mod**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **mod**. Sen muoto on

mod(m, n)

ja se muodostaa lukujen **m** ja **n** jakolaskun **m/n** jakojäännöksen, jonka tulos on samanmerkkinen[1] kuin **n** tai nolla.

Jos $a < b$, niin funktio

$$J(x) = a + \mathrm{mod}(x - a, b - a)$$

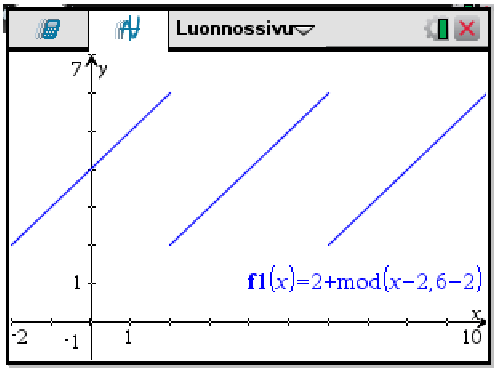
on jaksollinen funktio, jolle

- jakso on $b - a$ ja
- arvo $J(x) = x$ välillä $[a, b[$.

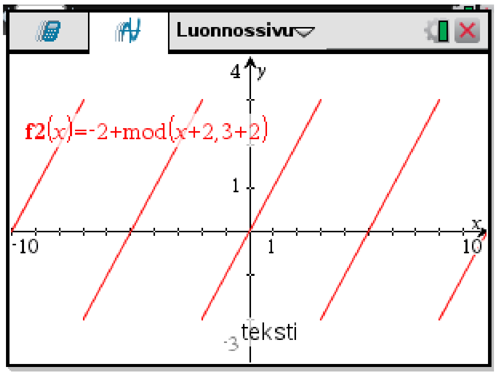
ESIMERKKEJÄ

1. Piirretään J-funktioita

$$J(x) = 2 + \mathrm{mod}(x - 2, 6 - 2)$$



$$J(x) = -2 + \mathrm{mod}(x + 2, 3 + 2)$$



♦

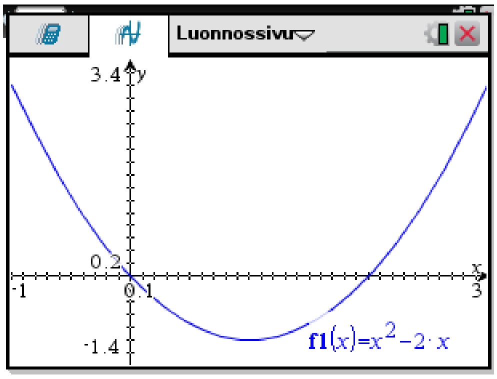
[1] Jos **n** ≠ 0.

Välillä $[a,b]$ määritellyn funktion f jaksollinen jatko reaaliakselille, on yhdistetty funktio $f\circ J$:

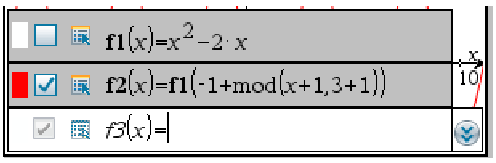
$$(f\circ J)(x)=f\left(a+\mathrm{mod}(x-a,b-a)\right) \quad .$$

ESIMERKKEJÄ

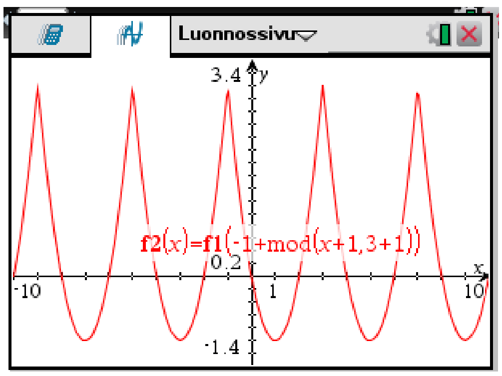
2. Piirretään funktio $y=x^2-2x$ välillä $[-1{,}3]$.



Jatketaan tämä funktio jaksollisesti koko reaaliakselille ja piirretään kuvaaja. Toteutus piirtotilassa on seuraavanlainen:

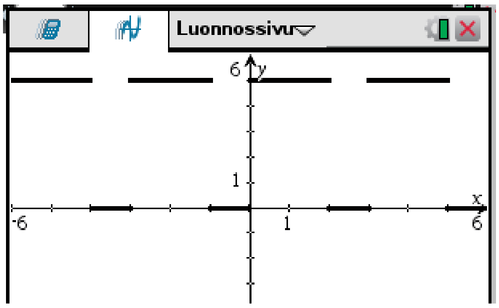


Jaksollisen funktion kuvaaja:

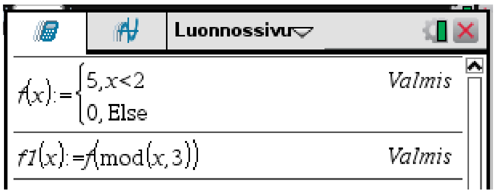


♦

3. Muodostetaan kuvan pulssijono.

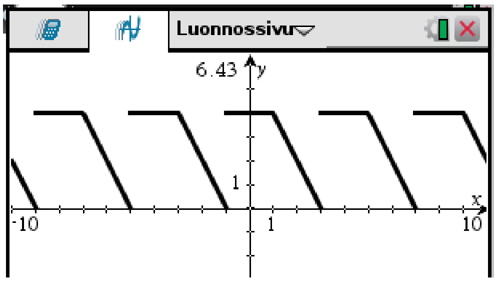


Pulssijonon jakson pituus on 3. Muodostetaan ensin pulssi jakson pituisella välillä $[0,\ 3]$. Sitten jatketaan tämä funktio jaksollisesti.

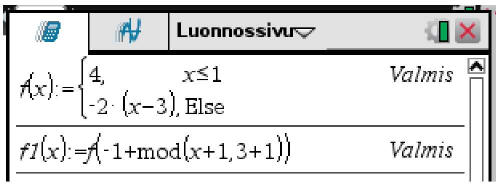


♦

4. Muodostetaan kuvan pulssijono.



Pulssijonon jakson pituus on 4. Muodostetaan ensin pulssi jakson pituisella välillä $[-1,\ 3]$. Sitten jatketaan tämä funktio jaksollisesti.

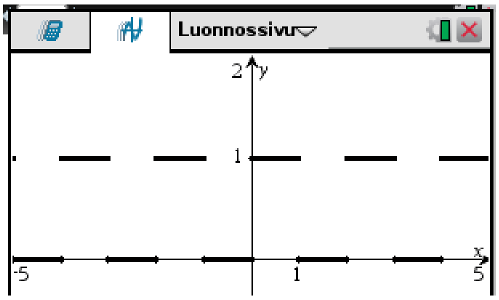


♦

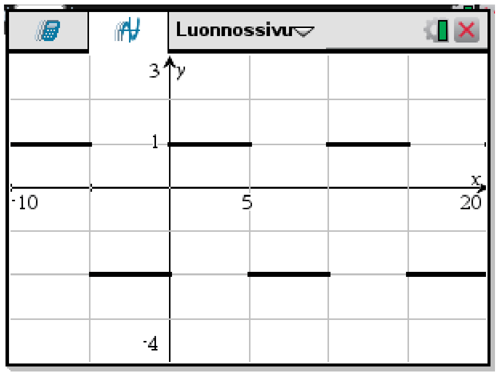
TEHTÄVIÄ

1. Piirrä seuraavat jaksolliset funktiot.

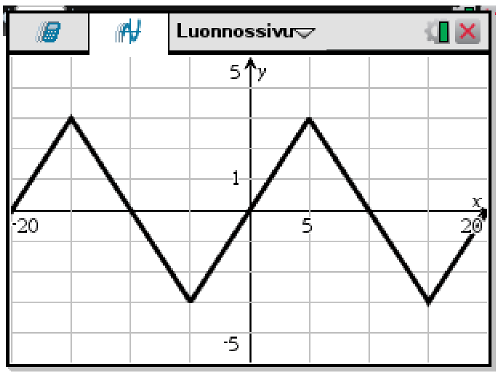
   a)



   b)



   c)



5. TRIGONOMETRIAA

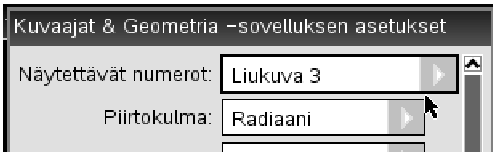
5.1 Trigonometriset funktiot

Trigonometriset funktiot saa laskimessa näppäimellä trig. Tällöin aukeaa ikkuna, josta voidaan valita trigonometriset funktiot ja niiden käänteisfunktiot.

sin	cos	tan	csc	sec	cot
$\sin^{-1}$	$\cos^{-1}$	$\tan^{-1}$	$\csc^{-1}$	$\sec^{-1}$	$\cot^{-1}$

Laskentatilan trigonometristen funktioiden argumentin kulman yksikkö valitaan kotinäytön asetuksissa 5 Asetukset, josta valitaan **2: Asiakirjan asetukset...** Avautuvan ikkunan kohta **Kulma** määrittää argumentin tyypin.

Piirtotilan trigonometristen funktioiden argumentin kulman yksikkö valitaan menu-valikon komennolla **8: Asetukset...** Avautuvan ikkunan kohta **Piirtokulma** määrittää argumentin tyypin.



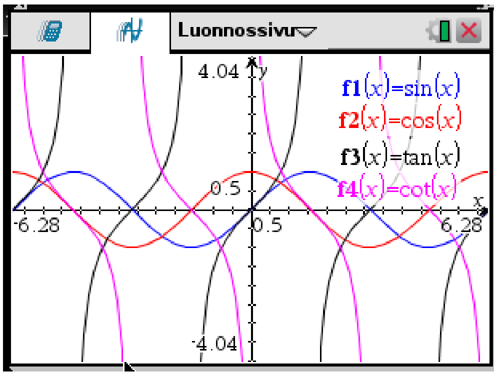
Mahdolliset muutokset on syytä tallentaa *oletusarvoiksi*.

Trigonometrisia funktioita piirrettäessä lähtökohdaksi kannatta ottaa menu-valikosta zoomaus **4: Ikkuna >> 8: Zoomaa – Trig**. Tällöin trigonometriset perusfunktioiden kuvaajat ovat hyvän näköisiä.

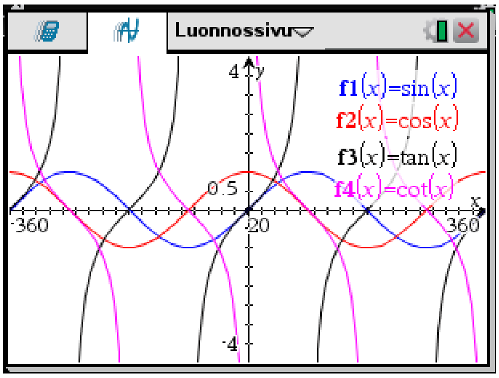
ESIMERKKEJÄ

1. Piirretään funktiot sin *x*, cos *x*, tan *x* ja cot *x*.

   Kuvaajat, kun kulma on radiaaneja:



Kuvaajat, kun kulma on asteina:



♦

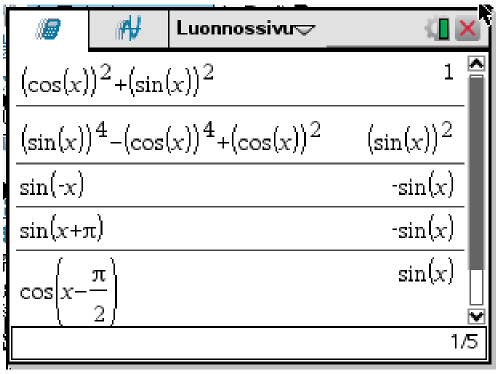
5.2 Trigonometristen lausekkeiden käsittely

Laskin tekee automaattisesti joitakin trigonometrisia sievennyksiä. Muun muassa laskin käyttää hyväksi trigonometrian peruskaavaa

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad .$$

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan lausekkeiden automaattista sieventämistä.



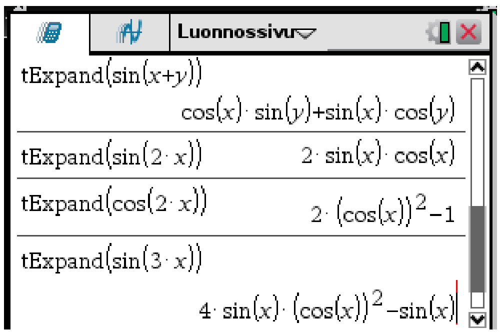
♦

Trigonometristen lausekkeiden muokkaamiseen liittyvät menu-valikon komennot löytyvät valikosta **3: Algebra >> B: Trigonometria**:

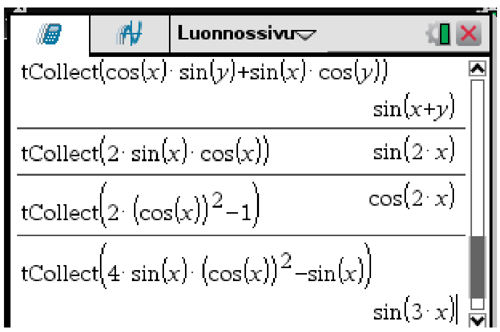
- **1: Laajenna**. Komento näkyy syöttörivillä komentoja **tExpand**.
- **2: Kokoa**. Komento näkyy syöttörivillä komentoja **tCollect**.

ESIMERKKEJÄ

2. Komento **Laajenna** käyttää trigonometrian kaavoja vasemmalta oikealle



ja komento **Kokoa** oikealta vasemmalle.



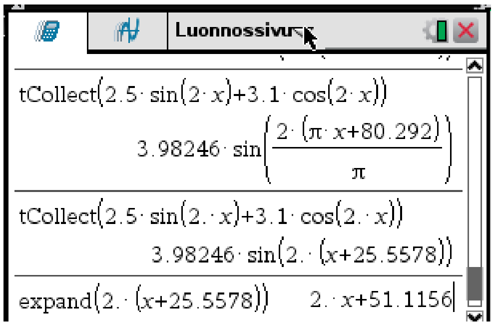
♦

3. Kirjoitetaan lauseke

$$2{,}5\sin 2x+3{,}1\cos 2x$$

yhtä trigonometrista funktiota käyttäen.

Laskimen kulma-asetus on **Aste**. Käytetään komentoa **Kokoa**.



On tehty kaksi yritystä, joissa jälkimmäisessä on desimaalipiste luvun 2 perässä. Huomaa tämän vaikutus tuloksen esitykseen. Lopuksi on suoritettu sinin sisällä oleva kertolasku.

Saadaan siis

$$2{,}5\sin 2x+3{,}1\cos 2x=3{,}98246\sin\left(2x+51{,}1156^{\circ}\right)$$

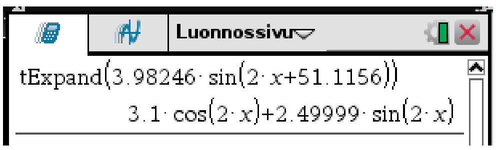
♦

4. Kirjoitetaan lauseke

$$3{,}98246\sin\left(2x+51{,}1156^{\circ}\right)$$

summamuotoon. Jatketaan edellistä esimerkkiä: tuloksen tarkistus.

Laskin on edelleen **Aste**-moodissa. Käytetään komentoa **Laajenna**.



Tulos on pyöristysvirheitä vaille sama kuin edellisen esimerkin lähtölauseke.

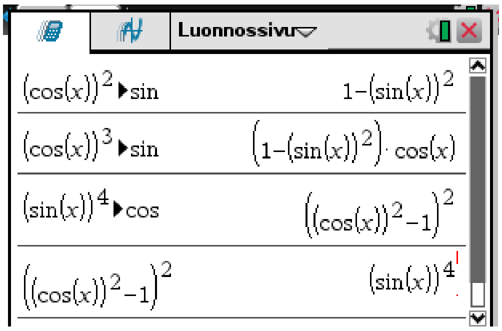
♦

Valikon **3: Algebra** >> **A: Muunna lauseke** komento

- **4: Muunna siniksi** muuntaa trigonometrisen lausekkeen kosinien parilliset potenssit sineiksi.
- **5: Muunna kosiniksi** muuntaa trigonometrisen lausekkeen sinien parilliset potenssit kosineiksi.

ESIMERKKEJÄ

5. Kokeillaan komentoa.

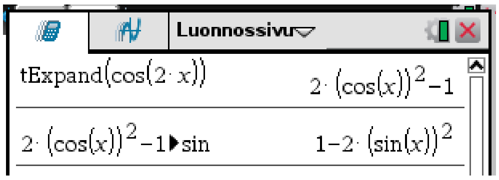


Kahdesta alimmasta laskusta havaitaan, että laskin sieventää automaattisesti takaisin yksinkertaisempaan muotoon.

♦

ESIMERKKEJÄ

6. Lausutaan kosinin kaksinkertaisen kulman kaava siniä käyttäen.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Muunna lauseke $2\sin^3 x+\sin x\cos^2 x$ funktion $\sin x$ polynomiksi.
2. Sievennä lauseke
$$\sqrt{(\sin x+\cos x)^2-2\sin x\cos x}-\sqrt{1-\cos^2 x}$$
3. Sievennä lauseke
$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) .$$
4. Sievennä lauseke
   a) $\cos(x+y)\cos(x-y)$ b) $\sin(x+y)\sin(x-y)$.
5. Esitä lausekkeet summamuodossa sinin ja kosinin avulla
   a) $5{,}91\sin(6.23x-49{,}1^\circ)$ b) $5{,}11\cos(3{,}78x+61{,}8^\circ)$

7. Kirjoitetaan lauseke

$$1{,}9\sin 3t - 2{,}9\cos 3t$$

yhtä trigonometrista funktiota käyttäen. Esitä tulos asteina.

8. Esitä sinifunktiota käyttäen

a) $3\sin 3{,}7x - 4\cos 3{,}7x$ b) $-3{,}5\sin 1{,}2x + 3{,}8\cos 1{,}2x$

Lausu tulos asteina ja siten, että sinifunktion kerroin on positiivinen.

5.3 Trigonometriset yhtälöt

Laskin pystyy ratkaisemaan tarkasti muotoa

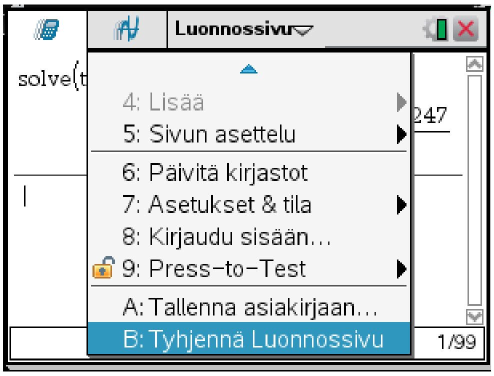
$$T(f(x)) = a$$

olevan trigonometrisen yhtälön, missä

- $T(x)$ on jokin funktioista sin *x*, cos *x*, tan *x*, cot *x*
- $f(x)$ on muuttujan *x* lauseke
- *a* on vakio.

Myös yhtälön, joka voidaan sieventää tähän muotoon, pystyy laskin ratkaisemaan tarkasti. Yleisemmän trigonometrisen yhtälön laskin ratkaisee numeerisesti ja esittää vain muutaman juuren.

Tarkassa ratkaisussa esiintyvää mielivaltaista kokonaislukua laskin esittää muodossa ***n1***, ***n2***, ***n3***, … Luonnossivun indeksin saa alustettua avaamalla sivun otsikkovalikko ja valitsemalla sieltä komento **B: Tyhjennä Luonnossivu**.



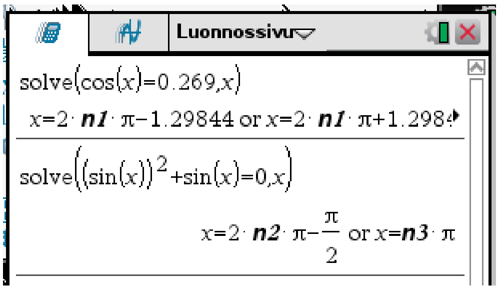
Seuraavissa esimerkeissä laskimen kulma-asetus on Radiaani.

ESIMERKKEJÄ

1. Ratkaistaan yhtälöt

$$\cos x = 0{,}269$$

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$



Ratkaisut ovat siis

$$x=\pm 1{,}29844+n\cdot 2\pi$$

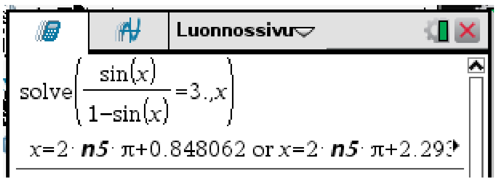
ja

$$x=\frac{-\pi}{2}+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x=n\pi$$

Näissä n on mielivaltainen kokonaisluku.

♦

2. Ratkaistaan yhtälö $\dfrac{\sin x}{1-\sin x}=3$.



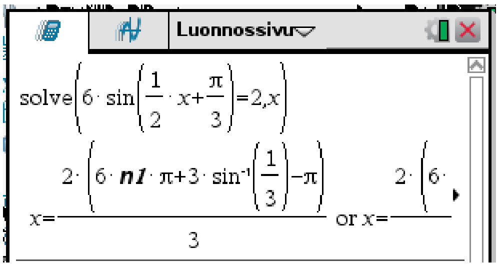
Jotta saataisiin sellainen ratkaisu, jossa esiintyy π ja muu ratkaisun osa desimaaliesityksenä on luvun 3 perään laitettava piste ja komento päätettävä näppäimellä enter.
Ratkaisu on siis

$$x=0{,}848062+n\cdot 2\pi \quad \text{tai} \quad x=2{,}29353+n\cdot 2\pi$$

♦

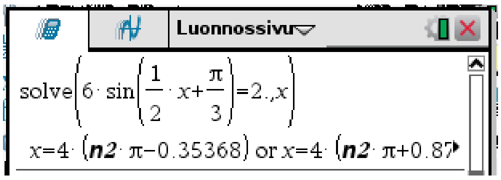
3. Ratkaistaan yhtälö $6\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{3}\right)=2$.

Jos komento päätettäisiin näppäimillä ctrl enter, ei laskin esittäisi lukua π symbolisesti. Pyritään siis päättämään komento näppäimellä enter.
Yritys 1: kirjoitetaan yhtälö sellaisenaan.



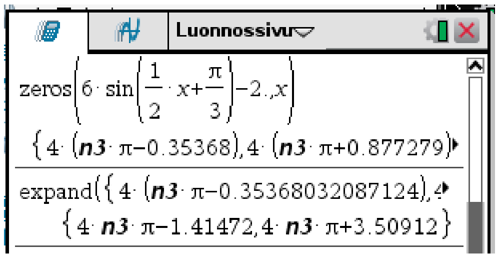
Laskin ei laske lauseketta $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Yritys 2: kirjoitetaan luvun 2 perään piste.



Laskinta ei saa yksittäisellä komennolla laskemaan ratkaisussa esiintyviä kertolaskuja, koska ratkaisussa esiintyy konnektiivi **or**.

Yritys 3: Muutetaan komento komennoksi **zeros** (4: Nollakohdat)



Nyt voidaan suorittaa kertolasku komennolla **expand** (3: Laajenna).

Ratkaisu on siis

$$x=-1{,}41472+n\cdot 4\pi \quad \text{tai} \quad x=3{,}50912+n\cdot 4\pi \quad ,$$

missä n on mielivaltainen kokonaisluku.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Ratkaise yhtälöt

a)	$\sin x=-0{,}766$	b)	$\cos x=0{,}269$
c)	$\tan x=-3{,}84$	d)	$\cot x=3{,}152$

2. Ratkaise yhtälöt

   a) $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

   b) $2\cos^2 x - 5\cos x + 1 = 0$

3. Ratkaise yhtälöt

   a) $\sin 4x = 0{,}175$

   b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -0{,}224$

   c) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = 3{,}215$

   d) $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}117$

4. Ratkaise yhtälöt

   a) $\sin 2x = -0{,}672$

   b) $\cos \frac{x}{5} = 0{,}327$

   c) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 2{,}07$

   d) $\cot 7x = -1{,}59$

5. Ratkaise yhtälöt

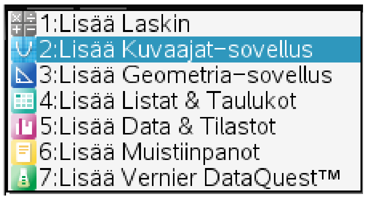
   a) $\tan(3x - 2) = 2{,}5$

   b) $2\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

6. PIIRTÄMINEN

Laskimella voi piirtää tasokäyriä ja pintoja. Piirtämistä voi suorittaa

- *Luonnossivun piirtotilassa*, jonne pääsee painamalla näppäintä kerran tai kaksi[1].
- *Kuvaajat-sovelluksessa*, jonne pääsee kotisivun painikkeella tai painamalla näppäimiä ctrl doc ja valitsemalla uudelta sivulta **2: Lisää Kuvaajat-sovellus**.



- *Geometria-sovelluksessa*, jonne pääsee kotisivun painikkeella tai painamalla näppäimiä ctrl doc ja valitaan uudelta sivulta **2: Lisää Geometria-sovellus**.

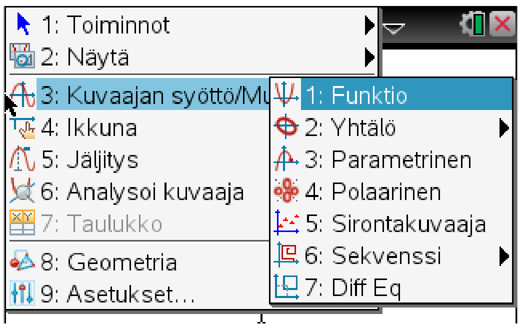
Luonnossivun piirtotilassa voi piirtää vain tasokäyriä. Sen sijaan Kuvaajat- ja Geometria-sovelluksissa voi piirtää sekä tasokäyriä että pintoja. Kuvaajat-sovelluksessa oletusarvona on funktion kuvaajan piirto. Kuvaajat- ja Geometria-sovelluksissa piirtotyyppi valitaan menu-valikon **2: Näytä** komennoilla

- **1: Kuvaajat**: tasokäyrien piirto
- **3: 3D-kuvaus**: pinnan piirto

6.1 Tasokäyrät

Piirrettävä käyrä syötetään ikkunan alaosassa olevalle syöttöriville, jonka saa tarvittaessa näkyviin näppäimellä tab tai näppäimillä ctrl G. Rivin saa piilotettua samoilla näppäimillä tai esc-näppäimellä. Rivin muoto riippuu käyrän tyypistä.

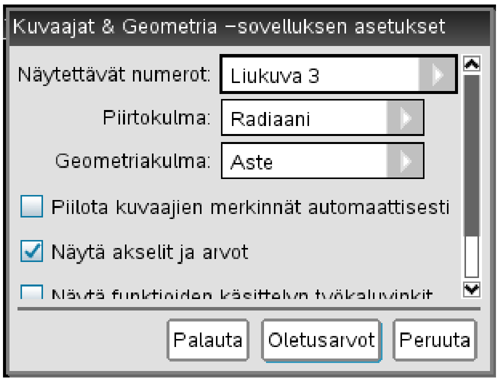
Piirrettävän käyrän tyypin voi valita menu-valikosta **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus**.



[1] Riippuu lähtötilasta.

Laskimella voi piirtää tasokäyrien funktioesityksiä, parametriesityksiä ja napakoordinaattiesityksiä sekä ensimmäisen ja toisen asteen käyrien yhtälömuotoisia esityksiä.

Kuvaajien piirtoon on omat perusasetuksensa, joita voi asettaa menu-valikon komennolla **8: Asetukset...** Tällöin aukeaa seuraavanlainen ikkuna:



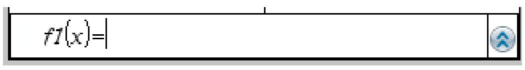
Kulmista piirtokulma vaikuttaa kuvaajien piirrossa. Se on tässä luvussa kuvan mukainen. Jos asetuksia muutetaan, on ne syytä tallentaa *oletusarvoksi*.

6.1.1 Funktioesitys

Käyrän funktioesitys on muotoa[1]

$$y=f(x) \quad , \quad x\in[a,b] \quad .$$

Funktioesitys piirretään kirjoittamalla funktion lauseke näytön alaosassa olevalle syöttöriville, jonka saa esille ja pois näppäimellä tab.

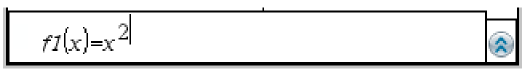


Funktion muuttujan tulee olla *x*.

ESIMERKKEJÄ

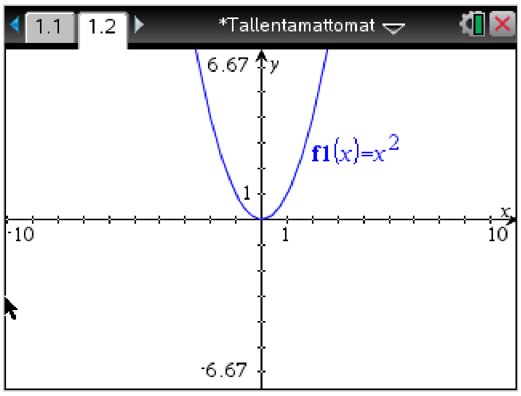
1. Piirretään funktion $y=x^2$ kuvaaja.

   Syötetään funktio piirron syöttöriville.



   Painetaan näppäintä enter ja saadaan kuvaaja.

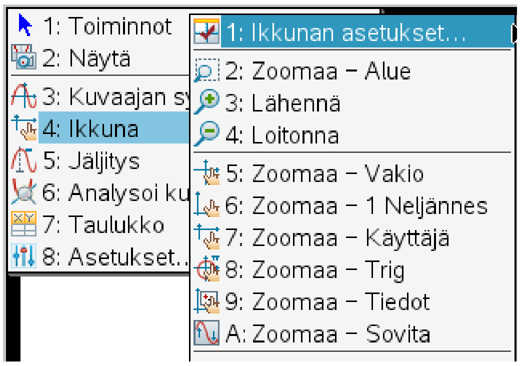
[1] Usein muuttujan *x* liikkumisväliä ei erikseen spesifioida.



Kuvan akselivälit ovat menu-valikon **4: Ikkuna** >> **5: Zoomaa – Vakio** mukaiset.

♦

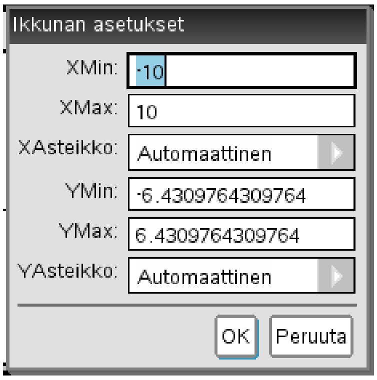
Kuvaajan x- ja y-akselin välejä ja asteikkopisteitä voi määrittää menu-valikosta **4: Ikkuna** löytyvillä komennoilla.



Näistä komento

- **5: Zoomaa – Vakio** on yleiszoomaus, jolla kannattaa usein kokeilla ensimmäiseksi. Tässä zoomauksessa yksikön pituudet x- ja y-akseleilla on samat.
- **8: Zoomaa – Trig** on yleiszoomaus trigonometrisia funktioita piirrettäessä.
- **A: Zoomaa – Sovita** asettaa y-akselin rajat siten, että funktion kuvaaja mahtuu kokonaisuudessaan kuvaan.
- **B: Zoomaa – Neliö** muuttaa y-akselia siten, että yksikön pituudet molemmilla akseleilla ovat samat, jolloin esimerkiksi ympyrän kuva näyttää ympyrältä.

Ikkuna-asetuksia voi itse muuttaa valinnalla **1: Ikkunan asetukset...** Tällöin aukeaa ikkuna, jossa voi muuttaa akselivälejä ja asteikkopisteitä.



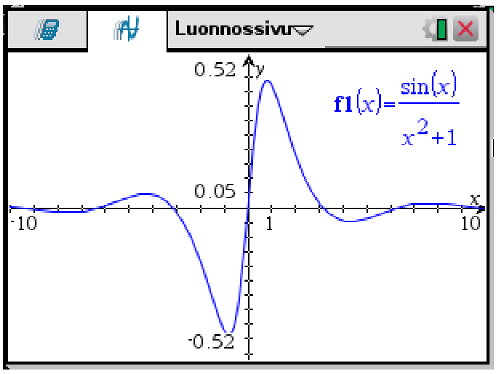
Lähtökohtana on aikaisempi ikkuna-asetus.

menu-valikon komennolla **1: Toiminnot** >> **4: Poista kaikki** voi poistaa vanhan kuvaajan, jonka jälkeen voi alkaa piirtämään täysin uutta kuvaajaa.

ESIMERKKEJÄ

2. Piirretään funktion $y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$ kuvaaja.

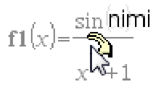
   Käytettäessä Vakio-zoomausta (5) kuvaaja on aika lähellä *x*-akselia. Muutetaan zoomaus Sovita-zoomaukseksi (A), jolloin saadaan seuraavanlainen kuva.



♦

Esimerkin 2 kuvassa funktion lausekkeen esittävä teksti on siirretty kuvaajan päältä pois. Tällainen tekstin siirto tapahtuu seuraavasti:

1. Viedään kohdistin tekstin päälle.
2. Kun kohdistin on muuttunut tarttuvan kämmenen kuvaksi pidetään kosketuslevyn keskikohtaa painettuna kunnes kämmen menee kiinni.



3. Tämän jälkeen voi tekstiä siirtää siirtämällä kohdistinta.

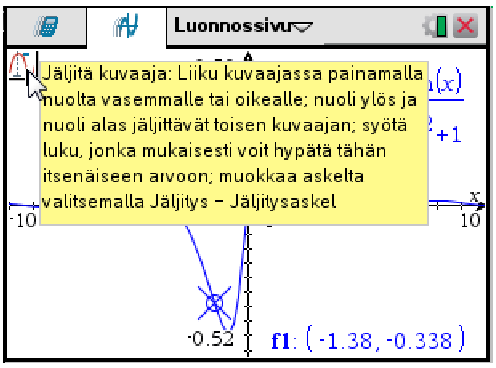
4. Kun haluttu paikka on saatu klikataan kosketuslevyn keskikohtaa tai painetaan näppäintä enter.

Piirretyn funktion arvoja voi jäljittää menu-valikon komennolla **5: Jäljitys >> 1: Jäljitä kuvaaja**. Jäljitys tapahtuu nuolinäppäimiä käyttäen. Kuvaajan pisteiden *x*- ja *y*-koordinaatit näkyvät näytön oikeassa alareunassa. Muuttujan *x* arvon voi myös syöttää, jolloin laskin määrittää sitä vastaavan kuvaajan pisteen. Jäljitystilasta pääsee pois näppäimellä esc.

ESIMERKKEJÄ

3. Jäljitetään edellisen esimerkin kuvaajan arvoja.

   Viemällä kohdistin näytön vasemmassa yläreunassa olevan kuvakkeen päälle, saa kuvaajan jäljitykseen liittyvän ohjeen.



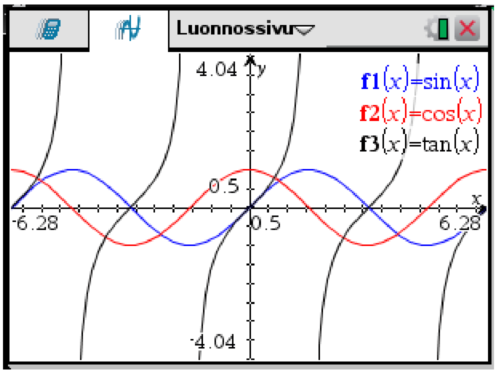
♦

Samaan kuvaan voi piirtää useamman funktion kuvaajat syöttämällä funktioiden lausekkeet piirron syöttörivillä. Piirrettävät funktiot ovat ***f1*(*x*)**, ***f2*(*x*)**, ***f3*(*x*)**, … Syötettyjä funktioita voi selata syöttörivillä nuolinäppäimillä ▲ ja ▼. Niiden määrittelyä voi muuttaa ja niitä voi poistaa poistamalla funktion lauseke.

ESIMERKKEJÄ

4. Piirretään funktioiden $y=\sin x$, $y=\cos x$ ja $y=\tan x$ kuvaajat samaan kuvaan.

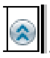
   Käytetään Trig-zoomausta.

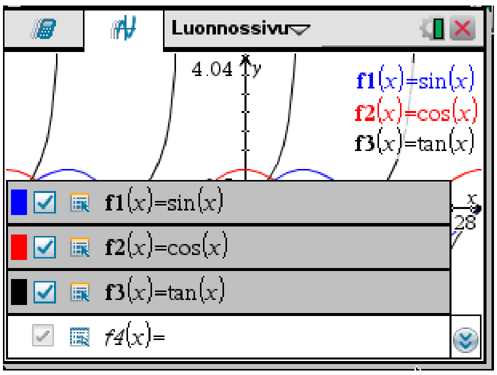


♦

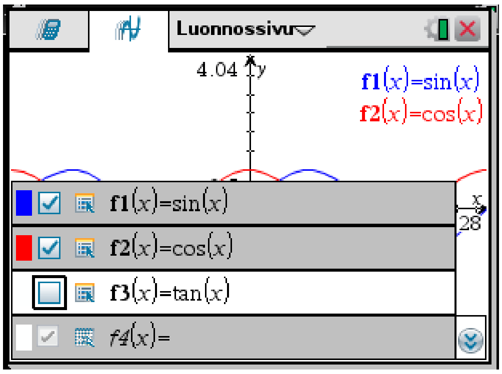
Määritellyt piirtofunktiot saa näkyville painamalla syöttörivin oikeassa reunassa olevaa painiketta  tai syöttörivillä ollessa näppäimillä ctrl menu, josta valitaan komento **2: Laajenna syöttörivi**. Tällöin määritellyt funktiot tulevat esille. Jos funktion edessä olevassa laatikossa on väkänen, niin funktion kuvaaja piirretään. Jos väkästä ei ole, niin kuvaajaa ei piirretä. Kohdistinta käyttäen voidaan väkänen poistaa tai laittaa päälle.

ESIMERKKEJÄ

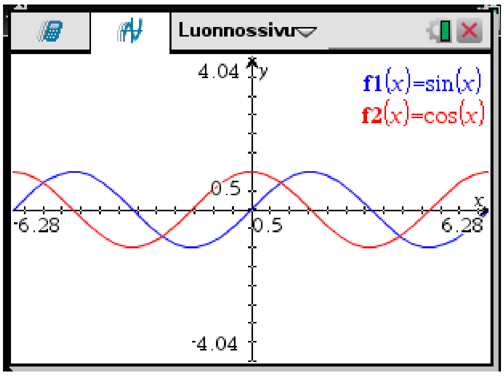
5. Jatketaan edellistä esimerkkiä. Otetaan näkyville määritellyt piirtofunktiot painamalla syöttörivin oikeassa reunassa olevaa painiketta .



Esille aukeavasta ikkunasta nähdään, että funktiot ***f1*(*x*)**, ***f2*(*x*)** ja ***f3*(*x*)** piirretään. Poistetaan väkänen funktion ***f3*(*x*)** edestä



Tällöin piirretään vain funktiot ***f1*(*x*)** ja ***f2*(*x*)** eli sin *x* ja cos *x*.



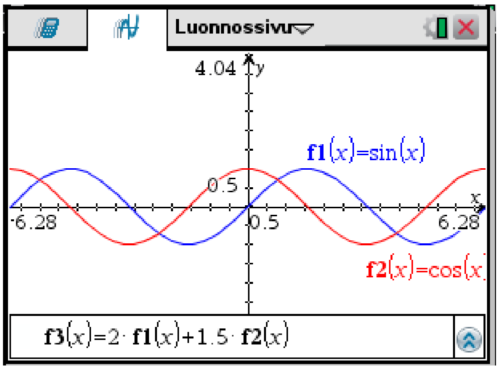
♦

Funktiot voi määritellä muuallakin samassa asiakirjassa ja funktiomäärittelyt ovat voimassa kaikkialla samassa asiakirjassa. Ne piirretään, kun piirtoikkunan **syöttörivillä** painetaan näppäintä enter funktion kohdalla.

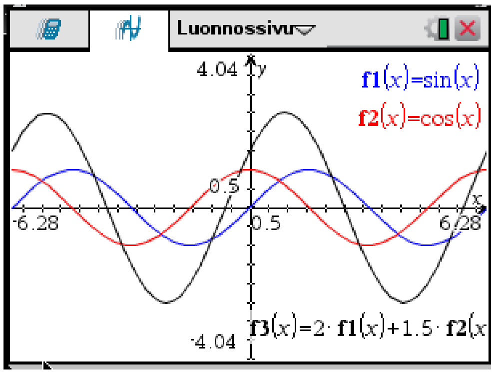
ESIMERKKEJÄ

6. Jatketaan vielä edellistä esimerkkiä. Siirrytään laskentasivulle ja määritellään funktio ***f3*(*x*)** funktioksi $2\,f2(x)+1{,}5\,f3(x)$. Piirrossa tehdyt funktiomäärittelyt ovat käytettävissä laskentasivulla.

Siirrytään takaisin kuvaajasivulle ja siellä syöttöriville. Otetaan siellä esille funktio ***f3*(*x*)**



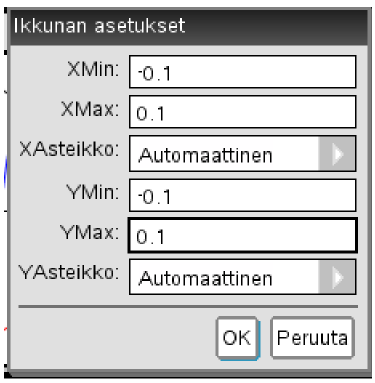
ja painetaan näppäintä enter. Tällöin kuvaan piirretään myös funktion ***f3***(*x*) kuvaaja.



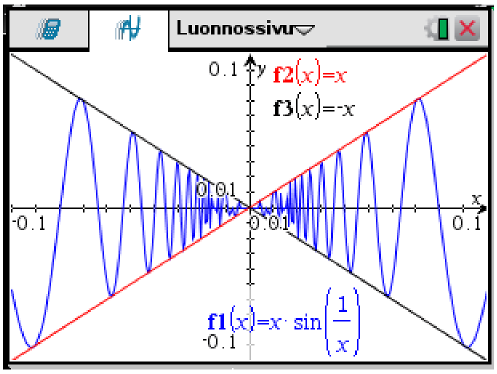
♦

7. Piirretään funktioiden $y=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $y=x$ ja $y=-x$ kuvaajat samaan kuvaan. Valitaan akselien pituudet sopivaksi.

Asetetaan *x*- ja *y*-akselien rajat menu-valikon komennolla **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** seuraavasti:



Tällöin kuvaajat ovat seuraavanlaiset.



Kuvasta nähdään, että laskin ei pysty piirtämään tarkasti funktion $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ kuvaajaa 0:n ympäristössä. Tämä ei ole yllätys[1], sillä funktio värähtelee äärettömän tiheästi pisteen 0 ympäristössä.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Piirrä funktion $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$ kuvaaja välillä $[-5,5]$.
2. Piirrä funktion $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ kuvaaja välillä $[-5\pi, 5\pi]$. Valitse *y*-akseli siten, että kuvaaja on kivan näköinen.
3. Piirrä $\sin^2 x$ ja $\cos^2 x$ samaan kuvaan.
4. Piirrä $\arctan x$.
5. Piirrä $y=x e^x$ ja $y=e^{-x}\cos x$ samaan kuvaan välillä $[-4,4]$. Aseta *y*-akseli välille $[-10,5]$.
6. Piirrä $y=\cos(x)$, $y=1-\frac{x^2}{2}$ ja $y=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ samaan kuvaan välillä $[-10,10]$. Rajaa *y*-akseli välille $[-6,5]$.

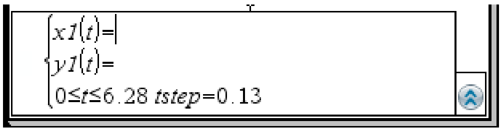
6.1.2 Parametriesitys

Tasokäyrän parametriesityksessä

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}, \quad t\in[a,b]$$

[1] Mikään laite ei pysty piirtämään tarkasti tätä funktiota 0:n ympäristössä.

koordinaatit x ja y annetaan parametrin t avulla. Käyrä piirretään valitsemalla menu-valikosta komento **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 3: Parametrinen**. Tällöin näytön alaosaan aukeaa syöttörivi,



jonne kirjoitetaan parametriesityksen koordinaattien lausekkeet muuttujaa t käyttäen. Syöttörivillä määritetään myös piirron parametriväli ja askelpituus. Syöttöriville pääsee uudelleen näppäimellä tab.

Kuvan käsittelyyn on käytettävissä samat komennot kuin funktion kuvaajan käsittelyyn.

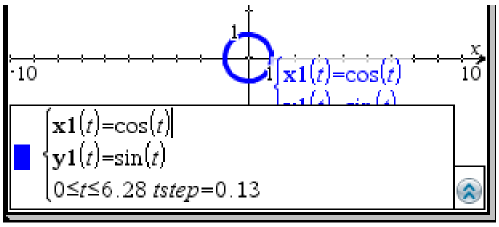
ESIMERKKEJÄ

1. Piirretään yksikköympyrä.

   Yksikköympyrän parametriesitys on

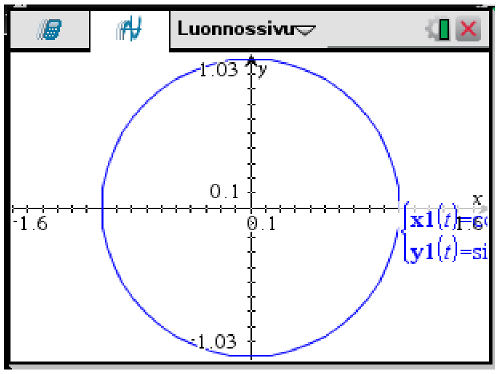
   $$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

   Syötetään parametriesitys syöttörivillä.



   Käyrän kuva saattaa olla soikea tai pieni. Parannetaan kuvaa muuttamalla ikkuna-asetuksia. Annetaan ensin menu-valikon komento **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** , jossa asetetaan x-akselin väli kuvan mukaiseksi.

   Sitten annetaan menu-valikon komento **4: Ikkuna >> B: Zoomaa – Neliö**, jonka jälkeen ympyrä on ympyrän näköinen.



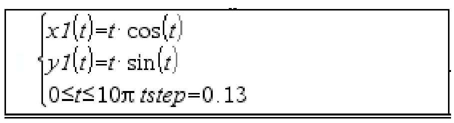
Kuvassa oleva pieni kulmikkuus johtuu piirron askelpituudesta *tstep*. Pienentämällä sitä saadaan hivenen parempi kuva.

♦

2. Piirretään spiraali

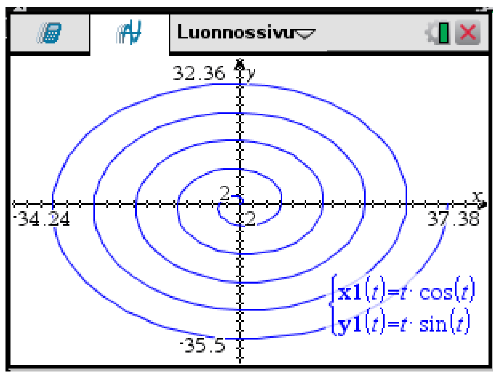
$$\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 10\pi]$$

Syötetään parametriesitys ja parametriväli syöttörivillä.



Koko käyrä saadaan näkyviin 

-valikon ikkuna-asetuksella **4: Ikkuna** >> **A: Zoomaa – Sovita**.



♦

Samaan kuvaan voi piirtää useita käyriä, joilla on omat parametrivälinsä. Piirrettävien käyrien selaaminen ja valinta tapahtuu kuten funktioesityksessä.

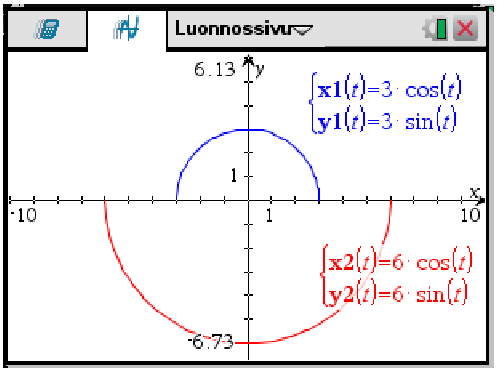
ESIMERKKEJÄ

3. Piirretään puoliympyrät

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,\pi]$$

ja

$$\begin{cases} x=6\cos t \\ y=6\sin t \end{cases}, \quad t\in[\pi,2\pi]$$



♦

Piirrossa määritellyt funktiot ovat käytettävissä muualla samassa asiakirjassa ja piirtofunktioissa voidaan käyttää muualla samassa asiakirjassa tehtyjä funktio- tai muuttujamäärittelyjä.

ESIMERKKEJÄ

4. Tutkitaan käyrän

$$\begin{cases} x=\cos t-\dfrac{\cos(k\,t)}{k} \\ x=\sin t-\dfrac{\sin(k\,t)}{k} \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi]$$

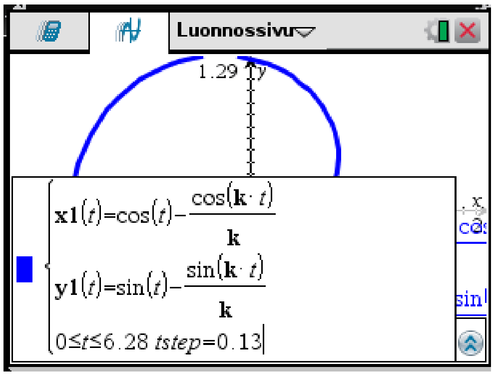
käyttäytymistä parametrin $k\geq 2$ eri kokonaislukuarvoilla[1].

Tallennetaan laskentatilassa muuttujalle k arvo

ja määritellään parametriesitys piirtotilassa.

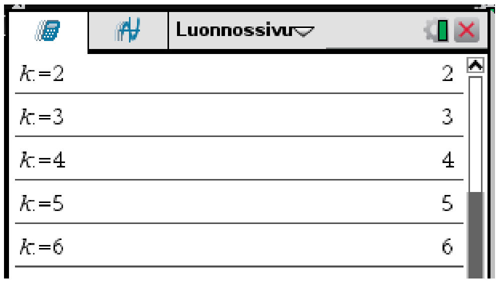
---

[1] Tätä asiaa on käsitelty eri tavalla luvun 6.3 esimerkissä.



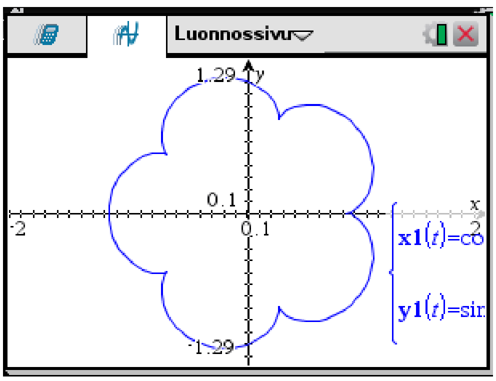
Määritetään kuvan ikkuna-asetus seuraavasti: Asetetaan ensin menu-valikon komennolla **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** x-akselin välille –2 … 2. Sitten annetaan menu-valikon komento **4: Ikkuna >> B: Zoomaa – Neliö**, jolloin akseleilla on sama yksikön pituus.

Käyrää voidaan nyt helposti tutkia antamalla laskentatilassa parametrille k eri arvoja ja katsomalla piirtotilassa käyrää.



Havaitaan, että parametrin arvolla k käyrä koostuu k – 1:stä sileästi kaartuvasta osasta, jotka yhdistyvät toisiinsa terävissä kärjissä. Arvolla $k=2$ käyrä on nimeltään nefroidi.

Kuvassa on piirretty käyrä arvolla $k=6$



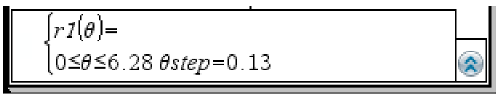
♦

TEHTÄVIÄ

1. Piirrä ellipsi
$$\begin{cases} x=7\cos t \\ y=3\sin t \end{cases} \quad , \quad t\in[0,2\pi] \quad .$$
Aseta koordinaattiakseleille sama yksikön pituus.
2. Piirrä astroidi
$$\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases} \quad , \quad t\in[0,2\pi] \quad .$$
3. Lissajous'n käyrä on muotoa
$$\begin{cases} x=\cos(m\,t) \\ y=\sin(n\,t) \end{cases} \quad , \quad t\in[0,2\pi] \quad .$$
missä m ja n positiivisia kokonaislukuja. Tutki Lissajous'n käyriä antamalla m:lle ja n:lle eri arvoja. Toteuta tämä määrittämällä m:n ja n:n arvot laskentatilassa. Aseta piirron askelpituus *tstep* riittävän pieneksi.

6.1.3 Napakoordinaattiesitys

Tasokäyrän napakoordinaattiesityksessä annetaan napakoordinaatin r riippuvuus napakulmasta θ:
$$r=r(\theta) \quad , \quad \theta\in[\alpha,\beta] \quad .$$
Käyrä piirretään valitsemalla menu-valikosta komento **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 4: Polaarinen**. Tällöin näytön alaosaan aukeaa syöttörivi,

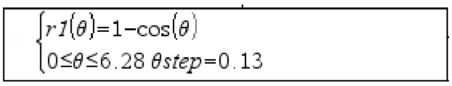


jonne kirjoitetaan napakoordinaatin r lauseke napakulmaa θ käyttäen. Syöttörivillä määritetään myös napakulman liikkumisväli ja askelpituus. Syöttöriville pääsee uudelleen näppäimellä tab. Kirjain θ löytyy näppäimillä ctrl aukeavasta merkki-ikkunasta.

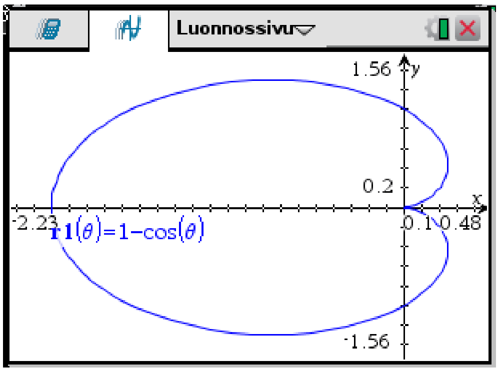
Kuvan käsittelyyn on käytettävissä samat komennot kuin funktion kuvaajan käsittelyyn ja samaan kuvaan voi piirtää useita käyriä.

ESIMERKKEJÄ

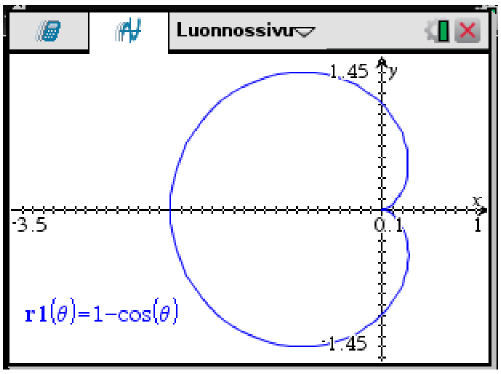
1. Piirretään kardioidi
$$r=1-\cos\theta\,,\ \ \theta\in[0,2\pi]$$
Syötetään napakoordinaattiesitys syöttörivillä.



Koko käyrä saadaan näkyviin menu-valikon ikkuna-asetuksella **4: Ikkuna >> A: Zoomaa – Sovita**.



Kuvassa akseleiden yksikön pituudet ovat erilaisia. Kokeilemalla voidaan todeta, että asettamalla ensin komennolla **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** *x*-akselin välille -3,5 … 1 ja antamalla sen jälkeen komento **4: Ikkuna >> B: Zoomaa – Neliö** saadaan seuraavanlainen kuva, jossa askeleiden yksikköjen pituudet ovat samat.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Piirrä Arkimedeen spiraali

$$r=\theta \quad , \quad \theta\in[0,20\pi] \quad .$$

2. Piirrä käyrä

$$r=\sin n\theta \quad , \quad \theta\in[0,2\pi] \quad .$$

Kokeile luvulle n eri kokonaislukuarvoja. Miten kuvaaja riippuu muuttujasta n?

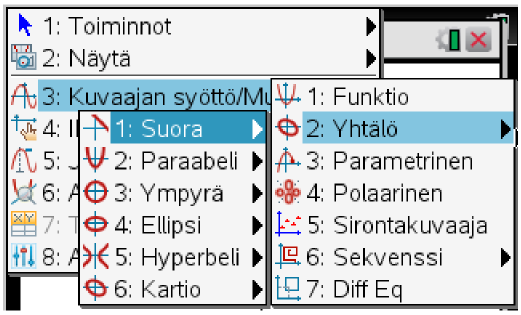
3. Piirrä käyrä

$$r=\sin(m\theta)\cos(n\theta) \quad , \quad \theta\in[0,2\pi] \quad .$$

Kokeile eri kokonaislukuarvoja luvuilla m ja n.

6.1.4 Ensimmäisen ja toisen asteen käyrät

Laskimella voi piirtää ensimmäisen ja toisen asteen käyrien yhtälömuotoisia esityksiä menu-valikon **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 2: Yhtälö** komennoilla.



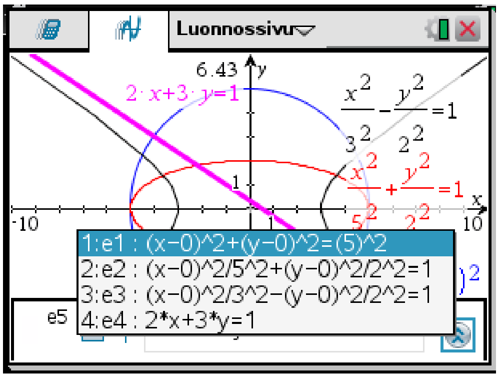
Kussakin käyrätyypissä on usein monta erilaista esitystapaa, joiden parametrit syötetään ikkunan alareunan syöttörivillä. Samaan kuvaan voi piirtää usean eri käyrän kuvaajat. Ympyrää piirrettäessä on valittava akselien yksiköiden pituudet samoiksi valikon **4: Ikkuna** komennolla **5: Zoomaa – Vakio** tai **B: Zoomaa – Neliö**, jos halutaan, että ympyrä näyttää ympyrältä.

ESIMERKKEJÄ

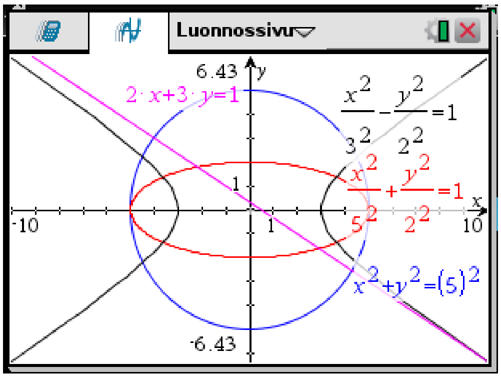
1. Piirretään
   - ympyrä $x^2+y^2=5^2$
   - ellipsi $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$
   - hyperbeli $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$
   - suora $2x+3y=1$

   samaan kuvaan.

   Annetaan sopivat valikkokomento ja täytetään parametrit.



Zoomaukseksi on valittu **4: Ikkuna >> 5: Zoomaa – Vakio**.



♦

menu-valikon **6: Analysoi kuvaajaa >> 8: Analysoi kartioleikkauksia** komennoilla voi analysoida kartioleikkauksia.

Voidaan määrittää

- *ympyrän* 1: keskipiste, 7: säde
- *paraabelin* 4: symmetria-akseli, 5: johtosuora

- *ellipsin* 1: keskipiste, 2: kärkipisteet, 3:polttopisteet 4: symmetria-akselit ja 8:epäkeskisyys[1].
- *hyperbelin* 1: keskipiste, 2: kärkipisteet, 3:polttopisteet, 4: symmetria-akseli, 6: asymptootit, 8: epäkeskisyys

Ominaisuutta määritettäessä on napsautettava haluttua käyrää. Analysoinnin voi lopettaa esc-näppäimellä.

Käyrien yhtälöitä syötettäessä on hyvä kirjoittaa lukuihin desimaalipisteet. Tällöin laskin antaa ominaisuuksien numeeriset arvot desimaalilukuina.

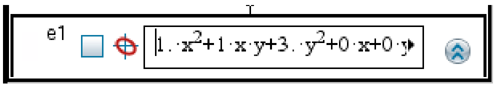
ESIMERKKEJÄ

2. Piirretään käyrä

$$x^2 + 3y^2 + xy - 2 = 0$$

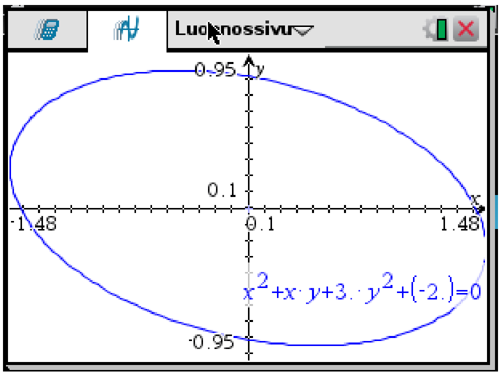
ja analysoidaan sitä.

Annetaan menu-valikon **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 2: Yhtälö >> 6: Kartio**



Huomaa, että lukuihin on laitettu desimaalipisteet[2].

Annetaan ikkuna-asetukset seuraavasti: ensin komento **4: Ikkuna >> A: Zoomaa – Sovita**, sitten komento **4: Ikkuna >> B: Zoomaa – Neliö**. Tällöin akseleiden yksiköt ovat samanpituisia.

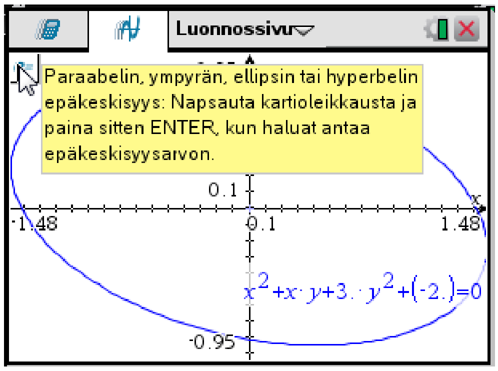


Nähdään, että kyseessä on ellipsi. Määritetään sen epäkeskisyys ja polttopisteet. Annetaan menu-valikon komento **6: Analysoi kuvaajaa >> 8: Analysoi kartioleikkauksia** ja sieltä

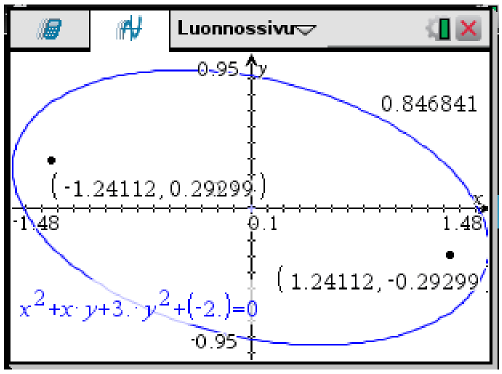
[1] Eli eksentrisyys

[2] Oikeastaan luvun 1 perässä olevalla desimaalipisteellä ei ole vaikutusta.

ensin **8: Epäkeskisyys** ja sitten **3: Polttopisteet**. Komennon annon jälkeen on kohdistimella napsautettava käyrää. Analysoinnista pääsee pois esc-näppäimellä.



Käyrän kuva on nyt seuraavanlainen.



Kuvasta nähdään, että ellipsin

- epäkeskisyys on 0,846841
- polttopisteet ovat $(-1{,}24112\,;0{,}29299)$ ja $(1{,}24112\,;-0{,}29299)$.

♦

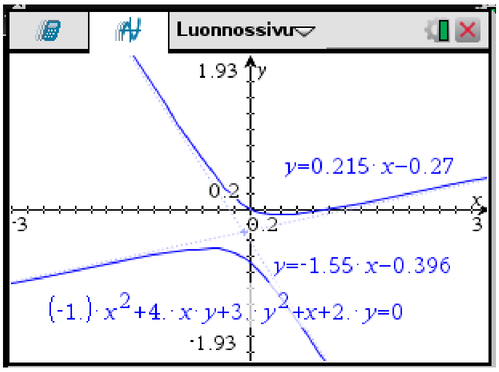
ESIMERKKEJÄ

3. Piirretään käyrä

$$-x^2+3\,y^2+4\,x\,y+x+2\,y=0$$

ja analysoidaan sitä.

Piirtämällä kuva nähdään, että kyseessä on hyperbeli.



Kuvassa on määritetty myös hyperbelin asymptootit.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien käyrien tyyppi piirtämällä kuvaajat. Jos käyrä on ellipsi, määritä polttopisteet ja epäkeskisyys. Jos käyrä on hyperbeli, määritä asymptootit ja epäkeskisyys. Jos käyrä on paraabeli, määritä symmetria-akseli ja johtosuora.

   a) $x^2+3y^2-xy-1=0$ b) $x^2+2y^2+4xy+2y+3=0$

   c) $4x^2+y^2+4xy+x+y-5=0$ d) $-x^2+2y^2+4xy-2x+3y=0$

6.2 *Yhtälöiden numeerinen ratkaiseminen*

menu-valikon komento **3: Algebra** >> **6: Numeerinen** määrittää numeerisesti yhtälön yhden ratkaisun. Komento näkyy syöttörivillä komentona **nSolve**. Komennon muotoja ovat

nSolve(Yhtälö, muuttuja = alkuarvaus)

nSolve(Yhtälö, muuttuja = alkuarvaus, alaraja, yläraja)

Komento lähtee arvosta **alkuarvaus** lähtien etsimään numeerisesti yhtälön juurta. Jälkimmäisessä muodossa etsintä rajoitetaan välille **alaraja … yläraja**. Usein päädytään alkuarvausta lähellä olevaan juureen. Jos yhtälöllä on useita juuria, on käytettävä useita eri alkuarvauksia, jotka ovat riittävän lähellä juuria. Jos **nSolve** ei löydä ratkaisua, tulostaa se tekstin ”Ratkaisua ei löydy”. Parametrin = **alkuarvaus** voi jättää poiskin.

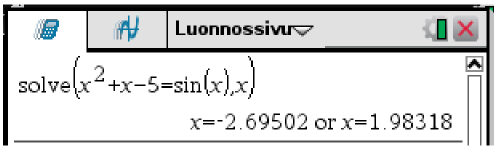
ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään yhtälön

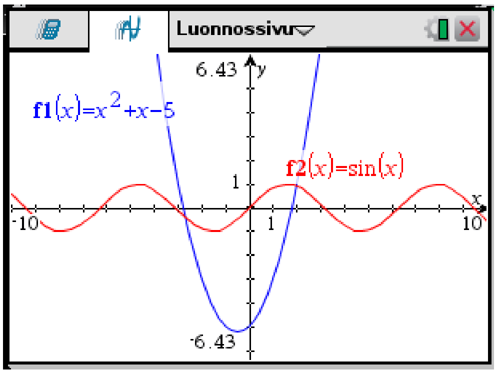
   $$x^2+x-5=\sin x$$

   reaalijuuret.

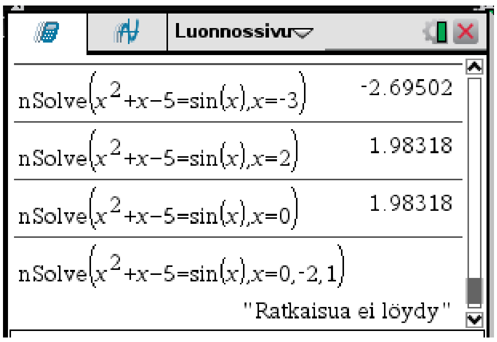
   menu-valikon komento **3: Algebra** >> **1: Ratkaise** antaa kaksi juurta.



jotka ovat yhtälön ainoat juuret, sillä piirtämällä yhtälön vasemman- ja oikeanpuolen kuvaajat nähdään, että kuvaajilla on kaksi leikkauspistettä.



Kokeillaan kuitenkaan komentoa **nSolve**.



Huomaa, kuinka alkuarvaus vaikuttaa siihen mikä juuri löydetään. Kuvasta nähdään, että välillä $[-2,1]$ yhtälöllä ei tietenkään ole juurta.

♦

Yleisesti yhtälöiden ratkaiseminen aloitetaan menu-valikon komennolla **3: Algebra >> 1: Ratkaise**, jonka muoto on

solve(yhtälö, x)

Jos yhtälön toinen puoli on nolla eli yhtälö on muotoa $f(x)=0$, voidaan käyttää myös menu-valikon komentoa **3: Algebra >> 4: Nollakohdat**, jonka muoto on

zeros(f(x), x)

Jos juuria etsitään vain tietyltä väliltä voidaan komentoihin lisätä rajoite muodossa

solve(yhtälö, x)| ehtolauseke

zeros(f(x), x)| ehtolauseke

Jos laskin antaa näytön alareunassa varoituksen

⚠ Lisää ratkaisuja voi olla olemassa. Yritä asia...

on laskin määrittänyt juurien likiarvot numeerisesti, eikä se välttämättä esitä kaikkien juurien likiarvoja. Laskimen määrittämät juurien likiarvot ovat oikein, mutta yhtälöllä saattaa olla lisää juuria. Tällöin pyritään muokkaamaan yhtälö sellaiseen muotoon, että sen vasemman ja oikean puolen funktioiden kuvaajien käyttäytyminen tunnetaan.

Jos yhtälön vasen ja oikea puoli ovat nollasta eroavia, piirretään yhtälön vasemman ja oikean puolen funktioiden kuvaajat. Yhtälön juuret ovat kuvaajien leikkauspisteiden x-koordinaatit. Valitaan piirtoväli sellaiseksi, että nähdään kaikki[1] leikkauspisteet. Niiden lukumäärä on juurien lukumäärä. Lisäjuurien likiarvojen määrittämisessä voidaan nyt käyttää seuraavia tapoja:

- <u>Juurien määrittäminen kuvasta</u>: Kuvasta määritetään mahdollisten lisäjuurien likiarvot yksi kerrallaan menu-valikon komennolla **3: Analysoi kuvaaja >> 4: Leikkauspiste**. Tällöin rajataan halutun leikkauskohdan ympäristöstä sellainen väli, jossa on vain yksi leikkauskohta. Välin rajaaminen tapahtuu antamalla välin vasen ja oikea päätepiste joko kohdistinta käyttäen tai kirjoittamalla arvot. Laskin esittää tällä välillä olevan leikkauspisteen likiarvon. Leikkauspisteen x-koordinaatti on yhtälön juuren likiarvo. Tarvittaessa likiarvo voidaan tallettaa muuttujaan ja tulostaa laskentatilassa.
- <u>Komennon **nsolve** käyttö</u>: Määritetään kuvasta yksi kerrallaan lisäjuurien karkea likiarvo esim. käyttämällä menu-valikon komentoa **5: Jäljitä >> 1: Jäljitä kuvaaja**. Tämän jälkeen lasketaan juuren tarkempi likiarvo laskentatilan komennolla

  nSolve(yhtälö, x = karkea likiarvo)

Jos yhtälön toinen puoli on nolla eli yhtälö on muotoa $f(x)=0$, piirretään funktion $f(x)$ kuvaaja sopivalla välillä. Yhtälön juuret ovat funktion nollakohdat. Valitaan piirtoväli sellaiseksi, että nähdään kaikki[2] nollakohdat. Niiden lukumäärä on juurien lukumäärä. Lisäjuurien likiarvojen määrittämisessä voidaan nyt käyttää seuraavia tapoja:

- <u>Juurien määrittäminen kuvasta</u>: Kuvasta määritetään mahdolliset lisäjuuret yksi kerrallaan funktion nollakohdista eli x-akselin kohtaamispisteistä menu-valikon komennolla **3: Analysoi kuvaaja >> 1: Nolla**. Menettelytapa on samanlainen kuin edellä.
- <u>Komennon **nsolve** käyttö</u>: Käytetään laskentatilan komentoa **nsolve** samaan tapaan kuin edellä.

ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään yhtälön

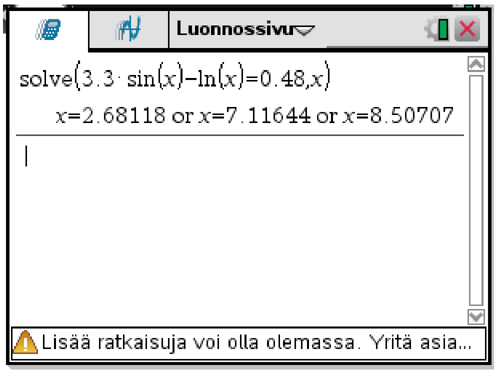
$$3{,}3\sin x-\ln x=0{,}48$$

[1] Jos niitä on äärellinen määrä.

[2] Jos niitä on äärellinen määrä.

kaikki reaalijuuret.

Laskentatilan menu-valikon komento **3: Algebra** >> **1: Ratkaise** antaa kolme juurta.

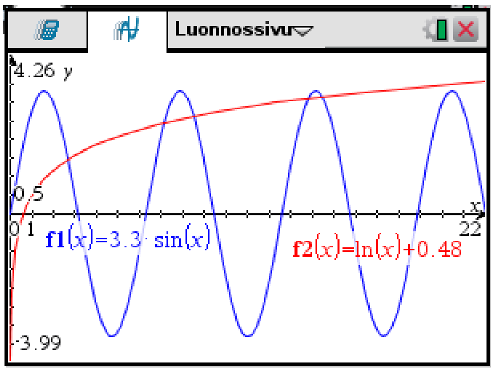


$$x_1 = 2{,}68118$$
$$x_2 = 7{,}11644$$
$$x_3 = 8{,}50707$$

Koska näytön alareunassa on varoitus, on laskin määrittänyt juuret numeerisesti ja niitä saattaa olla enemmän. Muokataan yhtälö muotoon

$$3{,}3 \sin x = \ln x + 0{,}48 \quad ,$$

jossa yhtälön vasemman ja oikean puolen funktioiden käyttäytyminen tunnetaan. Piirretään yhtälön vasemman ja oikean puolen funktioiden kuvaajat sellaisella välillä, että funktioiden kaikki leikkauspisteet saadaan näkyviin[1].

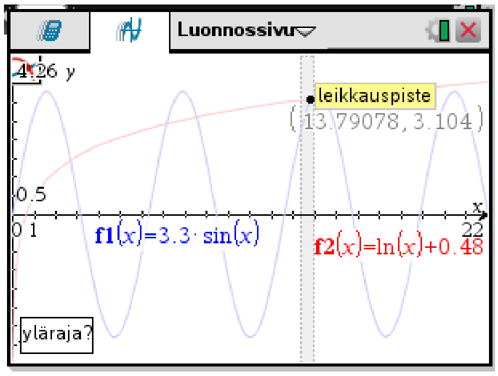


Kuvasta nähdään[2], että leikkauspisteitä on 5, joten reaalijuuria on 5 kappaletta. Lisäjuuret saadaan kahdesta oikeanpuoleisimmasta leikkauspisteestä. Lisäjuurien tunnistamisessa voidaan käyttää apuna menu-valikon komentoa **5: Jäljitä** >> **1: Jäljitä kuvaaja**.

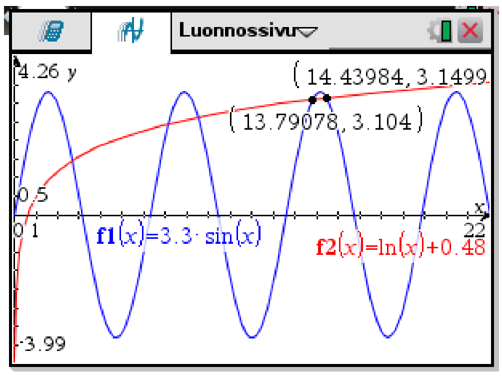
[1] Tässä joutuu kokeilemaan useita eri välejä.

[2] Piirrettyjen funktioiden käyttäytymisen perusteella tiedetään, että muita leikkauspisteitä ei ole.

Määritetään lisäjuuria vastaavat leikkauspisteet menu-valikon komennolla **3: Analysoi kuvaaja >> 4: Leikkauspiste**.



Saadaan seuraavanlainen kuva.



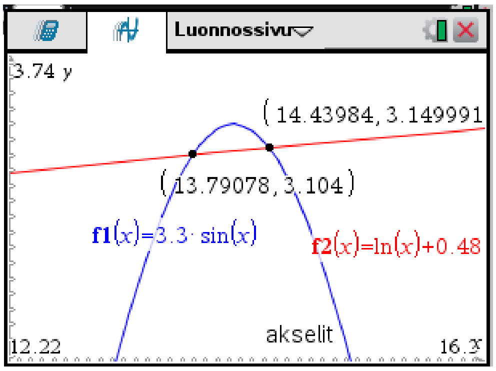
Jotta nollakohdat esitetään riittävän tarkasti, on kuvaan valittu menu-valikon komennolla **8: Asetukset** näytettävien numeroiden tarkkuudeksi **Liukuva 7**.

Lisäjuuret ovat siis

$x_4 = 13{,}79078$

$x_5 = 14{,}43984$

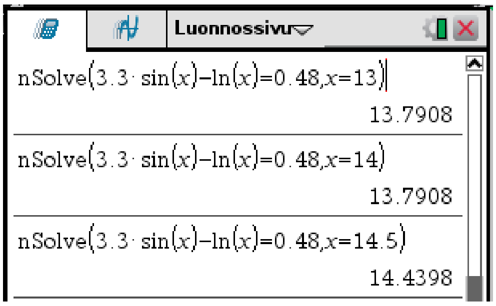
Jos leikkauspisteet ovat lähellä toisiaan voidaan zoomauksella saada tarkempi kuva. Seuraavassa kuvassa on käytetty menu-valikon zoomausta **4: Ikkuna >> 2: Zoomaa – Alue**.



♦

3. Määritetään edellisen esimerkin lisäjuuret komentoa **nSolve** käyttäen.

   Kokeillaan kuvasta pääteltäviä lisäjuurien alkuarvauksia. Tässä voi joutua kokeilemaan eri arvoja.



Siis

$$x_4 = 13{,}7908$$
$$x_5 = 14{,}4398$$

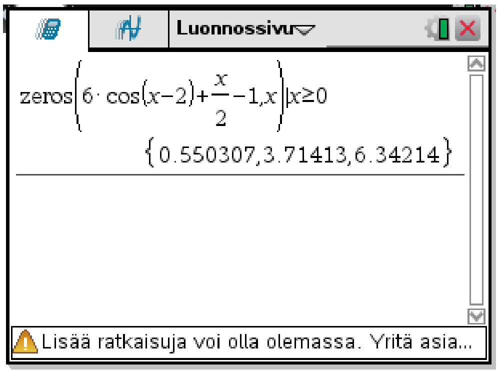
♦

4. Määritetään yhtälön

$$6\cos(x-2)+\frac{x}{2}-1=0$$

   kaikki ei-negatiiviset juuret.

   Laskentatilan menu-valikon komento **3: Algebra >> 4: Nollakohdat** antaa 3 juurta.

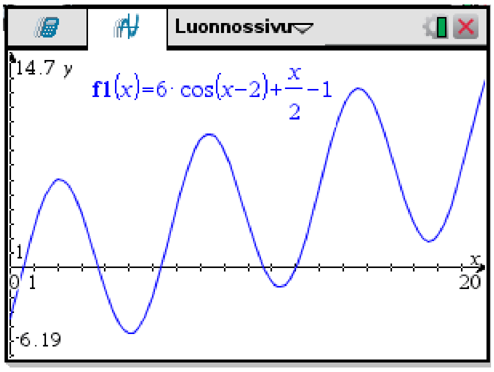


$x_1 = 0{,}550307$

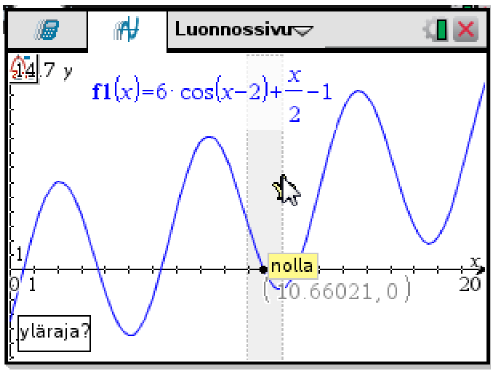
$x_2 = 3{,}71413$

$x_3 = 6{,}34214$

Koska näytön alareunassa on varoitus, saattaa juuria olla enemmän. Piirretään yhtälön vasemman puolen funktion kuvaaja ja tarkastellaan sen nollakohtia.

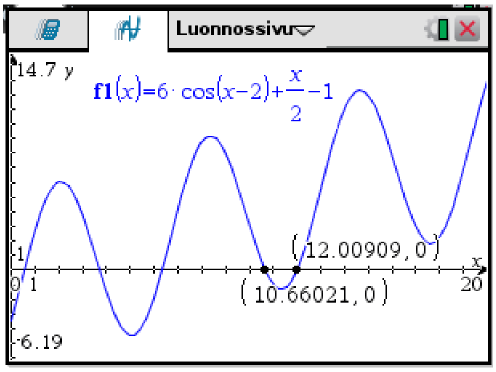


Kuvaajasta nähdään, että funktiolla on 5 nollakohtaa[1] eli yhtälöllä on 5 juurta, kun $x \geq 0$. Tarkastelemalla kuvaajaa havaitaan, että on määritettävä 2 oikeanpuoleista nollakohtaa. Käytetään menu-valikon komentoa **3: Analysoi kuvaaja >> 1: Nolla**.



[1] Ilmeisesti kuvaaja käyttäytyy kuva-alueen ulkopuolella samantyylisesti.

Saadaan kuva,



josta nähdään lisäjuurien likiarvot

$$x_4 = 10{,}66021$$

$$x_5 = 12{,}00909$$

Kuvassa on menu-valikon komennolla **8: Asetukset** asetettu näytettävien numeroiden tarkkuudeksi **Liukuva 7**.

♦

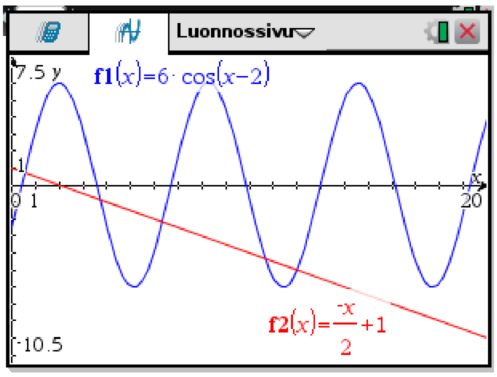
5. Edellisen esimerkin yhtälön

$$6\cos(x-2)+\frac{x}{2}-1=0$$

lisäjuurien määrittämisessä olisi ollut parempi muokata yhtälö muotoon

$$6\cos(x-2)=-\frac{x}{2}+1 \quad ,$$

jossa yhtälön vasemman ja oikean puolen funktioiden käyttäytyminen tunnetaan paremmin. Tällöin kuva olisi seuraava.



Kuvasta nähdään luotettavammin yhtälön juurien lukumäärä.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä yhtälöiden kaikki reaalijuuret.

   a) $4\sin x - \frac{x}{3} = 1$ b) $x^2 - 100x = 30\cos^2 x$

6.3 Pinnat

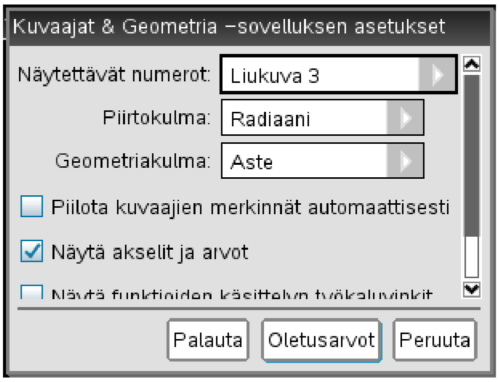
Laskimella voi piirtää funktiomuodossa ja parametriesityksenä annettuja pintoja. Pintoja ei voi piirtää luonnossivun piirtotilassa, vaan ne on piirrettävä Kuvaajat- tai Geometria-sovelluksessa, joihin pääsee seuraavasti:

- *Kuvaajat-sovellus*: painetaan kotisivulla painiketta tai painetaan näppäimiä ctrl +page doc ja valitaan uudelta sivulta **2: Lisää Kuvaajat-sovellus**.
- *Geometria-sovellus*: painetaan kotisivulla painiketta tai painetaan näppäimiä ctrl +page doc ja valitaan uudelta sivulta **2: Lisää Geometria-sovellus**.

Pintojen piirto aloitetaan menu-valikon komennolla **2: Näytä >> 3: 3D-kuvaus**. Piirrettävän pinnan esitys syötetään ikkunan alaosaan aukeavalle syöttöriville, jonka saa tarvittaessa näkyviin näppäimellä tab tai näppäimillä ctrl G. Rivin saa piilotettua samoilla näppäimillä tai esc-näppäimellä. Oletusarvoisesti syötetään funktioesitys. menu-valikon komennolla **3: 3D kuvaajan syöttö/muokkaus** voidaan valita pinnan esitysmuoto

- **1: Funktio**
- **2: Parametrinen**

Kuvaajien piirron perusasetukset voi asettaa menu-valikon komennolla **6: Asetukset...** Tällöin aukeaa ikkuna,



jossa kulmista piirtokulma vaikuttaa kuvaajien piirrossa. Se on tässä luvussa kuvan mukainen. Jos asetuksia muutetaan, on ne syytä tallentaa *oletusarvoksi*.

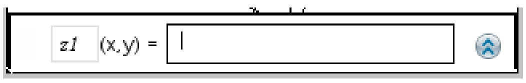
6.3.1 Funktioesitys

Pinnan funktioesitys on muotoa

$$z=f(x,y)\quad,$$

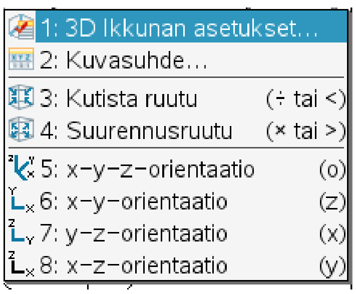
missä $x\in[a,b], y\in[c,d]$. Funktioesityksessä on siis z-koordinaatti annettu koordinaattien x ja y avulla.

Pinnan funktioesitys piirretään kirjoittamalla funktion lauseke näytön alaosassa olevalle syöttöriville, jonka saa esille ja pois näppäimellä tab.



Funktion muuttujien tulee olla x ja y.

menu-valikon **4: Etäisyys/Ikkuna** komennoilla



- **1: 3D-ikkunan asetukset...** määritetään muuttujien x ja y liikkumisvälit sekä asetetaan z-akselin väli.
- **2: Kuvasuhde...** määritetään akseleiden suurennussuhteet.

Kuvaa voi suurentaa näppäimellä [×] ja pienentää näppäimellä [÷]. Kuvaa voi kiertää nuolinäppäimillä. Näppäimillä [O], [X], [Y] ja [Z] saadaan tiettyjä valmiita katselukulmia. Automaattinen kierto saadaan aikaiseksi näppäimellä [A] tai [menu]-valikon komennolla **1: Toiminnot >> 8: Autom. kierto**. Kierto saadaan loppumaan [esc]-näppäimellä.

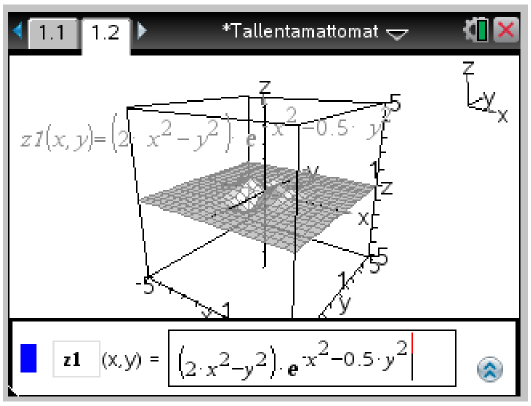
[menu]-valikon **2: Näytä** komennoilla

- **4: Piilota ruutu/Näytä ruutu** saadaan pinnan ympärillä oleva laatikko pois näkyvistä tai näkyviin.
- **5: Piilota akselit/Näytä akselit** saadaan koordinaattiakselit pois näkyvistä tai näkyviin.

ESIMERKKEJÄ

1. Piirretään pinta $z=(2x^2-y^2)e^{-x^2-0{,}5y^2}$, missä $x\in[-2,2]$, $y\in[-3,3]$.

   Syötetään funktio syöttöriville ja painetaan [enter]-näppäintä, jolloin saadaan kuva.

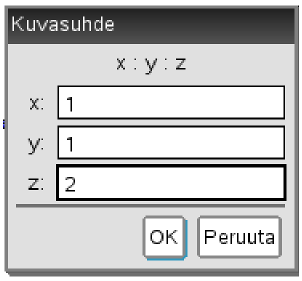


[menu]-valikon **4: Etäisyys/Ikkuna** komennolla

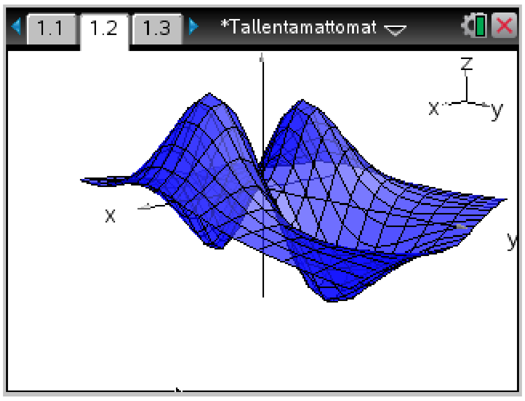
- **1: 3D Ikkunan asetukset...** on asetettu akselivälit seuraaviksi:

  x: –2 … 2; *y*: –3 … 3; *z*: –1 … 1.

- **2: Kuvasuhde** on asetettu akseleiden suurennussuhteet seuraavasti:



Kuvasta otettu ympäröivä laatikko pois, kierretty ja suurennettu.

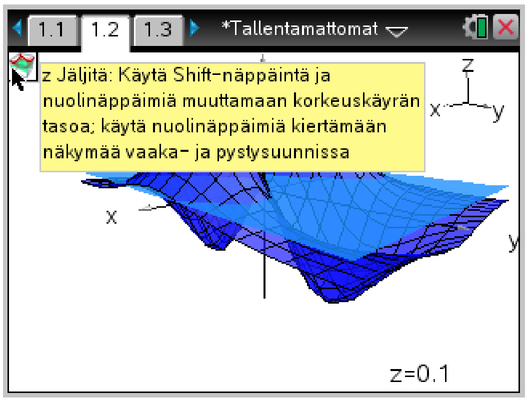


♦

menu-valikon komennolla **5: Jäljitys >> 1: z Jäljitä** voidaan tutkia pinnan korkeuskäyriä. Laskin piirtää tällöin kuvaan *xy*-tason suuntaisen tason korkeudelle, jonka *z*-koordinaatti näkyy näytön oikeassa alareunassa. Tason korkeutta voidaan muuttaa pitämällä ⇧shift-näppäin pohjassa ja painelemalla nuolinäppäimiä ▲ ja ▼. Jäljityksen asetuksia voi muuttaa saman valikon komennolla **2: Jäljitysasetukset...** Jäljityksen voi lopettaa esc-painikkeella.

ESIMERKKEJÄ

2. Tutkitaan edellisen esimerkin pinnalla jäljitystoimintoa. Annetaan menu-valikon komennolla **5: Jäljitys >> 1: z Jäljitä** ja muutetaan *xy*-tason suuntaisen tason korkeutta.



Kuvassa on myös ohjeteksti näkyvissä.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Piirrä seuraavat pinnat

   a) $z=\dfrac{\sin x \cos y}{1+x^2+y^2}$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$, $y\in[-2\pi, 2\pi]$

   b) $z=\sin x \sin y$, $x\in[-2\pi, 2\pi]$, $y\in[-2\pi, 2\pi]$

   c) $z=\cos\left(x^2+y^2\right)e^{-0{,}2\left(x^2+y^2\right)}$, $x\in[-3{,}3]$, $y\in[-3{,}3]$

   d) $z=\dfrac{1}{0{,}3+x^2+y^2}-\dfrac{1}{0{,}2+(x-0{,}6)^2+y^2}$, $x\in[-2{,}3]$, $y\in[-2{,}2]$

6.3.2 Parametriesitys

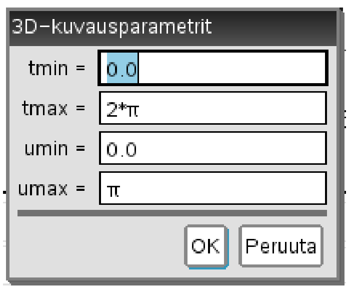
Pinnan parametriesitys on muotoa

$$\begin{cases} x=x(t,u) \\ y=y(t,u) \\ z=z(t,u) \end{cases},$$

missä $t\in[a,b]$ ja $u\in[c,d]$ ovat parametreja. Pinnan parametriesityksessä koordinaatit *x*, *y* ja *z* on annettu parametrien *t* ja *u* avulla.

Parametriesityksen piirto aloitetaan menu-valikon komennolla **3: 3D kuvaajan syöttö/muokkaus >> 2: Parametrinen**. Tällöin aukeaa näytön alareunaa syöttörivi, jonne parametriesitys syötetään.

Painamalla syöttörivillä olevaa painiketta ···, aukeaa ikkuna, jonne parametrivälit syötetään.



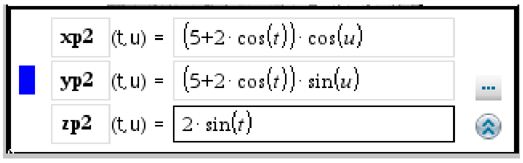
Kuvan käsittelyyn on käytettävissä samat komennot kuin funktioesityksen kuvan käsittelyyn.

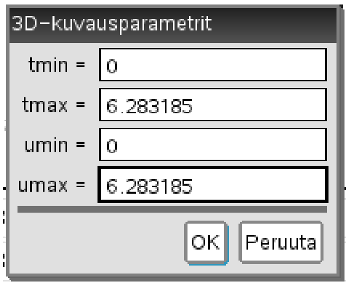
ESIMERKKEJÄ

1. Piirretään toruspinta

$$\begin{cases} x=(5+2\cos t)\cos u \\ y=(5+2\cos t)\sin u \\ z=2\sin t \end{cases}, \text{ missä } \ 0\le t\le 2\pi,\ \ 0\le u\le 2\pi$$

Syötetään parametriesitys ja parametrivälit syöttörivillä, jonne tarvittaessa pääsee tab -näppäimellä.





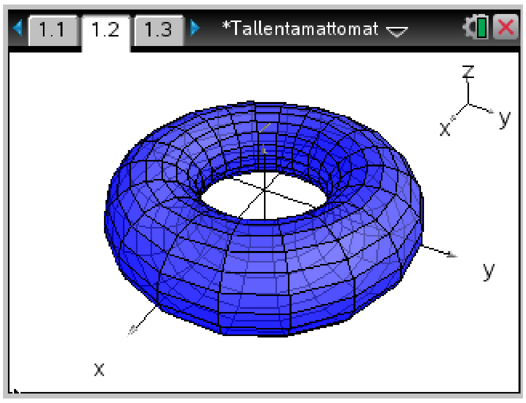
menu -valikon **4: Etäisyys/Ikkuna** komennolla

- **1: 3D Ikkunan asetukset...** on asetettu akselivälit seuraaviksi:

  x: –8 … 8; *y*: –8 … 8; *z*: –2 … 2.
- **2: Kuvasuhde** on asetettu akseleiden suurennussuhteet seuraavasti:

  x: 1; *y*: 1; *z*: 1.

Kuvasta otettu ympäröivä laatikko pois, kierretty ja suurennettu.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Piirrä seuraavat parametrimuodossa annetut pinnat

a) $\begin{cases} x = \cos t \cos u \\ y = \sin t \cos u \\ z = \sin u \end{cases}$, missä $t \in [0, 2\pi]$, $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Mikä pinta on kyseessä?

b) $\begin{cases} x = u \sin t \\ y = u \cos t \\ z = t \end{cases}$, missä $t \in [0, 4\pi]$, $u \in [0; 1]$

c) $\begin{cases} x = t \sin t \cos u \\ y = t \cos t \cos u \\ z = t \sin u \end{cases}$, missä $t \in [0, 2\pi]$, $u \in [0; 1{,}5\pi]$

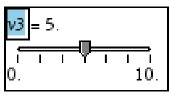
6.4 Animointi

Animaatioita voidaan toteuttaa *Kuvaajat-* tai *Geometria-sovelluksessa*

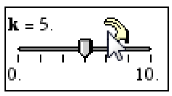
- *funktion kuvaajille*, joihin päästään antamalla -valikon komento **2: Näytä >> 1: Kuvaajat**
- *pinnoille*, joihin päästään antamalla -valikon komento **2: Näytä >> 3: 3D-kuvaus**

Animaatioita tehtäessä on funktion lausekkeessa oltava *animaatioparametri*, joka askeltaa tietyllä askelpituuden yli tietyn välin. Animaatiossa esitetään aina uusi kuva, kun animaatioparametri muuttuu.

Animaatio toteutetaan tuomalla kuvaan *liukusäätimen*, joka löytyy -valikosta **1: Toiminnot** komennolla **Lisää liukusäädin**. Liukusäätimen muuttuja on animaatioparametri.



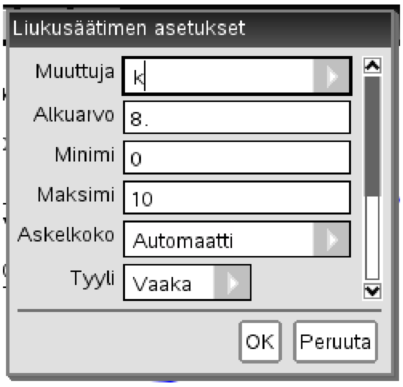
Viemällä kohdistin liukusäätimen sisälle, klikkaamalla kosketuslevyllä siten, että kohdistin muuttuu kämmenen kuvaksi



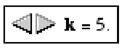
ja painamalla näppäimiä   aukeaa ikkuna,

josta komennolla

- **1: Asetukset** säädetään liukusäätimen asetuksia. Komento aukaisee ikkunan, jossa voi säätää liukusäätimen muuttujan liikkumisväliä ja askelpituutta.



- **2: Kutista** kutistetaan liukusäädin muotoon,



  jossa painikkeita painamalla liukusäätimen muuttuja askeltaa askelpituuden verran ylös- tai alaspäin. Takaisin normaalikokoon pääsee viemällä kohdistin liukusäätimen kohdalle, painamalla näppäimiä ctrl menu ja valitsemalla aukeavasta ikkunasta komennon **2: Maksimoi**.

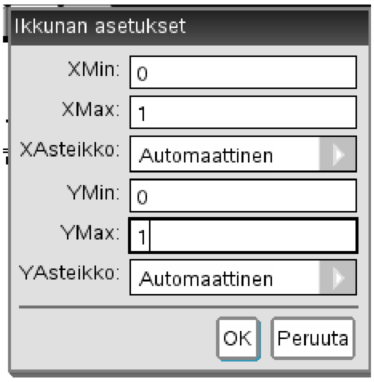
- **3: Animaatio** toteutetaan animaatio. Animaation voi lopettaa näppäimillä ctrl esc tai viemällä kohdistin liukusäätimen kohdalle, painamalla näppäimiä ctrl menu ja valitsemalla aukeavasta ikkunasta komennon **3: Pysäytä animaatio**.

ESIMERKKEJÄ

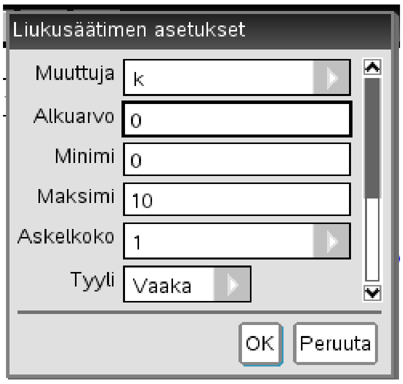
1. Tutkitaan funktion $f(x)=x^k$, $x\in[0,1]$ kuvaajaa, kun parametri k saa kokonaislukuarvot väliltä 1 … 10.

   Syötetään funktio piirron syöttörivillä

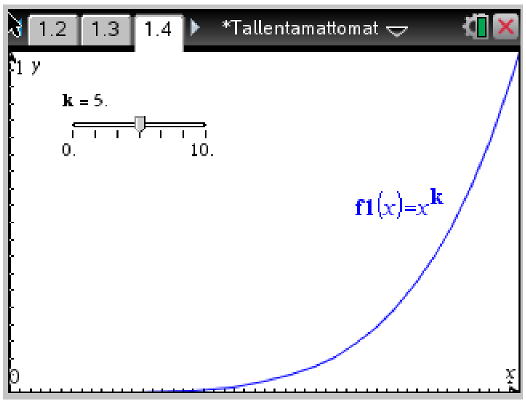
ja asetetaan piirtoväli menu-valikon komennolla **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset** seuraavasti:



Tuodaan kuvaan liukusäädin menu-valikon komennolla **1: Toiminnot >> B: Lisää liukusäädin** ja asetetaan liukusäätimen muuttujaksi *k*. Asetetaan liukusäätimen asetukset kuvan mukaisiksi.



Nyt voidaan tutkia potenssin *k* vaikutusta funktion kuvaajaan liikuttamalla liukua tai animoimalla. Jos liukusäätimen kutistaa, niin on helppo hiirellä klikkailemalla tutkia potenssin *k* vaikutusta.



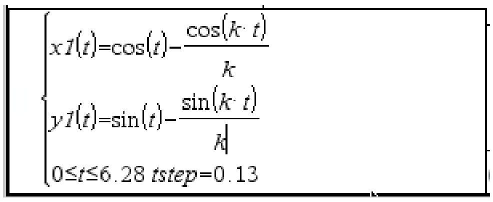
♦

2. Tutkitaan käyrän

$$\begin{cases} x = \cos t - \dfrac{\cos(k\,t)}{k} \\ x = \sin t - \dfrac{\sin(k\,t)}{k} \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

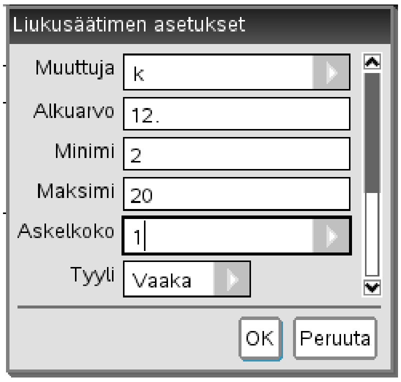
käyttäytymistä parametrin $k \geq 2$ eri kokonaislukuarvoilla[1].

Siirrytään parametrimuotoisen käyrän piirtoon menu-valikon komennolla **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus** >> **3: Parametrinen** ja syötetään käyrän parametriesitys piirron syöttörivillä.



Tuodaan kuvaan liukusäädin menu-valikon komennolla **1: Toiminnot** >> **B: Lisää liukusäädin** ja asetetaan liukusäätimen muuttujaksi *k*. Asetetaan liukusäätimen asetukset kuvan mukaisiksi.

[1] Tätä asiaa on käsitelty eri tavalla luvun 6.1.2 esimerkissä.

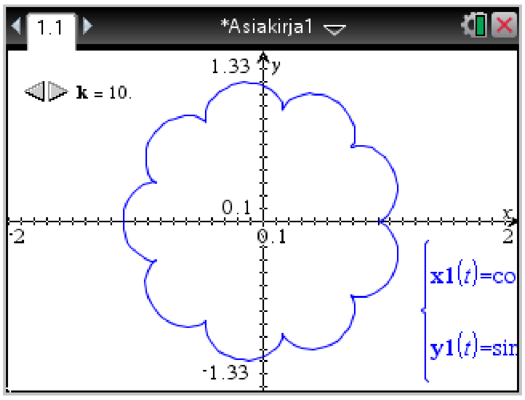


Määritetään kuvan ikkuna-asetus seuraavasti: Asetetaan ensin menu-valikon komennolla **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** *x*-akselin välille –2 … 2. Sitten annetaan menu-valikon komento **4: Ikkuna >> B: Zoomaa – Neliö**, jolloin akseleilla on sama yksikön pituus.

Kutistetaan liukusäädin ja tutkitaan hiirellä klikkailemalla parametrin *k* vaikutusta.

Havaitaan, että parametrin arvolla *k* käyrä koostuu *k* – 1:stä sileästi kaartuvasta osasta, jotka yhdistyvät toisiinsa terävissä kärjissä. Arvolla $k=2$ käyrä on nimeltään nefroidi.

Kuvassa on piirretty käyrä arvolla $k=10$



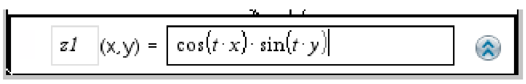
♦

3. Tutkitaan pintaa

$$z=\cos(t\,x)\sin(t\,y)\quad,\quad x\in[-\pi,\pi],\quad y\in[-\pi,\pi]\quad,$$

kun parametri *t* saa arvoja väliltä 1 … 2.

Valitaan piirtomuoto menu-valikon komennolla **2: Näytä >> 3: 3D-kuvaus** ja syötetään funktio piirron syöttörivillä



menu-valikon **4: Etäisyys/Ikkuna** komennolla

- **1: 3D Ikkunan asetukset...** asetetaan akselivälit seuraaviksi:

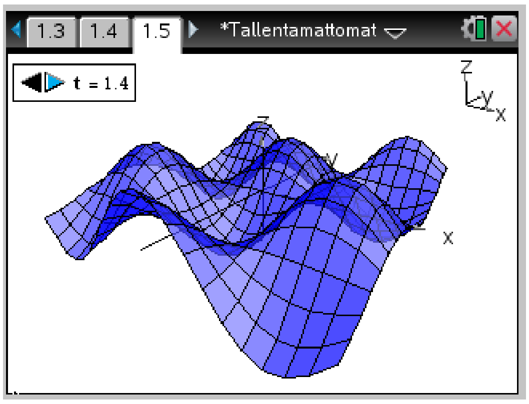
  x: $-\pi \ldots \pi$; y: $-\pi \ldots \pi$; z: $-1 \ldots 1$.

- **2: Kuvasuhde...** asetetaan akseleiden suurennussuhteet seuraavasti:

  x: 1; y: 1; z: 1.

Tuodaan kuvaan liukusäädin, asetetaan liukusäätimen muuttujaksi t ja t:n liikkumisväliksi 0 … 2.

Nyt voidaan tutkia parametrin t vaikutusta pinnan kuvaan liikuttamalla liukua tai animoimalla. Jos liukusäätimen kutistaa, niin voi hiirellä klikkailemalla tutkia parametrin t vaikutusta.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Tutki käyrää

$$\begin{cases} x = \cos u + 0{,}1\cos t \\ y = \sin u + 0{,}1\sin t \end{cases}, \quad t \in [0,\ 2\pi],$$

kun parametri $u \in [0,\ 2\pi]$. Mitä tapahtuu?

2. Animoi pintaa

$$z = \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2} - t\right)}{1+x^2+y^2}, \quad x, y \in [-3\pi,\ 3\pi]$$

kun parametri $t \in [0,\ 2\pi]$. Mitä tilannetta animaatio kuvaa?

7. VEKTORILASKENTA

7.1 Peruslaskutoimitukset

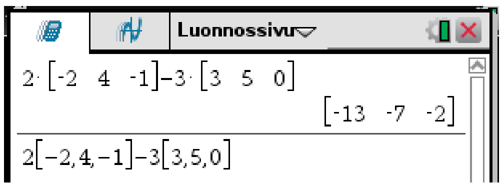
Avaruusvektori $a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ esitetään laskimessa muodossa $[a_1, a_2, a_3]$, tasovektori $a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}$ vastaavasti muodossa $[a_1, a_2]$.

Vektoreiden *yhteen- ja vähennyslasku* tapahtuu normaaliin tapaan käyttäen operaattoreita +, – , näppäimet + –. *Skalaarilla kerrottaessa* voidaan kertomerkki * jättää pois.

Vektoreilla laskettaessa on kaikissa vektoreissa oltava sama määrä koordinaatteja. Puuttuvan koordinaatin paikalle on laitettava 0. Jos vektorin dimensiota eli koordinaattien lukumäärää on muutettava, on vektori syötettävä uudelleen[1]. Syötetyn vektorin koordinaatteja on sen sijaan helppo muuttaa: otetaan vektori syöttöriville ja muutetaan siellä koordinaatteja.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään vektori $\boldsymbol{v}=2(-2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k})-3(3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j})$



Alemmalla rivillä näkyy vektorilausekkeen syöttö. Ylemmällä rivillä on laskun tulos.

Tulos on siis

$$\boldsymbol{v}=-13\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$$

♦

Vektorit ovat laskimessa 1-rivisiä matriiseja. Siksi vektoreiden alkioihin viittaus tapahtuu kahdella hakasuluissa olevalla indeksillä, joista ensimmäinen on 1. Vektorin $\boldsymbol{v}$ k:s alkio on siis $\boldsymbol{v}[1,k]$.

ESIMERKKEJÄ

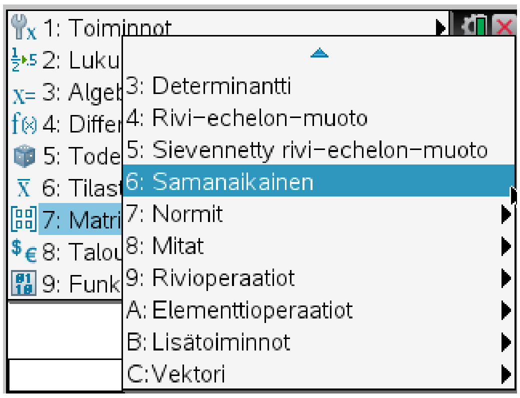
2. Määritetään vektorin $\boldsymbol{v}=1{,}7\boldsymbol{i}-3{,}9\boldsymbol{j}+4{,}7\boldsymbol{k}$ alkiot.

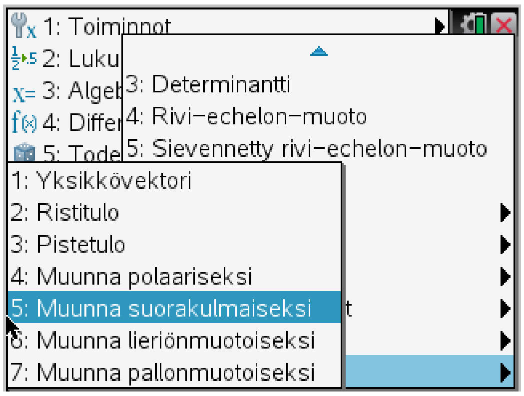
[1] Voi myös käyttää matriisilaskennan **augment**-komentoa **7: Matriisi ja vektori >> 1: Luo >> 8: Lisää**

Viimeisessä kohdassa tulee indeksointivirhe, sillä vektorilla ei ole neljättä koordinaattia.

♦

Vektorilaskentaan liittyviä komentoja löytyy menu -valikosta **7: Matriisi ja vektorit**, erityisesti **C: Vektori**.





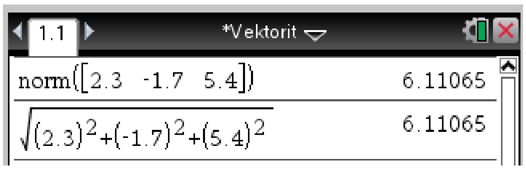
Komennolla

- **7: Matriisi ja vektorit >> 7: Normit >> 1: Normaali** määritetään vektorin *normi*. Komento näkyy syöttörivillä komentona **norm**.
- **7: Matriisi ja vektorit >> C: Vektori >> 1: Yksikkövektori** määritetään vektorin suuntainen *yksikkövektori*. Komento näkyy syöttörivillä komentona **unitV**.

ESIMERKKEJÄ

3. Määritetään vektorin $2{,}3\,\boldsymbol{i}-1{,}7\,\boldsymbol{j}+5{,}4\,\boldsymbol{k}$ normi ja tarkistetaan tulos normin laskukaavalla

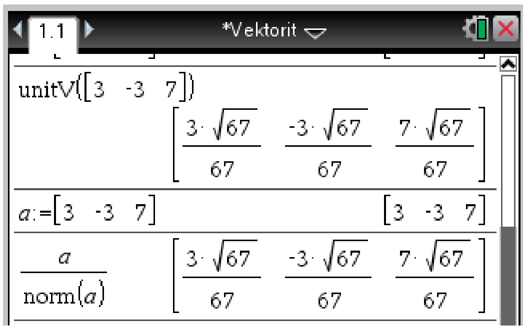
$$\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$



♦

4. Määritetään vektorin $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ suuntainen yksikkövektori $\boldsymbol{a}^{\circ}$ ja tarkistetaan tulos yksikkövektorin laskukaavasta

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a}$$



Tarkistusta varten vektori on sijoitettu muuttujaan *a*.

Yksikkövektori on siis[1]

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{3}{\sqrt{67}}\boldsymbol{i}-\frac{3}{\sqrt{67}}\boldsymbol{j}+\frac{7}{\sqrt{67}}\boldsymbol{k}$$

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä vektori $\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, kun
   $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$.
2. Määritä vektoreiden $\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ ja $-4\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$ resultantin normi

[1] Tässä on supistettu luvulla $\sqrt{67}$.

3. Määritä vektorin $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ kanssa yhdensuuntaiset yksikkövektorit.
4. Vektorin $\boldsymbol{v}$ normi on 12 ja vektori on samansuuntainen vektorin $\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ kanssa. Määritä vektori $\boldsymbol{v}$.

7.2 Vektoreiden väliset tulot

Vektorien välinen

- *skalaaritulo* määritetään komennolla **7: Matriisi ja vektorit** >> **C: Vektori** >> **3: Pistetulo**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **dotP**.
- *vektoritulo* määritetään komennolla **7: Matriisi ja vektorit** >> **C: Vektori** >> **2: Ristitulo**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **crossP**.

Molemmissa komennoissa argumentteina ovat vektorit pilkulla erotettuna.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään vektoreiden $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{b}=-3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ välinen skalaaritulo $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ja vektoritulo $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

Siis

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=7$$

ja

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=11\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+19\boldsymbol{k}$$

♦

2. Määritetään vektoreiden $1{,}2\boldsymbol{i}-3{,}1\boldsymbol{j}+4{,}2\boldsymbol{k}$ ja $2{,}4\boldsymbol{i}-0{,}7\boldsymbol{j}+1{,}8\boldsymbol{k}$ välinen kulma asteina.

Skalaaritulon määritelmän mukaan

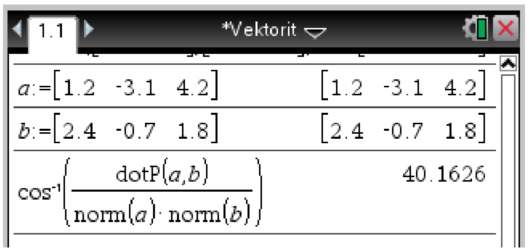
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

Täten vektorien väliselle kulmalle $\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ pätee

$$\cos\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

joten

$$\sphericalangle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}\right)$$



Siis vektoreiden välinen kulma on $40{,}16^{\circ}$.

♦

Laskimella voi laskea hyvin tehokkaasti, kuten seuraavasta esimerkistä ilmenee.

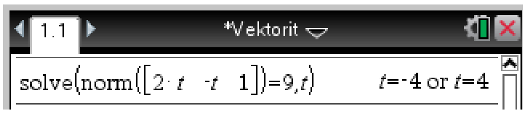
ESIMERKKEJÄ

3. Määritetään, millä muuttujan *t* arvoilla vektorin $2t\,\boldsymbol{i}-t\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ pituus on 9.

   On ratkaistava yhtälö

   $$\|2t\,\boldsymbol{i}-t\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}\|=9$$

   Yhtälö voidaan ratkaista yhdellä komennolla



   Vastaus on siis $t=\pm 4$

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä vektoreiden $5{,}2\,\boldsymbol{i}+4{,}6\,\boldsymbol{j}$ ja $3{,}4\,\boldsymbol{i}-1{,}9\,\boldsymbol{j}+2{,}1\,\boldsymbol{k}$ välinen kulma.
2. Vektorin $\boldsymbol{a}$ kohtisuora projektio vektorille $\boldsymbol{b}$ on vektori

   $$\boldsymbol{a}_b=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}\boldsymbol{b} \quad .$$

   Määritä vektorin $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ kohtisuora projektio vektorille $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$.
3. Määritä vektoreiden $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ja $-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$ välinen vektoritulo.
4. Määritä ne yksikkövektorit, jotka ovat kohtisuorassa vektoreita $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ja $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ vastaan.
5. Suunnikkaan sivuina ovat vektorit $1{,}1\boldsymbol{i}-2{,}2\boldsymbol{j}-3{,}3\boldsymbol{k}$ ja $-3{,}2\boldsymbol{i}-4{,}1\boldsymbol{j}+2{,}0\boldsymbol{k}$. Määritä suunnikkaan pinta-ala.
6. Tetraedrin kärjet ovat pisteissä $(3,3,0)$, $(4,-2,1)$, $(5;2{,}7;2{,}7)$ ja $(0,1,5)$. Määritä tetraedrin tilavuus.

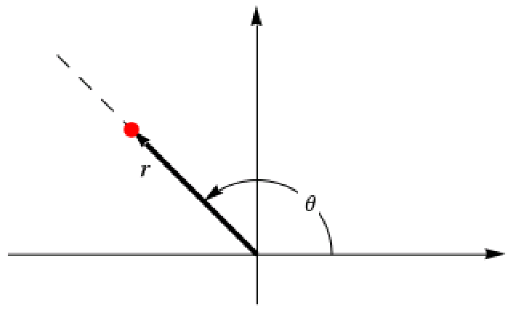
7.3 Koordinaatistomuunnokset

Tässä luvussa esitetään vektoreiden koordinaatistomuunnoksia. Koska piste voidaan samaistaa paikkavektorinsa kanssa, ovat samat muunnokset myös avaruuden pisteiden koordinaattimuunnoksia. Tällöin esim. kolmiulotteisen avaruuden piste (x, y, z) samaistetaan paikkavektorinsa $[x, y, z]$ kanssa.

7.3.1 Tasovektorin napakoordinaattiesitys

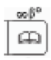
Tasovektorin napakoordinaattiesitys on $r\angle\theta$, missä

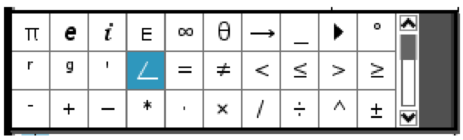
- r on vektorin pituus
- θ on vektorin vaihekulma



Laskimessa vektorin napakoordinaattiesityksen muoto on

$[r, \angle\theta]$

Esityksessä oleva kulmamerkki löytyy näppäimillä   aukeavasta ikkunasta.



Tasovektorin napakoordinaattiesitys muodostetaan komennolla **7: Matriisi ja vektorit >> C: Vektori >> 4: Muunna polaariseksi**, joka laitetaan *tasovektorin perään*. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **▶Polar**.

Muunnos toiseen suuntaan[1] tapahtuu kirjoittamalla vektori napakoordinaattimuodossa ja painamalla näppäintä  tai näppäimiä  .

ESIMERKKEJÄ

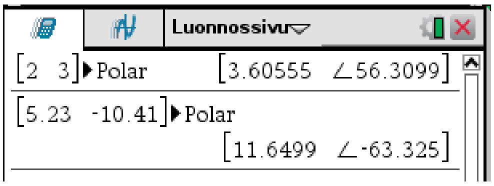
1. Määritetään seuraavien vektoreiden napakoordinaattiesitykset.

---

[1] Jos laskimen vektorimuoto on **Suorakulma**.

$2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$

$5{,}23\boldsymbol{i}-10{,}41\boldsymbol{j}$



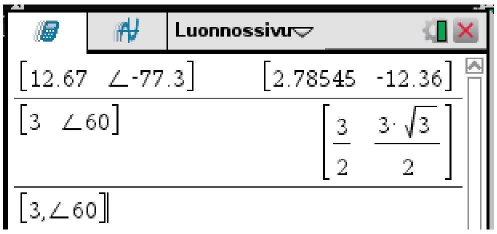
Siis ensimmäisen vektorin pituus on 3,60555 ja vaihekulma 56,3099°.

♦

2. Määritetään seuraavien napakoordinaateissa annettujen vektoreiden esitykset suorakulmaisissa koordinaateissa.

   $12{,}67\angle\text{-}77{,}3°$

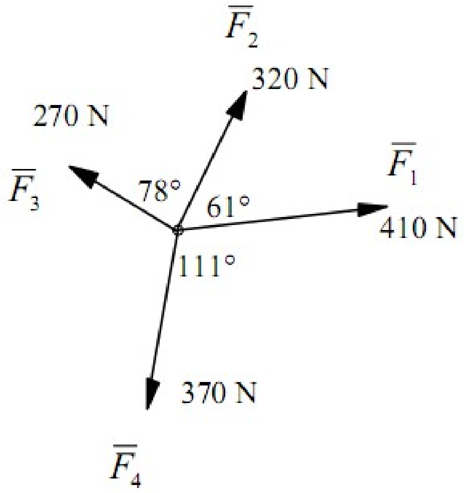
   $3\angle 60°$



Siis jälkimmäisen vektorin koordinaattiesitys on $\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{j}$. Alinna on jälkimmäisen vektorin syöttö napakoordinaateissa.

♦

3. Määritetään kuvassa esitettyjen voimien resultantin itseisarvo ja suunta.



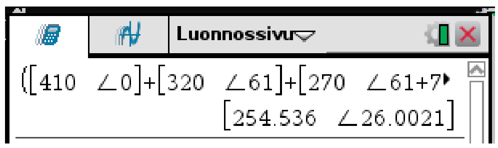
Voimien resultantti on voimien summa

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$$

Kiinnitetään koordinaatisto asettamalla positiivinen *x*-akseli voiman 410 N suuntaiseksi. Esitetään voimat napakoordinaattimuodossa ja lasketaan niiden summa. Muunnetaan tulos napakoordinaattimuotoon.

Laskimen syöttö on seuraavanlainen

[410, ∠0]+[320, ∠61]+[270, ∠61+78]+[370, ∠-111] ►**Polar**



Tulos on siis 254,536∠26,0021°, joten voimien resultantin itseisarvo on 250 N ja suunta 26° voimasta 410 N vastapäivään.

♦

TEHTÄVIÄ

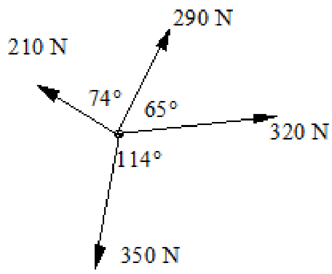
1. Määritä seuraavien vektoreiden napakoordinaattiesitykset.

   a) $2{,}7\,\boldsymbol{i} + 7{,}5\,\boldsymbol{j}$ b) $-3{,}6\boldsymbol{i} - 8{,}9\,\boldsymbol{j}$ c) $4{,}8\,\boldsymbol{i} - 1{,}7\,\boldsymbol{j}$

2. Määritä seuraavien napakoordinaattimuodossa annettujen vektoreiden esitykset suorakulmaisissa koordinaateissa.

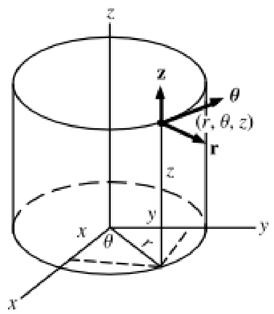
   a) 4.67∠117° b) 10,52∠-123° c) 12,73∠154°

3. Määritä kuvan voimien resultantin itseisarvo ja suunta.



7.3.2 Avaruusvektorin koordinaattiesityksiä

Avaruusvektorin $x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+z\,\boldsymbol{k}$ *sylinterikoordinaattiesitys* on (r, ∠θ, z), missä r ja θ ovat tasovektorin $x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}$ napakoordinaatit ja z on vektorin z-koordinaatti.



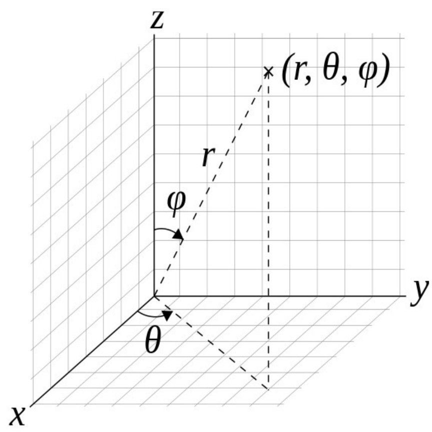
Laskimessa vektorin sylinterikoordinaattiesitys on muotoa

[r, ∠θ, z]

Avaruusvektorin sylinterikoordinaattiesitys muodostetaan komennolla **7: Matriisi ja vektorit** >> **C: Vektori** >> **4: Muunna lieriönmuotoiseksi**, joka laitetaan avaruusvektorin perään. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **►Cylind**.

Avaruusvektorin *pallokoordinaattiesitys* on r∠θ∠φ, missä

- r on vektorin pituus
- θ on vektorin xy-tasolle muodostetun kohtisuoran projektion vaihekulma
- φ on vektorin ja positiivisen z-akselin välinen kulma.



Laskimessa vektorin *pallokoordinaattiesitys* on muotoa

[*r*, ∠θ, ∠φ]

Avaruusvektorin pallokoordinaattiesitys muodostetaan komennolla **7: Matriisi ja vektorit >> C: Vektori >> 4: Muunna pallonmuotoiseksi**, joka laitetaan avaruusvektorin perään. Komento näkyy syöttörivillä muodossa ►**Sphere**.

Muunnokset toiseen suuntaan[1] tapahtuvat kirjoittamalla vektori sylinteri- tai pallokoordinaattimuodossa ja painamalla näppäintä enter tai näppäimiä ctrl enter.

Esityksissä olevat kulmamerkki löytyy näppäimillä ctrl ∞β° aukeavasta ikkunasta.

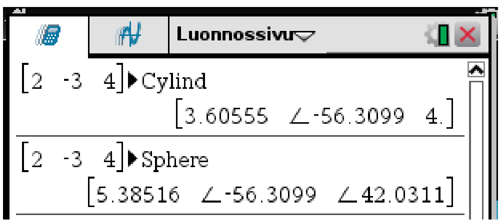
Seuraavissa esimerkeissä laskimen kulma-asetus on **Aste**.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään vektorin

   $$2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$$

   sylinteri- ja pallokoordinaattiesitykset.



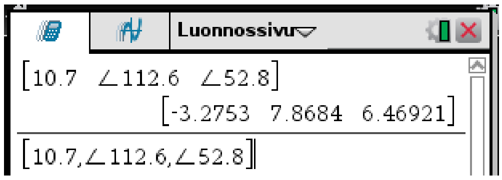
◆

2. Määritetään pallokoordinaateissa annetun vektorin

[1] Jos laskimen vektorimuoto on **Suorakulma**.

$$10{,}7\angle 112{,}6^\circ\ \angle 52{,}8^\circ$$

esitys suorakulmaisissa koordinaateissa.



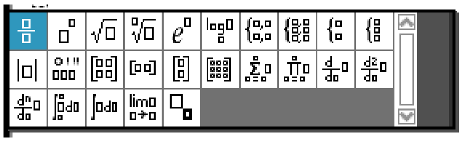
Siis vektori on $-3{,}2753\,\boldsymbol{i}+7{,}8684\,\boldsymbol{j}+6{,}46921\,\boldsymbol{k}$. Yllä on näkyvissä myös syöttö laskimeen.

♦

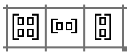
8. MATRIISILASKENTA

8.1 Matriisien syöttäminen

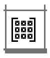
Matriisi voidaan syöttää avaamalla lausekemallit näppäimellä ja valitsemalla sopiva matriisimalli.



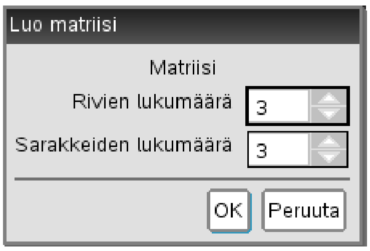
Valmiita kiinteitä matriisimalleja ovat



Yleinen matriisimalli on



jolloin aukeaa ikkuna, johon laitetaan matriisin rivien ja sarakkeiden lukumäärät.

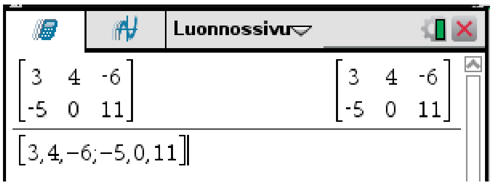


Matriisimallissa paikasta toiseen voi hyppiä näppäimellä tab.

Matriiseja voi syöttää myös kirjoittamalla matriisin alkiot hakasulkujen, ctrl (, sisään pilkulla erotettuna ja käyttämällä rivinvaihtomerkkinä puolipistettä. Puolipiste löytyy ikkunasta, joka aukeaa näppäimellä ?!▸.
Vaakavektoreita voi helposti syöttää tällä tavalla.

ESIMERKKEJÄ

1. Kuvassa alarivillä on ylärivillä olevan matriisin syöttö. Kun painaa näppäintä enter, muuttuu matriisi ylärivin mukaiseksi.

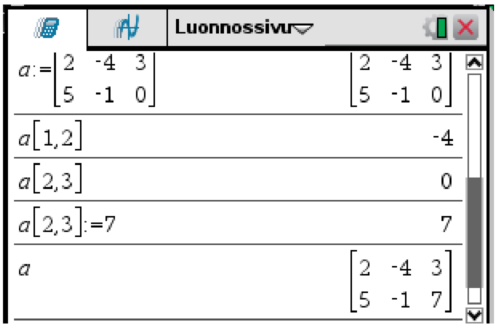


♦

Matriisin alkioihin viitataan kahdella hakasuluissa olevalla indeksillä, joista ensimmäinen on ilmoittaa rivin ja jälkimmäinen sarakkeen, jolta alkio löytyy. Matriisin A rivillä i ja sarakkeella j oleva alkio on siis $A[i\,,\,j]$. Matriisin alkio voidaan muuttaa sijoituskäskyllä.

ESIMERKKEJÄ

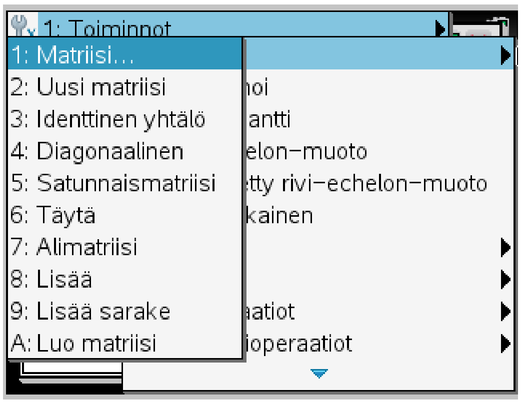
2. Matriisin alkioihin viittauksia.



Matriisin alkio on muutettu sijoituskäskyllä.

♦

Erityyppisten matriisien luontiin käytettäviä komentoja löytyy menu-valikosta **7: Matriisi ja vektori >> 1: Luo**



Näistä komento

- **3: Identtinen yhtälö**[1] luo yksikkömatriisin. Komennossa annetaan matriisin rivien lukumäärä. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **identity**.
- **4: Diagonaalinen** luo lävistäjämatriisin. Komennossa annetaan matriisin lävistäjäalkiot listana eli aaltosulkujen sisällä pilkulla erotettuna. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **diag**.
- **5: Satunnaismatriisi** luo matriisin, jonka alkiot ovat satunnaisia kokonaislukuja väliltä -9 … 9. Komennossa annetaan matriisin rivien ja sarakkeiden lukumäärä pilkulla erotettuna. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **randMat**. Tätä komentoa käyttäen on helppo kokeilua varten luoda matriiseja.
- **7: Alimatriisi** luo matriisin alimatriisin. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **subMat**. Komennon muoto on

  subMat(matriisi, alkurivi, alkusarake, loppurivi, loppusarake)

  Komento muodostaa matriisin **matriisi** alimatriisin, jossa rivit ovat välillä alkurivi … loppurivi ja sarakkeet välillä alkusarake … loppusarake. Oletusarvot näille ovat

  alkurivi: 1

  alkusarake: 1

  loppurivi: viimeinen rivi

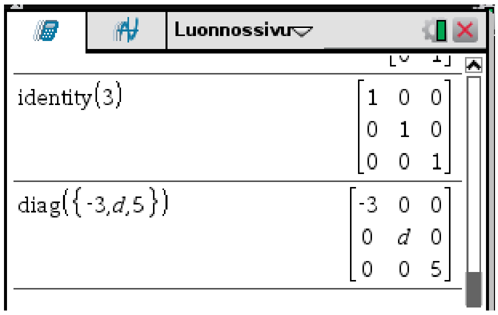
  loppusarake: viimeinen sarake
- **8: Lisää** yhdistää kaksi matriisia peräkkäin. Matriisien rivien lukumäärän on oltava sama. Komennossa annetaan matriisit pilkulla erotettuna. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **augment**.
- **9: Lisää sarake** yhdistää kaksi matriisia alakkain. Matriisien sarakkeiden lukumäärän on oltava sama. Komennossa annetaan matriisit pilkulla erotettuna. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **colAugment**.

ESIMERKKEJÄ

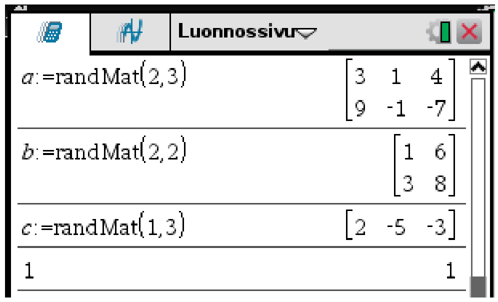
1. Seuraavassa on kokeiltu eri matriisien luontikomentoja.

[1] Komennon nimi on harhaanjohtava.

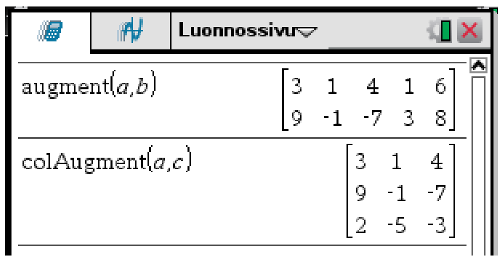
Luodaan yksikkömatriisi ja lävistäjämatriisi.



Luodaan satunnaismatriiseja.



Näitä matriiseja käyttäen yhdistetään matriiseja peräkkäin ja alakkain.



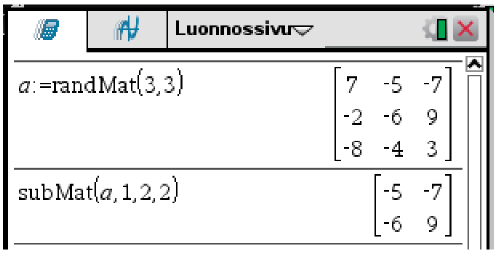
♦

Komento

- **subMat(A, 1, k, , k)** muodostaa matriisin **A** *k*:nnen sarakevektorin
- **subMat(A, k, 1, k)** muodostaa matriisin **A** *k*:nnen rivivektorin

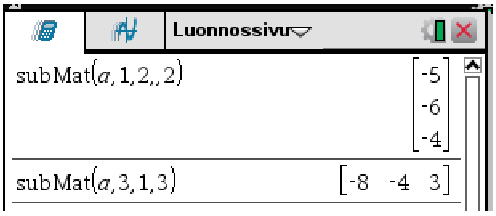
ESIMERKKEJÄ

2. Muodostetaan satunnaismatriisi ja sen alimatriisi, joka kostuu riveistä 1 ... 2 ja sarakkeista 2 … 3.



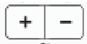
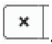
♦

3. Muodostetaan edellisen satunnaismatriisin 2. sarakevektori ja 3. rivivektori.



♦

8.2 Matriisien peruslaskutoimitukset

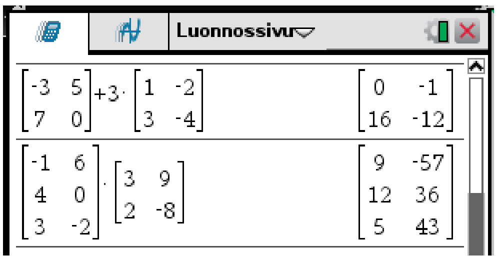
Matriisien yhteen-, vähennys- ja kertolasku tapahtuu normaaliin tapaan näppäimillä  ja . Kertolaskussa kertomerkin voi jättää poiskin. Potenssiin korottaminen tapahtuu näppäimillä . Matriisin käänteismatriisi on potenssi -1.

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan matriisilausekkeet

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$$



♦

2. Ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x+2y-2z=2 \\ 3x+y+4z=-4 \\ -2x+2y-3z=5 \end{cases}$$

kääntеismatriisimenetelmällä.

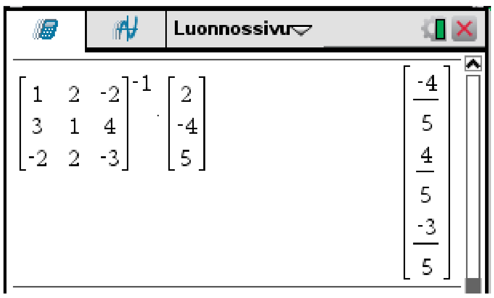
Muodostetaan yhtälöryhmän matriisimuoto

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

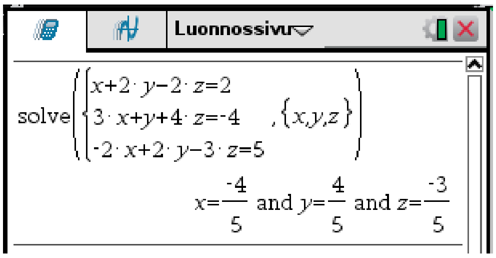
Lasketaan tämä.



Ratkaisu on

$$\begin{cases} x=-\dfrac{4}{5} \\ y=\dfrac{4}{5} \\ z=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Tarkistetaan tämä vielä normaalilla yhtälöryhmän ratkaisukomennolla.



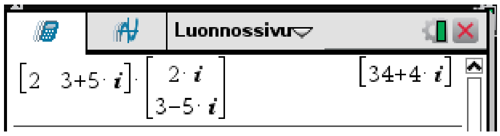
♦

Matriisin alkiot voivat olla reaali- tai kompleksilukuja tai kirjaimia.

ESIMERKKEJÄ

3. Lasketaan matriisi

$$\begin{bmatrix} 2 & 3+5i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i \\ 3-5i \end{bmatrix}$$



Edellä i on imaginaariyksikkö, joka löytyy painamalla näppäintä π▸.

♦

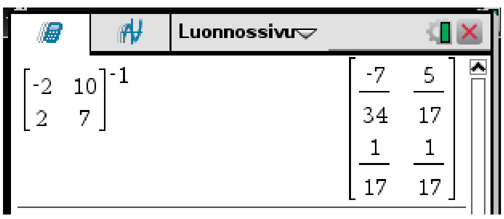
Matriiseja voi tietenkin tallentaa muuttujiin.

ESIMERKKEJÄ

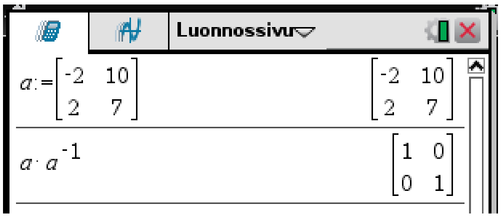
4. Lasketaan matriisin

$$\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi.



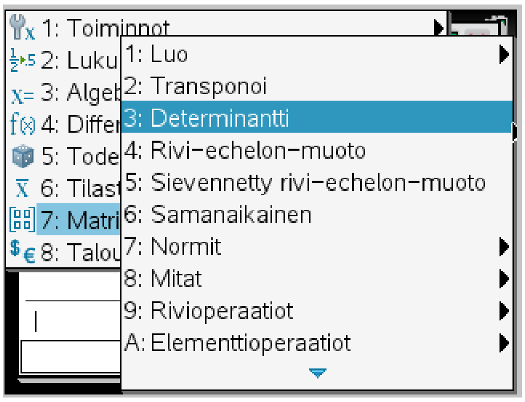
Tarkistetaan asia laskemalla matriisin ja sen käänteismatriisin tulo.



Tulo on siis yksikkömatriisi.

♦

Matriisilaskentaan liittyviä komentoja löytyy menu-valikosta **7: Matriisi ja vektori**.



Täältä löytyy

- determinantin laskeminen **3: Determimantti**, joka näkyy komentona **det**.
- transponointi **2: Transponoi**. Tämä tulee matriisin perään ja näkyy yläindeksinä T.

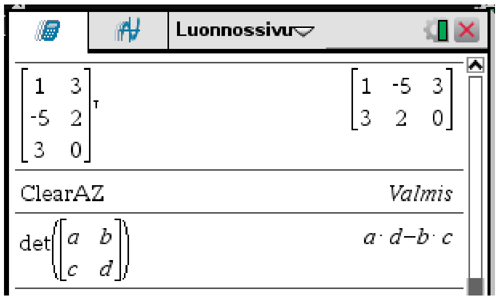
ESIMERKKEJÄ

5. Lasketaan transpoosi

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

ja determinantti

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$



Edellä on ennen determinantin laskemista varmuuden vuoksi tyhjennetty muuttujat a … z menu-valikon komennolla **1: Toiminnot >> Tyhjennä a-z...**

♦

TEHTÄVIÄ

1. Laske seuraavat matriisilausekkeet:

a) $$\left(\begin{bmatrix}2 & -5\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

b) $$\left(\begin{bmatrix}2 & -3 & -5\\ 3 & 3 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 2\\ 0 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2 & 7\\ -2 & 4 & 10\end{bmatrix}\right)^{T}$$

2. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases}x+4y+2z=10\\ 4x-3y=6\\ 2x+2y+2z=14\end{cases}$$

kääntеismatriisimenetelmällä. Tarkista tulos ratkaisemalla yhtälö normaalilla tavalla.

3. Millä x:n arvoilla matriisi

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & x\\ x & 5 & 3\\ 2 & 1 & -6\end{bmatrix}$$

on singulaarinen?

8.3 Ominaisarvot ja ominaisvektorit

Ominaisarvot ja ominaisvektorit määritellään seuraavasti:

Luku λ on neliömatriisin *A ominaisarvo*, jos olemassa nollasta eroava vektori $\boldsymbol{v}$ siten, että

$$A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \quad .$$

Vektoria $\boldsymbol{v}$ sanotaan *ominaisarvoon λ liittyväksi ominaisvektoriksi*.

Ominaisarvot ja ominaisvektorit ovat kompleksilukuja, joten ne voivat olla myös imaginaarisia.

Matriisin ominaisarvoja ja ominaisvektoreita määritettäessä laskimen kompleksilukuasetuksen tulee olla **Suorakulma** tai **Polaarinen**. Seuraavissa esimerkeissä se on **Suorakulma**.

menu-valikon **7: Matriisi ja vektori >> B: Lisätoiminnot** komento

- **4: Ominaisarvot** määrittää neliömatriisin ominaisarvot ja esittää ne listana. Komento näkyy syöttörivillä komentona **eigVl**.
- **5: Ominaisvektorit** määrittää neliömatriisin ominaisvektorit ja esittää ne matriisin sarakkeina, jossa *i*:s sarake on ominaisarvolistan *i*:nteen alkioon liittyvä ominaisvektori. Laskin normeeraa ominaisvektorit yksikkövektoreiksi. Komento näkyy syöttörivillä komentona **eigVc**.

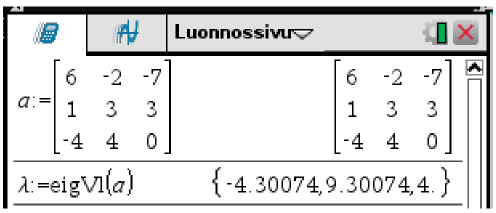
ESIMERKKEJÄ

1. Muodostetaan matriisin

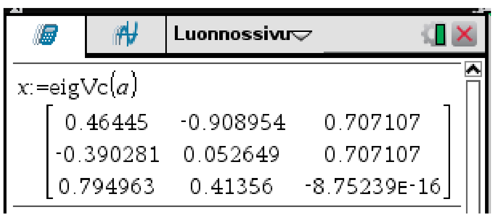
$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -7 \\ 1 & 3 & 3 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

Sijoitetaan tulokset muuttujiin seuraavaa esimerkkiä varten.



Ominaisarvot ovat siten $-4{,}30074$; $9{,}30074$; 4 .



Ominaisvektorit ovat seuraavat:

Ominaisarvoon $-4{,}30074$ liittyvä ominaisvektori: $\begin{bmatrix} 0{,}46445 \\ -0{,}390281 \\ 0{,}794963 \end{bmatrix}$

Ominaisarvoon $9{,}30074$ liittyvä ominaisvektori: $\begin{bmatrix} -0{,}908954 \\ 0{,}052649 \\ 0{,}41356 \end{bmatrix}$

Ominaisarvoon 4 liittyvä ominaisvektori: $\begin{bmatrix} 0{,}707107 \\ 0{,}707107 \\ 0 \end{bmatrix}$

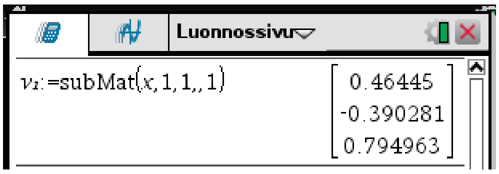
♦

Edellisessä esimerkissä laskimen antaman viimeisen ominaisvektorin kolmas koordinaatti $-8{,}75238 \cdot 10^{-16}$ tulkittiin luvuksi 0. Numeerisen laskennan tulos on melkein aina tarkan arvon likiarvo. Luku nollakin esitetään siten likiarvona. Tilanteesta riippuen tällainen itseisarvoltaan pieni arvo on osattava tulkita nollaksi[1].

ESIMERKKEJÄ

2. Jatketaan edellistä esimerkkiä: Tarkistetaan määritelmään perustuen, että ensimmäinen sarakevektori on ensimmäiseen ominaisarvoon liittyvä.

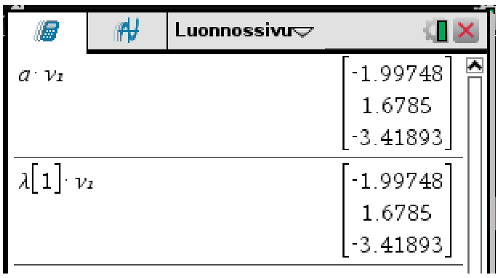
   Muodostetaan ensimmäinen sarakevektori



   Lasketaan yhtälön

   $$A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$$

   vasen ja oikea puoli tässä tapauksessa[2].



   Ne ovat samat, kuten pitääkin olla.

♦

[1] Tähän tietenkin liittyy pieni riski: mitä jos luku todella on itseisarvoltaan pieni nollasta eroava luku. Tällöin luku 0 on kuitenkin luvun hyvä likiarvo.

[2] Listan alkioihin viitataan yhdellä indeksillä. Listoja käsitellään omassa luvussaan.

Neliömatriisin *A karakteristinen polynomi* on determinantti

$$P(x) = \det(A - xI) \quad ,$$

missä *I* on yksikkömatriisi.

Karakteristinen polynomi muodostetaan menu-valikon komennolla **7: Matriisi ja vektori** >> **B: Lisätoiminnot** >> **6: Karakteristinen polynomi**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **char-Poly**. Komennon muoto on

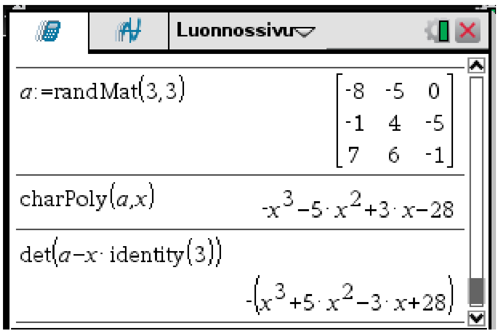
charPoly(A, x),

missä

- **A** on matriisi
- **x** on muuttuja.

ESIMERKKEJÄ

3. Muodostetaan satunnaismatriisin karakteristinen polynomi ja tarkistetaan määritelmään perustuen, että se on oikein.

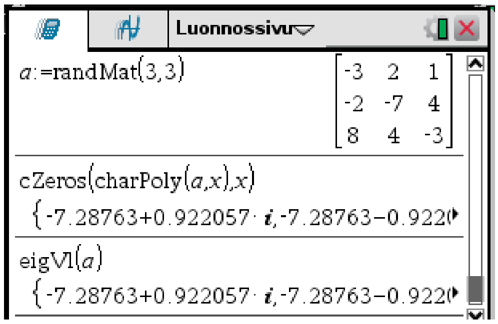


♦

Matriisin ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin nollakohdat.

ESIMERKKEJÄ

4. Muodostetaan satunnaismatriisi ja määritetään sen ominaisarvot karakteristisen polynomin nollakohtina ja komennolla **eigVl**.



Molemmat antavat saman tuloksen ominaisarvoiksi. Ominaisarvot ovat

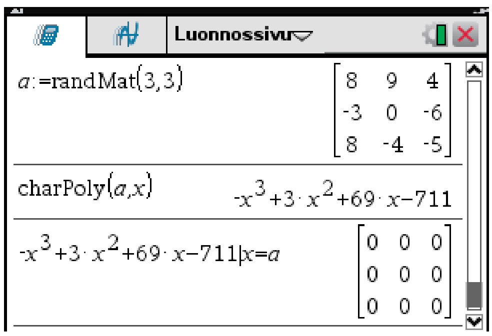
$$-7{,}28763 \pm 0{,}92205\, i \quad \text{ja} \quad 1{,}57525$$

♦

Cayleyn-Hamiltonin lauseen mukaan jokainen neliömatriisi toteuttaa oman karakteristisen yhtälönsä ts. karakteristisen polynomin arvo on nollamatriisi, kun muuttujan paikalle sijoitetaan matriisi.

ESIMERKKEJÄ

5. Muodostetaan satunnaismatriisi ja tarkistetaan Cayley-Hamiltonin lause.



Toteutuu.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot ja ominaisvektorit.

2. Jatka esimerkkiä 2: tarkista, että muut sarakevektorit ovat ominaisvektoreita.

9. DIFFERENTIAALI- JA INTEGRAALILASKENTA

9.1 Raja-arvot

Raja-arvo lasketaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> 4: Raja-arvo** tai valitsemalla raja-arvon laskentamalli näppäimellä aukeavasta ikkunasta. Raja-arvon laskentamalli on

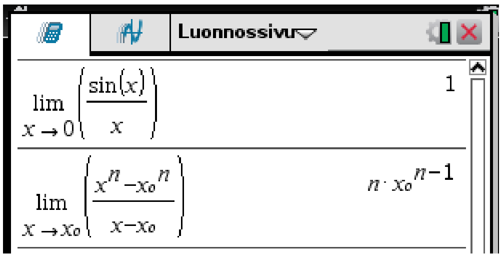
$$\lim_{\square \to \square^{\square}} (\square)$$

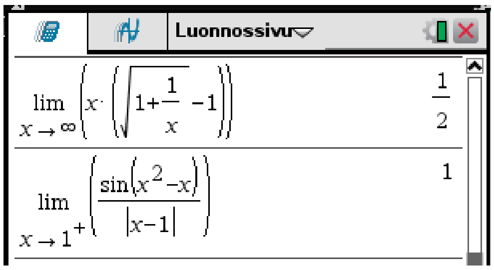
Raja-arvoa $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ laskettaessa jätetään laskentamallin lim-sanan oikeassa alakulmassa oleva kohta täyttämättä. Toispuoleisia raja-arvoja $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ ja $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ laskettaessa laitetaan lim-sanan oikeassa alakulmassa olevaan kohtaan merkki + tai –.

Raja-arvojen laskennassa usein esiintyvä ∞ löytyy näppäimillä ctrl aukeavasta ikkunasta.

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan raja-arvoja.





♦

TEHTÄVIÄ

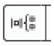
Laske raja-arvot

1. a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$ b) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x^2+11x-4}{x^2-3x-28}$

2. a) $\lim\limits_{x\to 1} \left[(x-1)\cos\left(\dfrac{2}{3x-3}\right)\right]$ b) $\lim\limits_{\Delta\to 0} \dfrac{\sqrt{x+\Delta}-\sqrt{x}}{\Delta}$

3. a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x}{2}}{x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 9-} \dfrac{|x-9|}{x-3\sqrt{x}}$

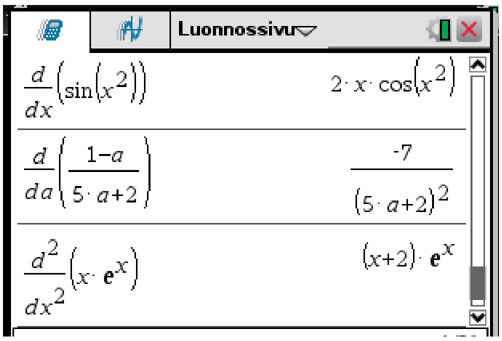
9.2 Derivointi

Derivaatta lasketaan -valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> 1: Derivaatta**. Näppäimellä  aukeavasta ikkunasta voidaan valita ensimmäisen, toisen ja *n*:nnen derivaatan laskentamallit.

Derivaatan laskennan pikanäppäimet ovat  .

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan derivaattoja.



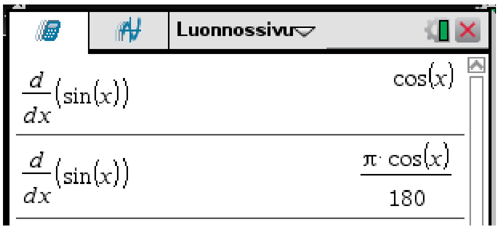
♦

Derivoitaessa laskimen kulma-asetuksen on oltava **Radiaani**.

ESIMERKKEJÄ

2. Lasketaan derivaatta $\dfrac{d}{dx}\sin x$

   Ylemmässä laskussa kulma-asetus on **Radiaani**, alemmassa **Aste**. Alempi tulos on väärin!

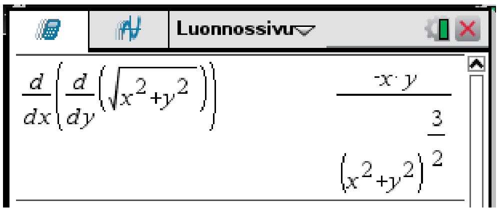


♦

Osittaisderivaatat lasketaan samoin kuin tavalliset derivaatat. Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat lasketaan laittamalla derivaattaoperaattoreita peräkkäin.

ESIMERKKEJÄ

3. Lasketaan $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y}\sqrt{x^2+y^2}$



♦

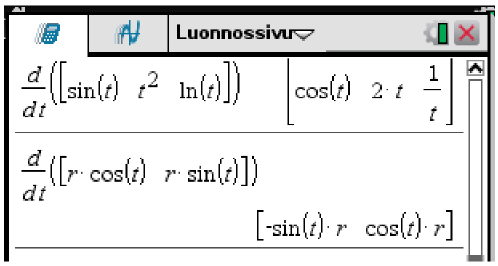
Laskimella voi laskea myös vektoriarvoisen funktion derivaattoja.

ESIMERKKEJÄ

4. Lasketaan vektoriarvoisten funktioiden

$$\boldsymbol{f}(t)=\sin t\,\boldsymbol{i}+t^2\,\boldsymbol{j}+\ln t\,\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{g}(t)=r\cos t\,\boldsymbol{i}+r\sin t\,\boldsymbol{j}$$

derivaatat



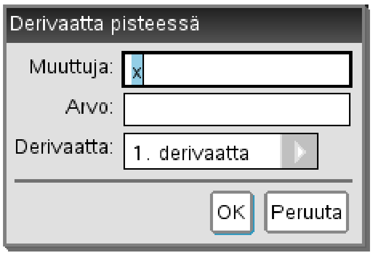
Siis derivaatat ovat

$$f'(t) = \cos t\, \boldsymbol{i} + 2t\, \boldsymbol{j} + \frac{1}{t} \boldsymbol{k}$$

$$g'(t) = -r \sin t\, \boldsymbol{i} + r \cos t\, \boldsymbol{j}$$

♦

Funktion derivaatta tietyssä pisteessä voidaan määrittää menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> 2: Derivaatta pisteessä...** Tällöin aukeaa ikkuna, jossa annetaan muuttujan nimi ja arvo sekä derivaatan kertaluku.



Derivoitavan funktion lauseke laitetaan syöttöriville avautuvaan laskentamalliin. Kyseessä on normaali arvon laskenta rajoitusoperaattorilla, joka löytyy näppäimillä ctrl = avautuvasta ikkunasta.

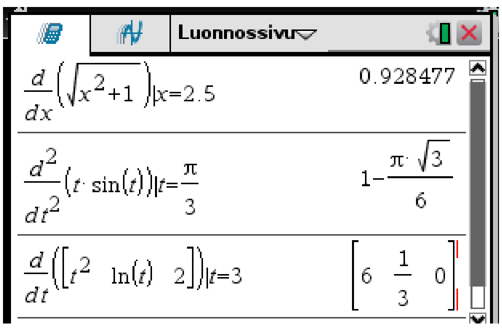
ESIMERKKEJÄ

5. Lasketaan funktion derivaattoja tietyissä pisteissä.

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} \quad \text{, kun} \quad x = 2{,}5$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(t \sin(t)) \quad \text{, kun} \quad t = \frac{\pi}{3}$$

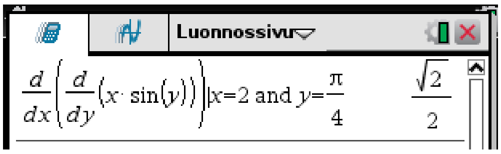
$$\frac{d}{dt}(t^2 \boldsymbol{i} + \ln t\, \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \quad \text{, kun} \quad t = 3$$



♦

6. Lasketaan

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(x \sin y) \quad \text{kun} \quad x=2, y=\frac{\pi}{4}$$



TEHTÄVIÄ

1. Derivoi seuraavat funktiot

   a) $\dfrac{2x+1}{3x+2}$ b) $\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+1}\right)^4$

   c) $5x^2\sin(3x)$ d) $u\sin^3(\pi u)$

   e) $\sqrt{\dfrac{1+z^2}{1-z^2}}$ f) $\sin^3\dfrac{\alpha}{3}-3\sin\dfrac{\alpha}{3}$

2. Laske seuraavat derivaatat

   a) $\dfrac{d}{da}\ln(t-3a)$ b) $\dfrac{d}{dh}\ln\left(\left(t-e^{-3h}\right)^2\right)$

   c) $\dfrac{d}{dt}A\sin(\omega t+\varphi)$

3. Laske seuraavat derivaatat

   a) $\dfrac{d^2}{dx^2}\sin(x^2)$ b) $\dfrac{d^4}{dx^4}\arctan x$

   c) $\dfrac{d^3}{dx^3}\dfrac{x}{\ln x}$ d) $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos(x^2+3y^2)$

4. Laske seuraavat vektorifunktioiden derivaatat

   a) $f(t)=t^3\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\,\boldsymbol{j}+\sin 2t\,\boldsymbol{k}$ b) $f(t)=e^{-t}\boldsymbol{i}-\cos 4t\,\boldsymbol{j}+\ln t\,\boldsymbol{k}$

5. Laske

   a) derivaatan $\dfrac{d}{dt}(t\sin t)$ arvo pisteessä $\dfrac{\pi}{4}$.

   b) osittaisderivaatan $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x\cos(x^2-4y^2))$ arvo pisteessä (2; –3,5).

9.3 Implisiittinen derivointi

Jos pisteet x_0 ja y_0 ovat sellaisia, että

$$f(x_0, y_0)=0 \quad ,$$

niin usein yhtälö

$$f(x, y)=0$$

määrittelee implisiittisesti jossain pisteen x_0 ympäristössä derivoituvan funktion $y=y(x)$, jolle $y(x_0)=y_0$ ja

$$f(x, y(x))=0 \tag{1}$$

kaikilla *x* tässä ympäristössä.

Funktion $y(x)$ derivaatta voidaan määrittää **implisiittisesti derivoimalla** yhtälöstä (1). Tällöin derivaatan lauseke riippuu yleensä sekä *x*:stä että funktion arvosta *y*.

Laskimessa implisiittinen derivointi suoritetaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> E: Implisiittinen derivointi**. Komento näkyy syöttörivillä komentoja **impDif**. Komennon muoto on

impDif(yhtälö, x, y, kertaluku)

missä

- **yhtälö** ilmoittaa yhtälön, joka voi olla muodossa $f(x, y)=g(x, y)$.
- **x** on riippumattoman muuttujan
- **y** on implisiittisen derivoitavan funktion
- **kertaluku** on derivaatan kertaluku.

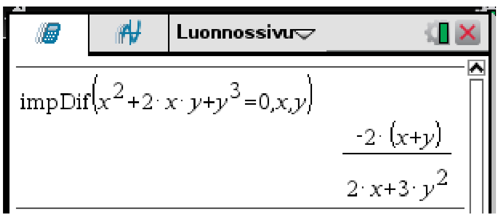
Jos parametrin **kertaluku** jättää pois, on kyseessä ensimmäisen kertaluvun derivaatta.

ESIMERKKEJÄ

1. Yhtälö

$$x^2 + 2xy + y^3 = 0$$

määrittelee implisiittisesti funktion $y=y(x)$. Lasketaan tämä funktion derivaatta.



Siis

$$y' = -\frac{2(x+y)}{2x+3y^2}$$

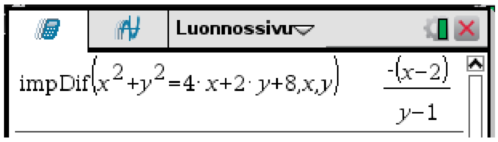
♦

2. Yhtälö

$$x^2+y^2=4x+2y+8 \qquad (2)$$

määrittelee pisteen $x=4$ ympäristössä funktion $y=y(x)$, jonka arvot ovat negatiivisia. Määritä tämän funktion derivaatta pisteessä $x=4$.

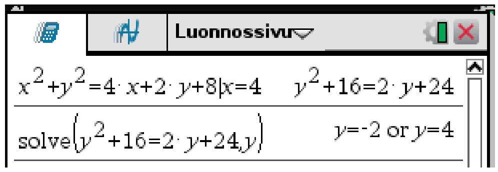
<u>Ratkaisu:</u> Lasketaan yhtälön (2) määrittelemän funktion implisiittinen derivaatta.



Siis derivaatta on

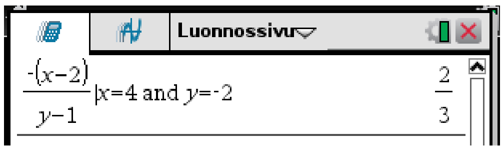
$$y'=\frac{2-x}{y-1}.$$

Määritetään pistettä $x=4$ vastaava muuttujan y arvo sijoittamalla $x=4$ yhtälöön (2) ja ratkaisemalla saadusta yhtälöstä y.



Koska funktion arvo on negatiivinen, on $y=-2$.

Derivaatan arvo pisteessä $x=4$ on siis



eli

$$y'=\frac{2}{3}.$$

♦

TEHTÄVIÄ

1. Esitä muuttujien x ja y avulla derivaatta y' seuraavissa tapauksissa

a) $x^2+y^2=r^2$ b) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=k$

d) $x^2+xy+y^2=5$ e) $x-y=\sin x \cos y$

f) $\dfrac{y}{x}=\arctan\dfrac{x}{y}$ g) $xy=\ln(x^2+y^2)$

2. Yhtälö $x^2+2xy+2y^2=3$ määrittelee implisiittisesti pisteen $x=1$ ympäristössä kaksi funktiota $y=y(x)$. Määritä näiden funktion derivaatat pisteessä $x=1$.

9.4 *Derivaatan sovelluksia*

9.4.1 Tangentti- ja normaalisuora

Funktion *f* kuvaajan pisteeseen $(a, f(a))$ asetettu *tangenttisuora* voidaan määrittää menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta** >> **9: Tangenttisuora**. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **tangentLine**. Komennon muoto on

tangentLine(f(x), x, a)

tai

tangentLine(f(x), x=a)

Funktion *f* kuvaajan pisteeseen $(a, f(a))$ asetettu *normaalisuora* voidaan määrittää menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta** >> **A: Normaalisuora**. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **normalLine**. Komennon muoto on

normalLine(f(x), x, a)

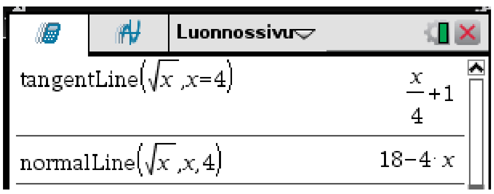
tai

normalLine(f(x), x=a)

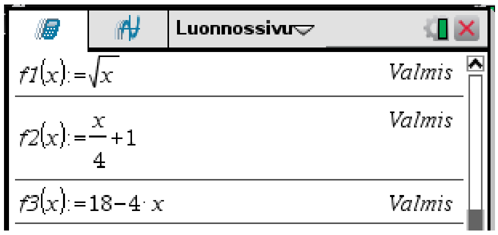
ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään funktion $f(x)=\sqrt{x}$ kuvaajan pisteeseen $(4, 2)$ asetetut tangentti- ja normaalisuora. Piirretään kuva tilanteesta.

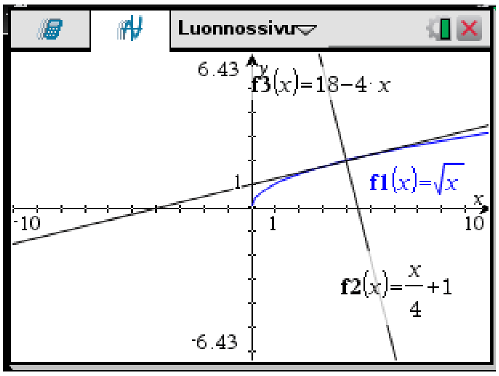
   Tangentti- ja normaalisuorat saadaan suoraan komennoilla



   Piirtoa varten funktiot tallennetaan piirtofunktioiksi.



Piirtosivulla on käytetty vakio-zoomausta, jolloin kulmat ovat näkyvät oikean kokoisina.



♦

Edellä olevissa komennoissa funktio tai piste voivat riippua muuttujista. Tällöin kuvaajan piirtäminen ei tietenkään onnistu.

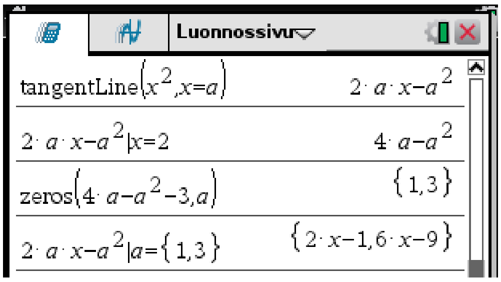
ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään funktion $f(x)=x^2$ kuvaajalle pisteestä $(2,3)$ piirretyt tangenttisuorat.

   Piste $(2,3)$ ei ole funktion kuvaajalla, sillä $2^2\neq 3$.

   Seuraavassa on laskimella

   - määritetty funktion tangenttisuora kohdassa $x=a$
   - laskettu tangenttisuoran arvo kohdassa $x=2$
   - asetettu ehto, että tangenttisuora kulkee pisteen $(2,3)$. Tässä on käytetty jatkolaskun kannalta kätevää **zeros**-komentoa. Saadaan kaksi arvoa *a*:lle.
   - määritetty tangenttisuorien esitykset käyttäen rajoitusoperaattoria.

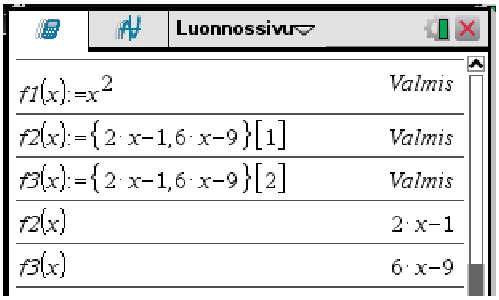


Kysytyt tangenttisuorat ovat siis

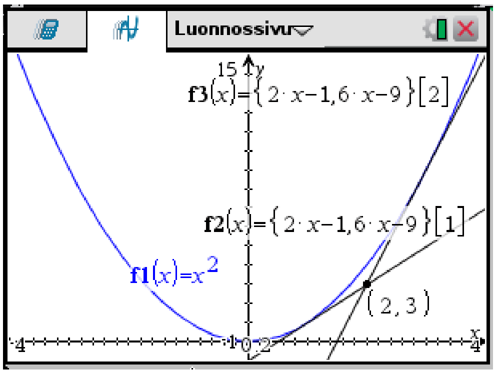
$$y=2x-1 \quad \text{ja} \quad y=6x-9 \quad .$$

Tarkistetaan asia vielä piirtämällä kuva.

Piirtoa varten tallennetaan funktiot piirtofunktioiksi. Huomaa kuinka listasta on valittu alkiot! On vielä tarkistettu, että ***f2*(*x*)** ja ovat ***f3*(*x*)** oikein.



Kuvassa tangenttisuorien leikkauspisteet on määritetty komennolla **6: Analysoi kuvaaja >> 4: Leikkauspiste**.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden annettuihin kuvaajan pisteisiin asetettujen tangenttien yhtälöt.
   a) $f(x)=x^3-7x$, piste $(-1, 6)$.
   b) $f(x)=\sin x$, piste $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
   c) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{1-x}}$, piste $\left(-8, \frac{2}{3}\right)$
2. Määritä paraabelille $y=x^2$ pisteestä $(1,-2)$ piirrettyjen tangenttien yhtälöt.

9.4.2 Virhearviot

Tarkastellaan kahden[1] muuttujan funktiota. Tilanne on seuraavanlainen.

Suure z riippuu kahdesta suureesta x ja y: $z=f(x, y)$. Suureen z arvoa laskettaessa on siis laskettava funktion $f(x, y)$ arvo. Tätä laskettaessa on käytettävissä seuraavat tulokset:

- suure x: mittaustulos x_0 , jossa mittausvirhe Δx . Täten tarkka arvo on $x=x_0+\Delta x$
- suure y: mittaustulos y_0 , jossa mittausvirhe Δy . Täten tarkka arvo on $y=y_0+\Delta y$

Suureiden x ja y tarkkoja arvoja ei tiedetä, joten mittausvirheitä Δx ja Δy ei myöskään tiedetä. Näille on kuitenkin arviot ylöspäin: *tunnetaan mittaustarkkuus*.

Suureen $z=f(x, y)$ arvo lasketaan mittausarvoja x_0 ja y_0 käyttäen:

$$z_0=f(x_0, y_0) \quad .$$

Suureen z virhettä

$$\Delta z=f_{\text{tarkka arvo}}-f_{\text{likiarvo}}=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)=\Delta f$$

voidaan arvioida differentiaalia käyttäen

$$\Delta f \approx df=\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\Delta y$$

Ottamalla tästä itseisarvo ja arvioimalla ylöspäin saadaan

$$\boxed{|\Delta f| \leq \left|\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right||\Delta y|}$$

Tästä saadaan arvio suureen z virheelle eli funktion $f(x, y)$ arvon virheelle, jos mittausvirheiden itseisarvoille $|\Delta x|$ ja $|\Delta y|$ on arviot ylöspäin.

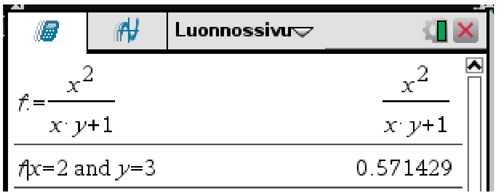
ESIMERKKEJÄ

1. Lausekkeen $\frac{x^2}{xy+1}$ arvo määritettiin mittaustulosten $x=2\pm0{,}1$ ja $y=3\pm0{,}05$ perusteella. Esitä lausekkeen arvo virhearvioineen.

[1] Yhden muuttujan funktion tapaus on yksinkertaisempi, kolmen ja useamman muuttujan funktion tapaus menee samalla lailla.

Ratkaisu: Olkoon $f(x,y)=\dfrac{x^2}{xy+1}$.

Seuraavassa on merkitty lauseketta *f*:llä ja laskettu lausekkeen arvo mittauspisteessä käyttäen rajoitusoperaattoria.



Lausekkeen arvo on siis 0,571429.

Funktion *f* arvon virhe on

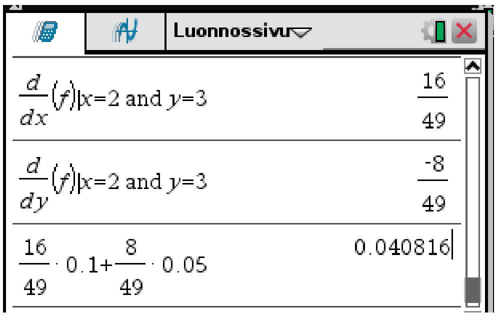
$$\Delta f \approx df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \quad ,$$

joten funktion virheen itseisarvolle saadaan likimääräinen arvio ylöspäin

$$|\Delta f| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| \quad ,$$

missä osittaisderivaatat lasketaan mittausarvoilla $x=2$, $y=3$.

Suoritetaan laskut laskimella.



Edellä negatiivisen luvun itseisarvo on saatu pyyhkimällä miinusmerkki pois.

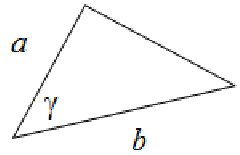
Siis

$$|\Delta f| \le 0{,}040816 \quad .$$

Vastaus: Lausekkeen arvo on $0{,}57 \pm 0{,}04$

♦

2. Kolmiosta tunnetaan sivut $a=39{,}10\,\mathrm{m}\pm 0{,}05\,\mathrm{m}$ ja $b=63{,}4\,\mathrm{m}\pm 0{,}1\,\mathrm{m}$ sekä niiden välinen kulma $\gamma=56{,}5^\circ \pm 0{,}5^\circ$. Määritä kolmion pinta-ala. Kuinka tarkasti pinta-ala tunnetaan?

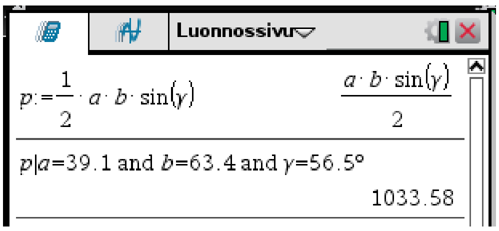


<u>Ratkaisu</u>: Käytetään pituusyksikkönä m, jolloin pinta-alan yksikkö on m^2. Jätetään laskuissa yksiköt merkitsemättä.

Kolmion pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Merkitään laskimessa pinta-alan lauseketta p:llä ja lasketaan pinta-alan arvo mittauspisteessä $a=39{,}1$, $b=63{,}4$ ja $\gamma=56{,}5^\circ$ käyttäen rajoitusoperaattoria.



Yllä laskin on tulevan derivoinnin takia kulma-asetuksessa **Radiaani**. Kulma $56{,}5^\circ$ on tällöin syötettävä astemerkkiä käyttäen. Astemerkki löytyy näppäimellä aukeavasta ikkunasta.

Pinta-ala on siis

$$A=1033{,}58\,\mathrm{m}^2$$

Pinta-alan virhe on

$$\Delta A\approx dA=\frac{\partial A}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial A}{\partial b}\Delta b+\frac{\partial A}{\partial\gamma}\Delta\gamma \quad ,$$

joten pinta-alan virheen itseisarvolle saadaan likimääräinen arvio ylöspäin

$$|\Delta A|\le\left|\frac{\partial A}{\partial a}\right||\Delta a|+\left|\frac{\partial A}{\partial b}\right||\Delta b|+\left|\frac{\partial A}{\partial\gamma}\right||\Delta\gamma| \qquad (1)$$

Mittaustietojen perusteella[1]

$$|\Delta a|\le 0{,}05$$

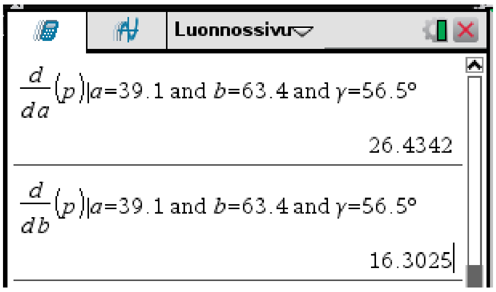
$$|\Delta b|\le 0{,}1$$

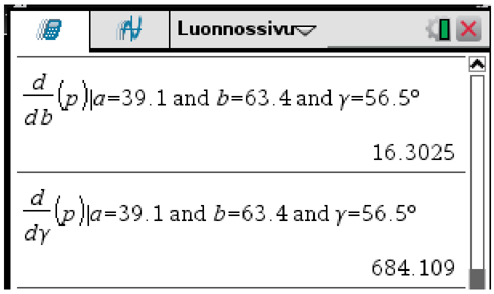
$$|\Delta\gamma|\le 0{,}5^\circ=0{,}5\cdot\frac{\pi}{180} \quad .$$

Lasketaan osittaisderivaatat mittauspisteessä $a=39{,}1$, $b=63{,}4$ ja $\gamma=56{,}5^\circ$:

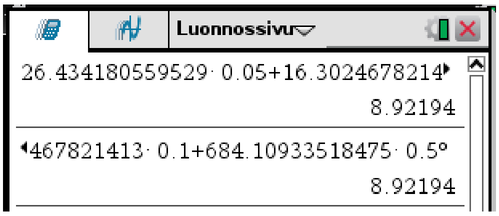
[1] Kulma on oltava radiaaneissa. Tämä saadaan laskimessa aikaiseksi käyttämällä astemerkkiä.

Haetaan historiatiedoista edellinen lasku syöttöriville, maalataan p ja valitaan derivaatta-operaattori näppäimellä aukeavasta operaattori-ikkunasta. Tällöin osittaisderivaatta muuttujan a voidaan kätevästi laskea annetussa pisteessä. Osittaisderivaatat muuttujien b ja γ suhteen voidaan laskea helposti muuttamalla aiempaa syöttöä.





Nyt voidaan epäyhtälöä (1) käyttäen laskea arvio virheen itseisarvolle.



Yllä on näkyvissä syötön alku ja loppu.

Siis pinta-alan virheelle saadaan likimääräinen arvio ylöspäin

$$|\Delta A| \leq 8{,}92194 \approx 9\,\mathrm{m}^2$$

<u>Vastaus</u>: Kolmion pinta-ala on $1034\,\mathrm{m}^2 \pm 9\,\mathrm{m}^2$.

♦

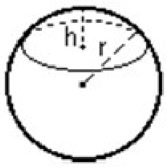
TEHTÄVIÄ

Käytä seuraavien tehtävien virhearviossa differentiaalia.

1. Pallon halkaisijaksi mitattiin $a = 54{,}4\,\mathrm{cm} \pm 0{,}3\,\mathrm{cm}$. Määritä pallon pinta-ala. Arvioi pinta-alan virhettä.
2. Lausekkeen $\dfrac{y^2}{x\,y + 2}$ arvo määritettiin mittaustulosten $x = 3 \pm 0{,}05$ ja $y = 2 \pm 0{,}1$ perusteella. Esitä lausekkeen arvo virhearvioineen.
3. Vastuksen kuluttama teho on

   $$P = \frac{U^2}{R},$$

   missä *R* on vastuksen resistanssi ja *U* on jännitehäviö vastuksessa. Arvioi vastuksen tehon kulutusta, kun $R = 1000\,\Omega \pm 50\,\Omega$ ja $U = 20\,\mathrm{V} \pm 0{,}5\,\mathrm{V}$. Millä tarkkuudella tehon kulutus tunnetaan?
4. Pallosegmentin tilavuus lasketaan kaavalla

   $$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h),$$

   missä *r* on pallon säde ja *h* segmentin korkeus. Määritä pallosegmentin tilavuus virhearvioineen, kun *r* = 56 cm ± 1 cm ja *h* = 26,5 cm ± 0,5 cm.

9.5 Funktion käyttäytyminen

9.5.1 Globaali minimointi ja maksimointi

-valikon **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta** komento

- **7: Funktion minimikohta** määrittää kohdan, jossa funktio saa pienimmän arvonsa. Komento näkyy syöttörivillä komentona **fMin**.
- **8: Funktion maksimikohta** määrittää kohdan, jossa funktio saa suurimman arvonsa. Komento näkyy syöttörivillä komentona **fMax**.

Komennon **fMin** muoto

- **fMin(funktio, muuttuja)** määrittää minikohdan kaikilla muuttujan arvoilla.
- **fMin(funktio, muuttuja, alaraja)** määrittää minikohdan muuttujan arvoilla, jotka ovat suurempia tai yhtä suuria kuin **alaraja**.
- **fMin(funktio, muuttuja, alaraja, yläraja)** määrittää minikohdan muuttujan arvoilla, jotka ovat välillä **alaraja … yläraja**.

- **fMin(funktio, muuttuja)| ehto** määrittää minikohdan muuttujan arvoilla, jotka toteuttavat ehdon.

Komennon **fMax** muodot ovat samanlaisia.

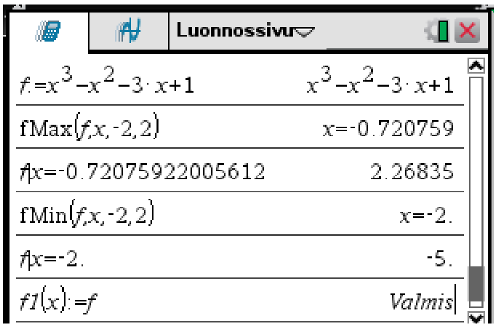
ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään funktion

$$f(x)=x^3-x^2-3x+1$$

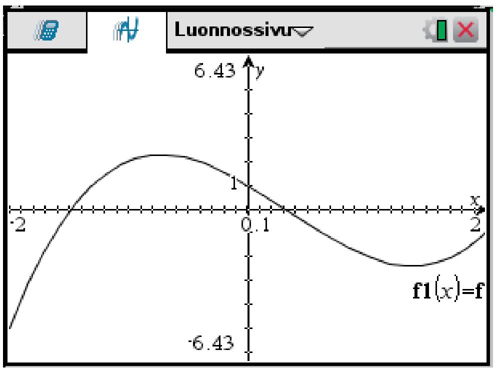
suurin ja pienin arvo välillä $[-2,2]$.

Lasketaan laskimella.



Siis suurin arvo on 2,26835 ja pienin arvo on –5.

On vielä syytä varmistua tuloksen oikeellisuudesta piirtämällä funktion kuvaaja välillä $[-2,2]$. Piirtofunktion määrittely on yllä alimmalla rivillä.



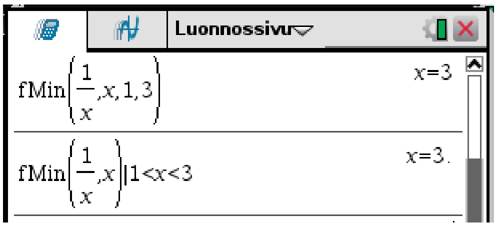
Kuvasta nähdään, että laskimen antamat tulokset ovat oikein.

♦

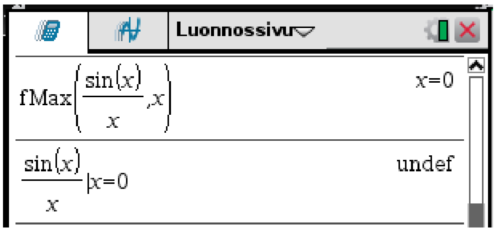
Komentoja käytettäessä on aina tuloksen oikeellisuus tarkistettava funktion kuvaajasta. Lisäksi on tarkistettava, että komennon antama arvo kuuluu haluttuun väliin ja että funktio on määritelty tässä pisteessä.

ESIMERKKEJÄ

2. Kokeillaan komentojen rajoja.



Jälkimmäisessä tapauksessa ei minimiä tietenkään ole. Koska laskin laskee numeerisesti, antaa se kuitenkin arvon.



Funktiolla $\dfrac{\sin x}{x}$ ei ole maksimia eikä funktio ole ollenkaan määritelty annetussa pisteessä.

♦

Koska suljetulla välillä jatkuva ja vastaavalla avoimella välillä derivoituva funktio voi saada suurimman ja pienimmän arvonsa joko

- välin päätepisteissä tai
- välin sisällä olevissa derivaatan nollakohdissa

voidaan tämän tyyppinen tehtävä ratkaista seuraavan esimerkin tapaan.

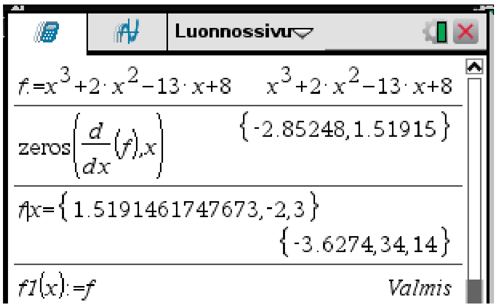
ESIMERKKEJÄ

3. Määritetään funktion

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 8$$

suurin ja pienin arvo välillä $[-2,3]$

Lasketaan laskimella.



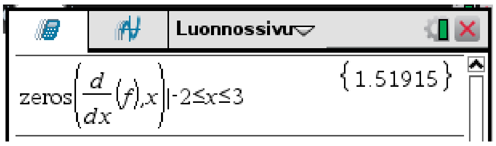
Yllä

- toisella rivillä on määritetty derivaatan nollakohdat. Huomaa komennon **zeros** käyttö!
- kolmannella rivillä on laskettu funktion arvot välin sisällä olevissa derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteissä. Koska yksi derivaatan nollakohta ei ole välin sisällä, on se poistettu listasta.

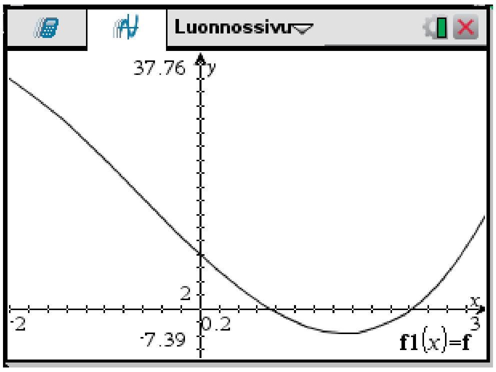
Kolmannella rivillä lasketuista arvoista suurin on funktion suurin arvo ja pienin on funktion pienin arvo välillä $[-2,3]$. Siis

<u>Vastaus</u>: Funktion suurin arvo on 34 ja pienin arvo on –3,6274.

Jos **zeros**-komennossa rajoittaa muuttujan välille $[-2,3]$, ei välille kuulumattomia nollakohtia tule.



Lopuksi on vielä varmuuden vuoksi tarkistettu asia piirtämällä funktion kuvaaja välillä $[-2,3]$.



♦

Komentoja **fMin** ja **fMax** käytettäessä on aina funktion kuvaajasta tarkistettava tulosten oikeellisuus. Funktion kuvaajasta voidaan kuitenkin suoraan määrittää funktion maksimi- ja minimikohdat ja -arvot, jolloin komentoja **fMin** ja **fMax** ei tarvitsekaan käyttää. Tällöin käytetään piirtotilan menu-valikon **6: Analysoi kuvaaja** komentoja

- **2: Minimipiste**
- **3: Maksimipiste**

Komentoja käytettäessä valitaan ensin kohdistinta käyttäen kuvaaja, jos kuvassa on useamman kuin yhden funktion kuvaaja. Sen jälkeen osoitetaan väli, jolta minimiä tai maksimia haetaan antamalla välin vasen ja oikea päätepiste joko hiirtä käyttäen tai kirjoittamalla arvot.

ESIMERKKEJÄ

4. Määritetään funktion

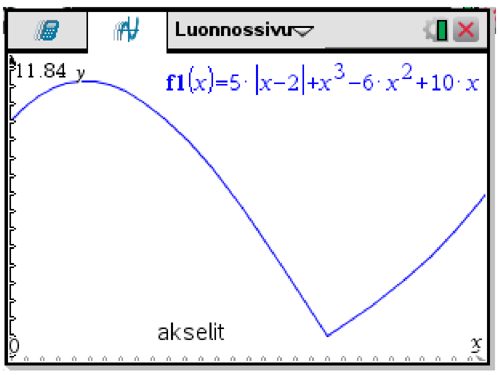
$$f(x)=5|x-2|+x^3-6x^2+10x$$

suurin ja pienin arvo välillä $[0,3]$.

Piirretään funktion kuvaaja välillä $[0,3]$ käyttäen menu-valikon **4: Ikkuna** komentoja

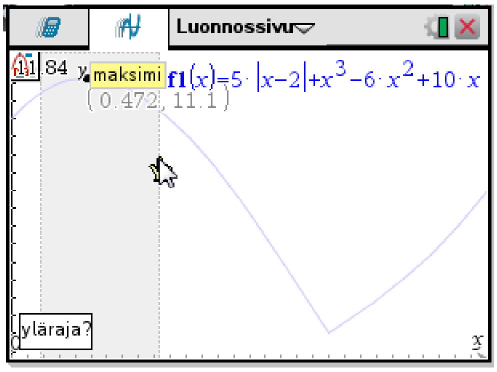
- **1: Ikkunan asetukset**: valitaan muuttujan *x* liikkumisväli
- **A: Zoomaa – Sovita**: laskin määrittää sopivan *y*-akselin välin.

Saadaan seuraavanlainen kuva.



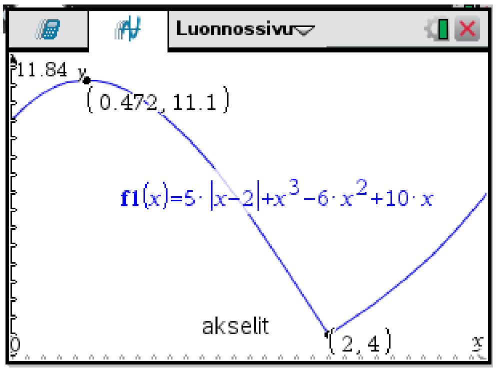
Kuvasta nähdään, että funktio saa suurimman ja pienimmän arvonsa välin sisällä. Määritetään ne menu-valikon **6: Analysoi kuvaaja** komennoilla.

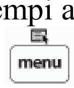
Maksimi määritetään komennolla **3: Maksimipiste**. Osoitetaan kohdistinta käyttäen väli, jolta maksimi löytyy.

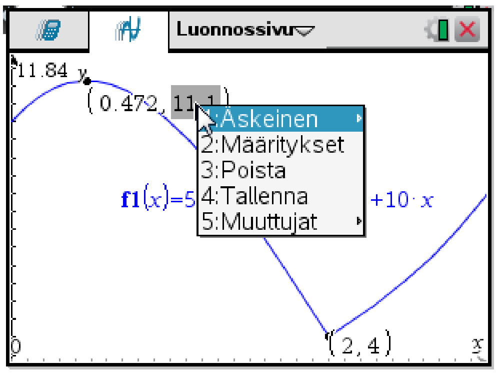


Minimi määritetään samalla tavalla.

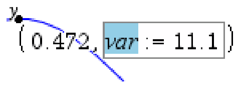
Kuvassa näkyy nyt maksimi- ja minimipisteet.

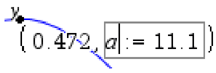


Minimiarvo on ilmeisesti 4. Maksimiarvo on desimaaliluku, jonka laskin esittää vain yhdellä desimaalilla. Tarkempi arvo saadaan viemällä kohdistin maksimiarvon päälle ja painamalla näppäimiä  . Tällöin aukeaa valikko,

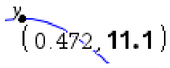


josta valinta **4: Tallenna** aukaisee ikkunan, jonne syötetään muuttujan nimi





ja painetaan enter:iä. Tällöin maksimiarvo näkyy lihavoituna.



Yllä arvo on sijoitettu muuttujaan a. Laskentatilassa tämä voidaan tulostaa näytölle.

<u>Vastaus</u>: Funktion suurin arvo on 11,1285 ja pienin arvo on 4.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden suurin ja pienin arvo annetulla välillä
   a) $f(x)=-x^3+7x+3$ välillä $[-2,2]$
   b) $f(x)=x^3-10x+5$ välillä $[-1,4]$
   c) $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ välillä $[0,5]$
   d) $f(x)=\cos(x)+\sin(1{,}5x)$ välillä $[0,4\pi]$
   e) $f(x)=\sqrt{2-x^2}+x$ määrittelyalueessaan
   f) $f(x)=e^x\sin x$ välillä $[0,2\pi]$

9.5.2 Lokaalit ääriarvot

Lokaalit ääriarvot voidaan määrittää piirtämällä funktion kuvaaja ja katsomalla siitä lokaalit ääriarvojen summittainen sijainti. Lokaalien ääriarvojen tarkempi määrittäminen tapahtuu menu-valikon **6: Analysoi kuvaaja** komennoilla **2: Minimipiste** ja **3: Maksimipiste**. Komentoja käytettäessä rajataan hakualue siten, että siinä on vain yksi minimi tai maksimi.

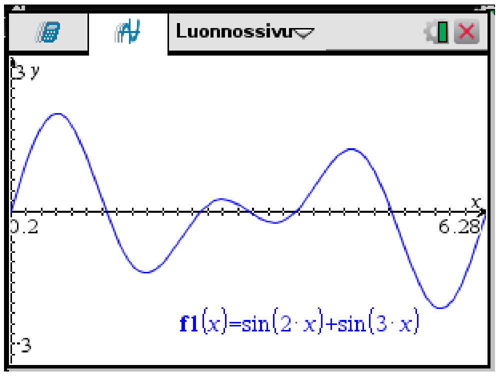
ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään funktion

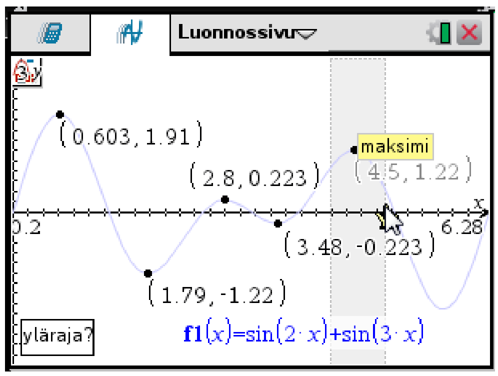
$$f(x)=\sin(2x)+\sin(3x)$$

lokaalit ääriarvot välillä $[0, 2\pi]$.

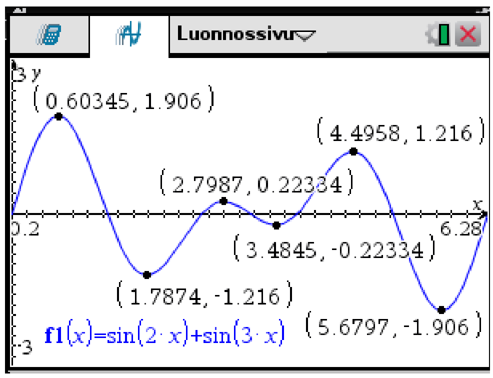
Piirretään funktion kuvaaja.



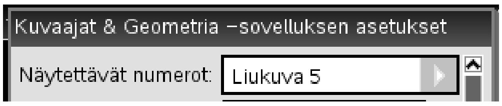
Kuvasta nähdään funktion lokaalit ääriarvot. Määritetään lokaalit maksimit menu-valikon komennolla **6: Analysoi kuvaaja >> 3: Maksimipiste** ja lokaalit minimit menu-valikon komennolla **6: Analysoi kuvaaja >> 2: Minimipiste**.



Seuraavassa kuvasta näkyvät funktion lokaalit ääriarvokohdat ja ääriarvot.



Kuvassa luvut on esitetty näyttöasetuksella[1] **Liukuva 5**,



joka on saatu menu-valikon komennolla **8: Asetukset...**

<u>Vastaus</u>: Funktiolla on

- lokaali maksimiarvo 1,906 kohdassa 0,60345
- lokaali maksimiarvo 0,22334 kohdassa 2,7987
- lokaali maksimiarvo 1,216 kohdassa 4,4958
- lokaali minimiarvo –1,216 kohdassa 1,7874
- lokaali maksimiarvo –0,22334 kohdassa 3,4845
- lokaali maksimiarvo –1,906 kohdassa 5,6797

♦

Derivoituvan funktion $f(x)$ lokaalit ääriarvokohdat löydetään ratkaisemalla yhtälö

$$f'(x)=0 \quad .$$

Kaikki derivaatan nollakohdat eivät välttämättä ole lokaaleja ääriarvokohtia.

Jos funktio $f(x)$ on kahdesti derivoituva, niin ääriarvojen laatu voidaan selvittää seuraavasti[2]:

- Jos $f''(x)>0$ derivaatan nollakohdassa, niin se on lokaali minimikohta.
- Jos $f''(x)<0$ derivaatan nollakohdassa, niin se on lokaali maksimikohta.

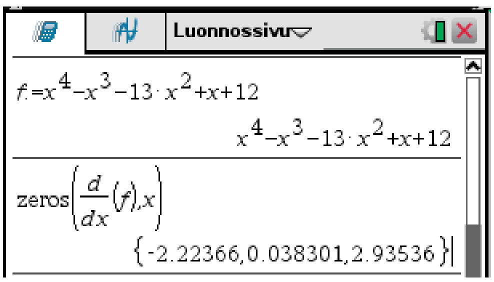
ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään funktion

$$f(x)=x^4-x^3-13x^2+x+12$$

lokaalit ääriarvot.

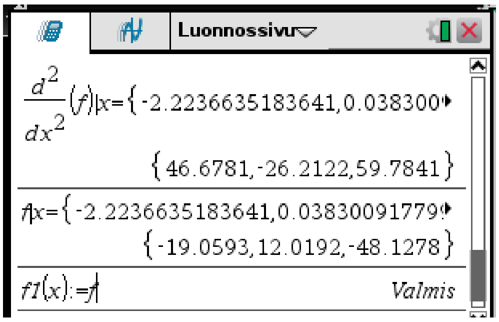
Määritetään derivaatan nollakohdat



[1] Oletusarvo on **Liukuva 3**.

[2] Jos toinen derivaatta on nolla, on mahdollisen ääriarvon laatu selvitettävä eri tavalla.

Määritetään ääriarvojen laatu derivaatan nollakohdissa laskemalla toisen derivaatan arvot. Lasketaan vielä funktion arvot derivaatan nollakohdissa.



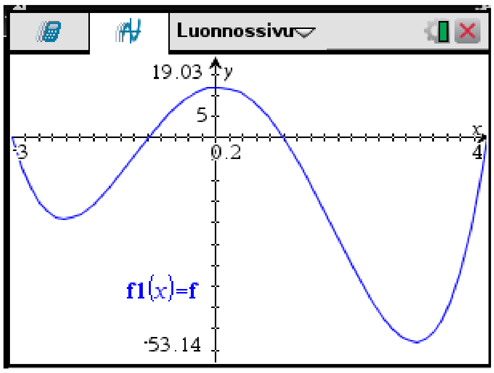
Siis

$x = –2{,}22366$ on lokaali minimikohta, minimiarvo on $–19{,}0593$

$x = 0{,}038301$ on lokaali maksimikohta, maksimiarvo on $12{,}0192$

$x = 2{,}93536$ on lokaali minimikohta, minimiarvo on $–48{,}1278$

Tarkistetaan vielä asia piirtämällä funktion kuvaaja välillä $[-3,\ 4]$.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden lokaalit ääriarvokohdat ja ääriarvot.

   a) $f(x)=x^3-5x^2+4x+12$ b) $f(x)=4x^3-27x^2+54x-27$

   c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ d) $f(x)=x^x$

2. Määritä seuraavien funktioiden lokaalit ääriarvokohdat ja ääriarvot.

   a) $f(x)=\begin{cases} x^2-3x\text{, kun } x\leq -2 \\ 2x+14\text{, kun } x>-2 \end{cases}$ b) $f(x)=x^2-5|x|$

3. Määritä funktion $f(x)=\cos 2x-2\sin x$ lokaalit ääriarvokohdat ja ääriarvot välillä $[-10,10]$.

9.5.3 Funktion käännepisteet

Jos funktio on derivoituva pisteen x_0 ympäristössä, on piste x_0 on funktion *käännekohta*, jos funktion kuperuussuunta muuttuu pisteessä x_0 . Funktion kuvaajan pistettä $(x_0, f(x_0))$ sanotaan tällöin funktion *käännepisteeksi*.

Funktion käännepiste määritetään piirtotilan menu-valikon komennolla **6: Analysoi kuvaaja >> 5: Käännepiste**. Komentoa käytettäessä valitaan ensin kohdistinta käyttäen kuvaaja, jos kuvassa on useamman kuin yhden funktion kuvaaja. Sen jälkeen osoitetaan väli, jolta käännepistettä haetaan antamalla välin vasen ja oikea päätepiste joko hiirtä käyttäen tai kirjoittamalla arvot.

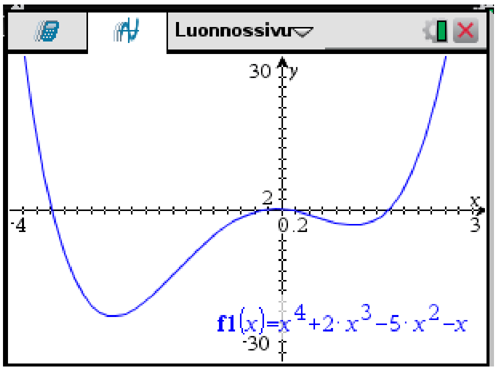
ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään funktion

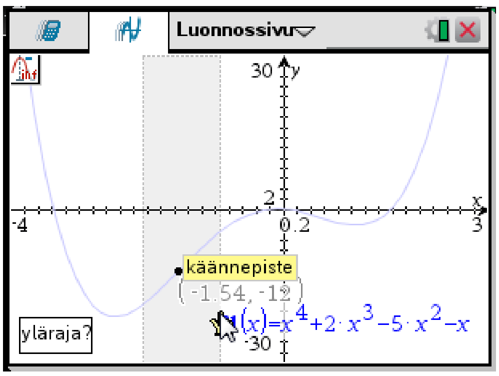
$$f(x)=x^4+2x^3-5x^2-x$$

käännepisteet.

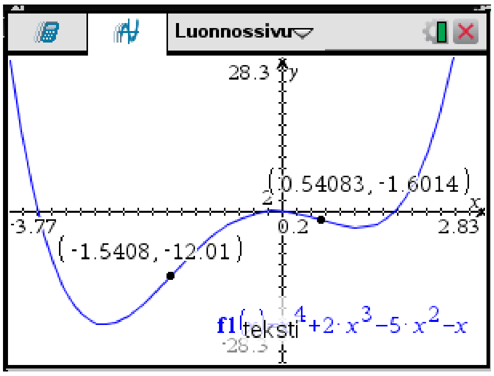
Funktion kuvaajasta



nähdään, että funktiolla on kaksi käännepistettä. Määritetään ne.



Kuvassa on käännepisteet esitetty näyttöasetuksella[1] **Liukuva 5**.



Siis käännepisteet ovat $(-1{,}5408\,;-12{,}01)$ ja $(0{,}54083\,;-1{,}6014)$.

♦

Jos funktio *f* on kolmesti derivoituva pisteessä x_0 ja $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, niin piste x_0 on funktion käännekohta.

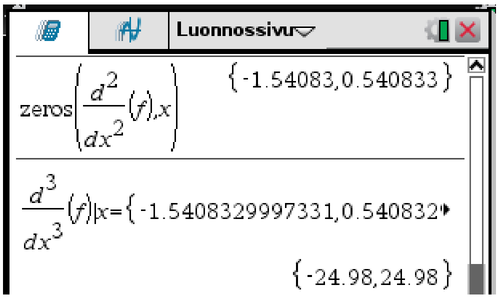
ESIMERKKEJÄ

2. Määritetään funktion edellisen esimerkin funktion

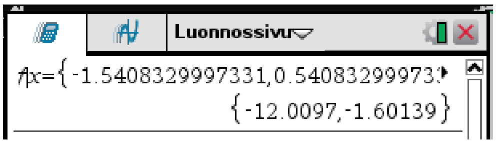
$$f(x)=x^4+2x^3-5x^2-x$$

käännepisteet derivointimenetelmällä.

Lasketaan ensin mahdolliset käännekohdat.



Koska kolmas derivaatta ei ole nolla, ovat molemmat toisen derivaatan nollakohdat käännekohtia. Lasketaan vielä funktion arvot näissä kohdissa.



[1] Oletusarvo on **Liukuva 3**.

Siis käännepisteet ovat $(-1{,}54083;-12{,}0097)$ ja $(0{,}540833;-1{,}60139)$ eli samat kuin edellisessä esimerkissä saadut.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden käännekohdat

   a) $f(x)=x^5-3x^4+5x^2-5x$ b) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$

9.5.4 Asymptootit

Funktion $y=f(x)$ asymptootit kuvaavat funktion käyttäytymistä kaukana origosta, jolloin joko muuttuja *x* on itseisarvoltaan suuri tai funktion arvo *y* on itseisarvoltaan suuri. Tässä tarkastellaan asymptootteja, jotka ovat polynomeja tai pystysuoria viivoja.

Funktiolla $f(x)$ on asymptoottina

- *polynomi* $p(x)$, jos $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-p(x))=0$ tai $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-p(x))=0$
- *pystysuora* $x=x_0$, jos[1] $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=\pm\infty$ tai $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\pm\infty$

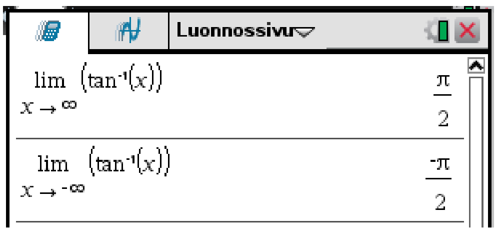
Polynomiasymptootti on sellainen, että likimäärin

$$f(x)\approx p(x)\ ,$$

suurilla muuttujan *x* arvoilla tai pienillä, itseisarvoltaan suurilla, muuttujan *x* arvoilla

ESIMERKKEJÄ

1. Tarkastellaan funktiota $f(x)=\arctan x$. Koska



on funktiolla asymptootteina suorat

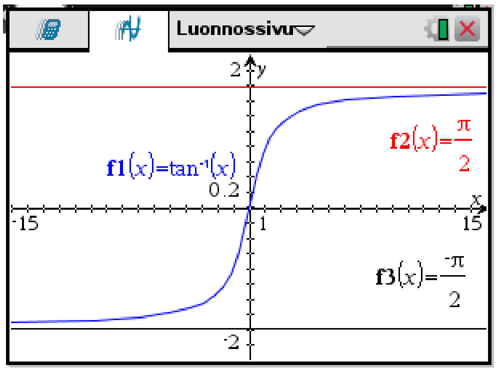
$$y=\frac{\pi}{2}$$

ja

$$y=-\frac{\pi}{2}$$

[1] Merkintä $\pm\infty$ tarkoittaa, että raja-arvo voi olla ∞ tai $-\infty$.

Piirretään kuva tilanteesta.



♦

Tarkastellaan rationaalifunktion

$$\frac{P(x)}{R(x)}$$

asymptoottien määrittämistä. Tässä $P(x)$ ja $Q(x)$ ovat polynomeja, joista voidaan olettaa, että niillä ei ole yhteisiä[1] tekijöitä. Polynomien jakolaskualgoritmia käyttäen voidaan rationaalifunktio esittää muodossa

$$\frac{P(x)}{R(x)}=Q(x)+\frac{S(x)}{R(x)} \tag{1}$$

missä $Q(x)$ ja $S(x)$ ovat polynomeja siten, että polynomin $S(x)$ aste on pienempi kuin polynomin $R(x)$ aste.

Rationaalifunktion asymptootit ovat seuraavat:

- *Pystysuorat asymptootit* ovat nimittäjän $R(x)$ nollakohdat: suora $x=a$ on asymptootti, jos ja vain jos $R(a)=0$.
- *Polynomiasymptootti* on esityksen (1) polynomi $Q(x)$.

Laskimella voidaan rationaalifunktion **F(x)**

- pystysuorat asymptootit muodostaa komennolla **zeros(getDenom(F(x)),x)**
- polynomiasymptootti muodostaa komennolla **propFrac(F(x))** ja ottamalla tuloksesta polynomiosan tai komennolla **polyQuotient(getNum(F(x)), getDenom(F(x)))**.

ESIMERKKEJÄ

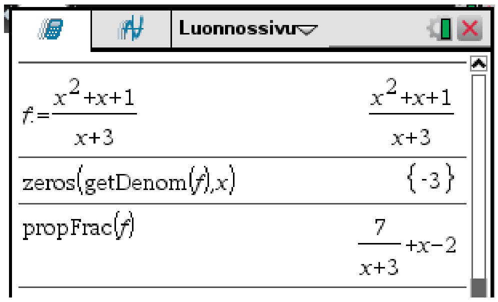
2. Määritetään funktion

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+3}$$

asymptootit.

[1] Suoritetaan tarpeen vaatiessa yhteisten tekijöiden supistamiset.

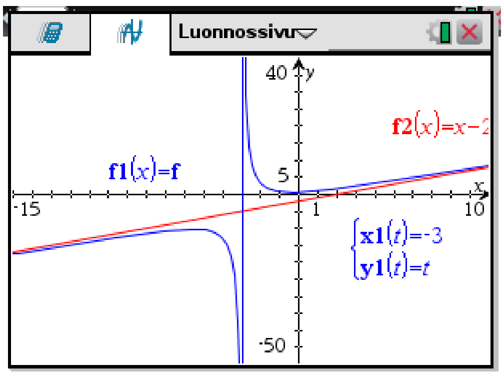
Lasketaan laskimella



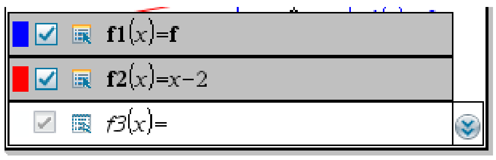
Siis

- pystysuora asymptootti on
  $$x=-3$$
- polynomiasymptootti on
  $$y=x-2$$

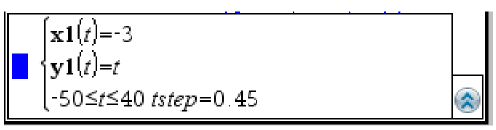
Piirretään kuva tilanteesta.



Kuvan funktiot on piirretty normaalina funktion piirtona.



Sen sijaan pystysuora $x=3$ on piirretty parametriesityksenä: menu-valikon komento **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 3: Parametrinen**.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden asymptootit

a) $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+3}$

c) $f(x)=\dfrac{x^4+5x-6}{x^2-2x-7}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2+7}{x^3-5x^2-13x}$

9.6 Integrointi

Integraali lasketaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> 3: Integraali**. Näppäimellä aukeavasta ikkunasta voidaan valita integraalifunktion ja määrätyn integraalin laskentamallit.

Integraalin laskennan pikanäppäimet ovat shift +.

Määrätyn integraalin laskentamallia

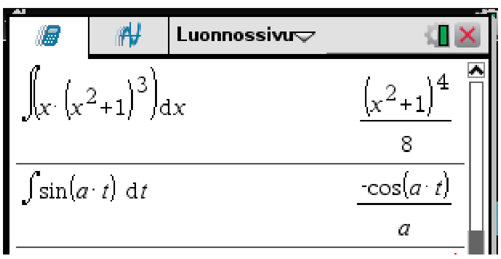
$$\int_{\square}^{\square} \square \, d\square$$

voi käyttää myös integraalifunktion määrittämisessä: jätetään integroimisrajat täyttämättä tai poistetaan ne näppäimellä del, jolloin laskentamalli muuttuu integraalifunktion laskentamalliksi.

Integraalifunktioissa laskin ei esitä integroimisvakiota *C*. Se voidaan aina lisätä laskimen antamaan integraalifunktioon.

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään integraalifunktioita.



Siis

$$\int x\left(x^2+1\right)^3 dx=\frac{\left(x^2+1\right)^4}{8}+C$$

$$\int \sin(a\,t)\,dt=-\frac{\cos(a\,t)}{a}+C$$

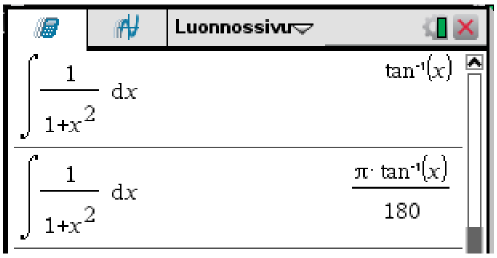
♦

Integroitaessa laskimen kulma-asetuksen on oltava **Radiaani**.

ESIMERKKEJÄ

2. Lasketaan integraali $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   Ylemmässä laskussa kulma-asetus on **Radiaani**, alemmassa **Aste**. Alempi tulos on väärin!



♦

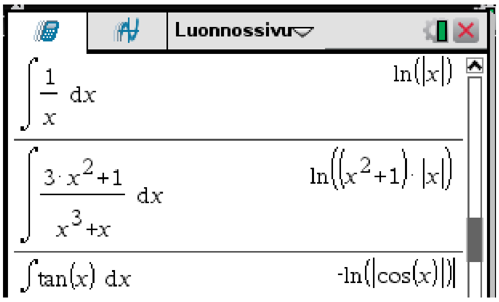
Logaritmiin päätyviä integraaleja laskettaessa tuloksen esitys riippuu kompleksilukuasetuksista: Jos se on **Reaali**, niin usein tulos on muotoa logaritmi itseisarvosta, muuten ei ole. Reaaliluvuilla laskettaessa asetuksen on syytä olla **Reaali**.

ESIMERKKEJÄ

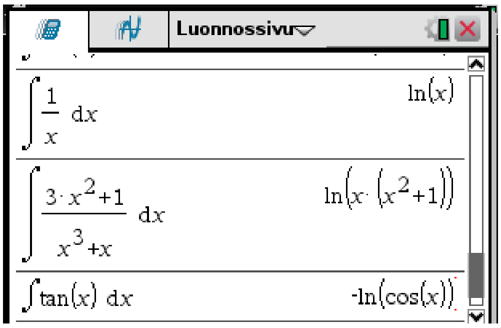
3. Kokeillaan kompleksilukuasetusten vaikutusta.

   Määritetään ensin integraalifunktioita.

   Kompleksilukuasetus: **Reaali**



Kompleksilukuasetus: **Suorakulma**



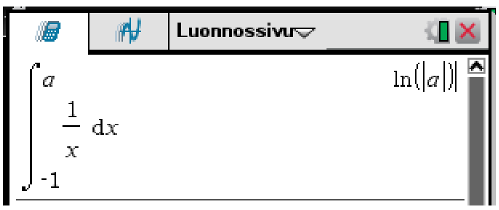
Reaaliluvuille ensimmäiset tulokset ovat oikein. Siis esimerkiksi

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

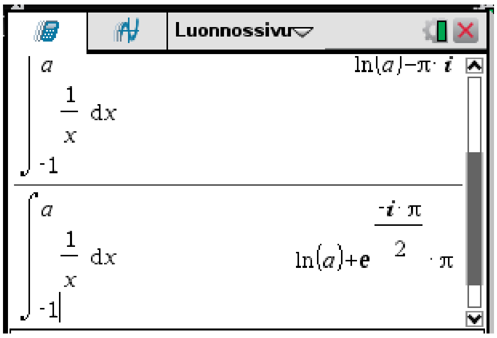
Lasketaan integraali

$$\int_{-1}^{a} \frac{1}{x}\,dx$$

Jos kompleksilukuasetus on **Reaali**, saadaan

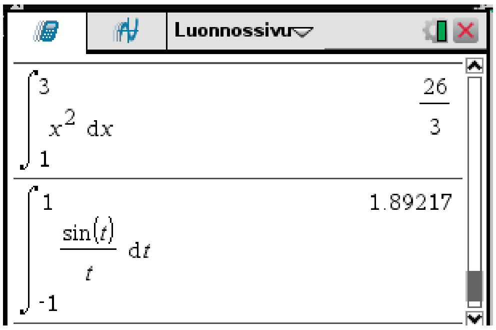


joka on haluttu muoto. Jos kompleksilukuasetus on **Suorakulma** tai **Polaarinen**, saadaan muodoltaan imaginaarinen tulos.



♦

4. Lasketaan määrättyjä integraaleja.



♦

Jos numeerisen arvoon päättyvän määrätyn integraalin laskenta ei onnistu normaalilla integraalin laskentakomennolla, on käytettävä numeerisen integraalin laskentakomentoa, joka löytyy menu-valikosta **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta** >> **F: Numeeriset laskutoimitukset** >> **3: Numeerinen integraali**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **nInt**. Komennon muoto on

nInt(f(x), x, a, b)

ja se laskee integraalin

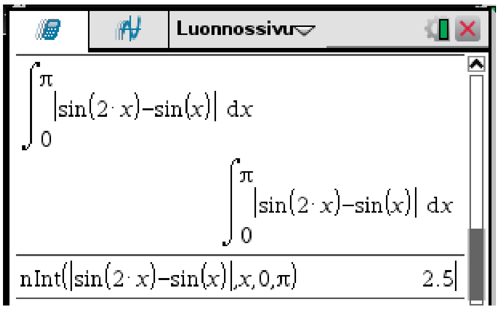
$$\int_a^b f(x)\,dx$$

numeerisen arvon. Integraalissa ei siis saa esiintyä määräämättömiä vakiota. Numeerista integrointia kannattaa käyttää vain, jos normaali integraalin laskenta ei onnistu.

ESIMERKKEJÄ

5. Lasketaan integraali

$$\int_0^\pi |\sin(2x)-\sin(x)|\,dx \quad .$$



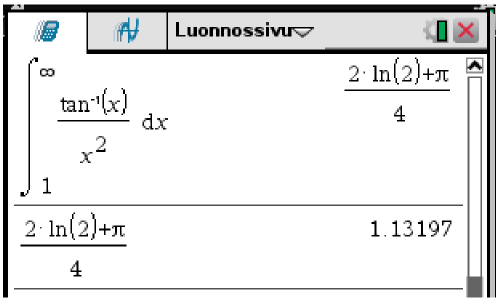
Tässä on siis käytettävä komentoa **nInt**. Integraalin arvo on 2,5.

♦

Integroimisraja voi olla ääretön, jolloin integraali on epäoleellinen.

ESIMERKKEJÄ

6. Lasketaan epäoleellinen integraali.



♦

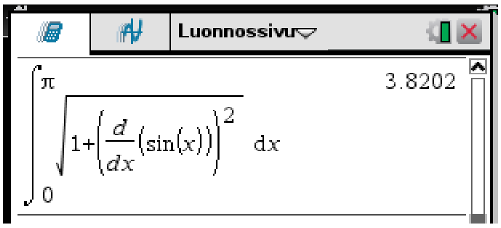
Integraalissa voi esiintyä derivaattoja, jotka laskin laskee integroinnin yhteydessä.

ESIMERKKEJÄ

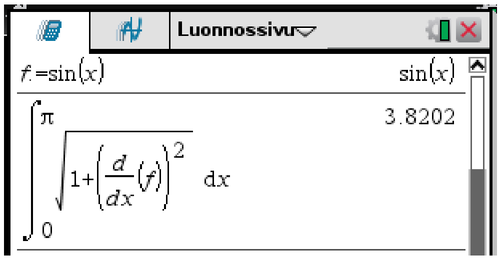
7. Funktion $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ kuvaajan pituus s lasketaan kaavalla

$$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Lasketaan funktion $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$ kuvaajan pituus.
Kuvaajan pituus voidaan laskea sijoittamalla funktio $f(x)$:n paikalle



tai tallentamalla funktion lauseke muuttujaan *f* ja kirjoittamalla pituuden laskukaava.



Kuvaajan pituus on siis 3,8202.

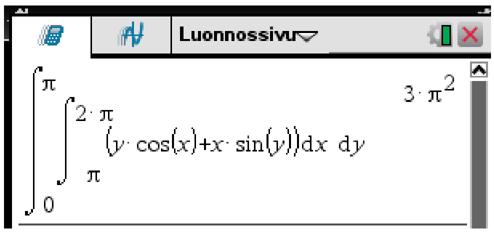
♦

Tasointegraali lasketaan kahtena peräkkäisenä integraalina.

ESIMERKKEJÄ

8. Lasketaan tasointegraali

$$\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(y\cos x + x\sin y)\,dx\,dy$$



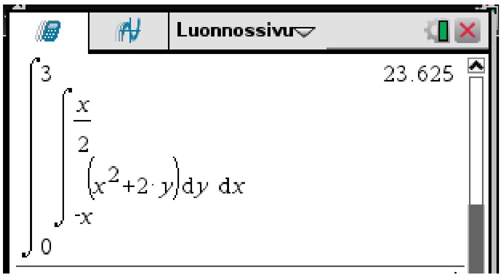
Siis

$$\int_0^{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(y\cos x + x\sin y)\,dx\,dy = 3\pi^2$$

♦

9. Lasketaan tasointegraali

$$\int_0^3 \int_{-x}^{\frac{x}{2}} (x^2+2y)\,dy\,dx$$



Siis

$$\int_0^3 \int_{-x}^{\frac{x}{2}} (x^2+2y)\,dy\,dx=23{,}625$$

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä integraalifunktiot

a) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-3}\,dx$ b) $\displaystyle\int \sin(\omega t+\phi)\,dt$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{4+3x^2}\,dx$ d) $\displaystyle\int \frac{a}{e^{4a^2}}\,da$

2. Laske integraalit

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\cos x-\cos 2x|\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} x\arctan x\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{a} \cos\sqrt{x}\,dx$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+ax^2}\,dx$

3. Laske integraalit

a) $\displaystyle\int_{-3}^{4} \int_{-\frac{1}{3}x-2}^{\frac{1}{2}x^2} \left(x^2-2xy\right)dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+5} xy\,dx\,dy$

9.7 Integraalin sovelluksia

9.7.1 Tasoalueen pinta-ala

Käyrien $y=f(x)$ ja $y=g(x)$ välillä $[a, b]$ rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx \quad .$$

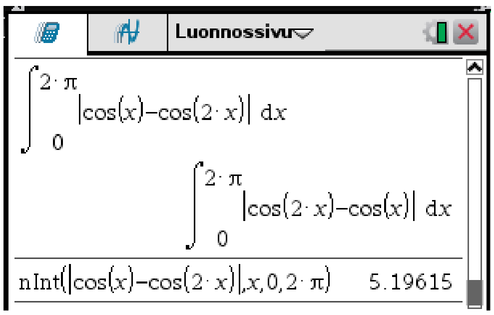
Erityisesti *x*-akselin ja käyrän $y=f(x)$ välillä $[a, b]$ rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A=\int_a^b |f(x)|\, dx \quad .$$

ESIMERKKEJÄ

1. Määritetään käyrien $y=\cos x$ ja $y=\cos 2x$ välillä $[0, 2\pi]$ rajoittaman alueen pinta-ala.

   Laskin ei laske integraalia normaalilla integrointikomennolla, vaan on käytettävä numeerista integrointia[1], joka saadaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> F: Numeeriset laskutoimitukset >> 3: Numeerinen integraali**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **nInt**.

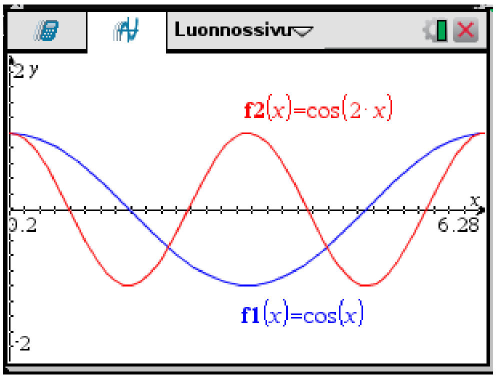


   Alueen pinta-ala on siis 5,19615.

   Piirretään vielä aluetta rajoittavat funktiot[2].

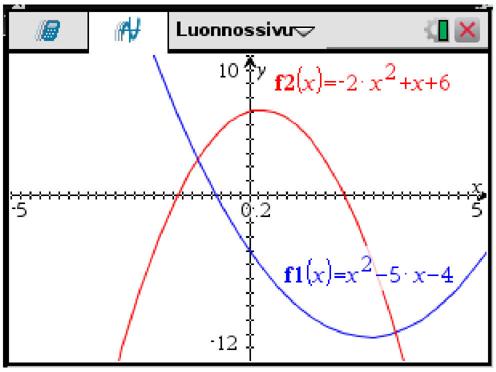
[1] Numeerista integrointia kannattaa käyttää vain, jos normaali integraalin laskenta ei onnistu.

[2] Itse laskennassa kuvaa ei tarvita!

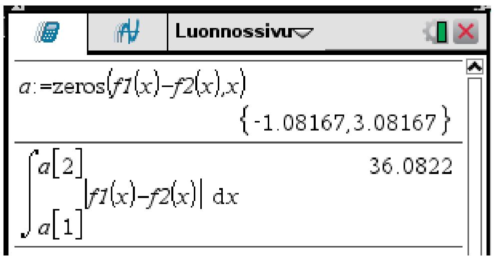


♦

2. Määritetään käyrien $y=x^2-5x-4$ ja $y=-2x^2+x+6$ rajoittaman äärellisen alueen pinta-ala.
   Piirretään funktioiden kuvaajat.



Määritetään kuvaajien leikkauspisteiden *x*-koordinaatit ja lasketaan alueen pinta-ala.



Edellä laskennassa on käytetty piirtofunktiota.
Siis pinta-ala on 36,0822.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä käyrän $y=\sin x$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $x\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.
2. Määritä käyrien $y=\cos x$ ja $y=\sin x$ väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $x\in\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$.
3. Määritä käyrien $y=\cos x$ ja $y=\sin^2 x$ väliin jäävän alueen pinta-ala, kun $x\in[-\pi,\pi]$.
4. Määritä seuraavien käyrien rajoittamien alueiden pinta-alat. Piirrä myös kuva alueesta.

   a) $y=x^2-2x-4$ ja $y=2x$ b) $y=\sin x$ ja $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{5}$

9.7.2 Käyrän pituus

Avaruuskäyrän, jolla on jatkuvasti derivoituva parametriesitys

$$\boldsymbol{r}=(x(t),y(t),z(t)) \quad , \quad t\in[a,b]$$

pituus voidaan laskea integraalina[1]

$$s=\int_a^b \|\boldsymbol{r}'(t)\|\,dt \quad .$$

Samaa kaavaa voidaan käyttää *tasokäyrän pituuden* laskemiseen. Erityisesti välillä $[a,b]$ jatkuvasti derivoituvan *funktion f kuvaajan pituus* on

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad .$$

Funktion kuvaajan pituus voidaan määrittää suoraan -valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> B: Kaaren pituus**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **arcLen** ja sen muoto on

arcLen(f(x), x, a, b)

ESIMERKKEJÄ

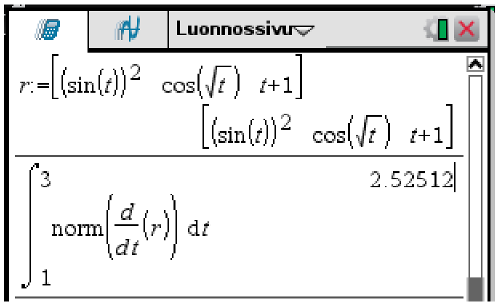
1. Määritetään avaruuskäyrän

   $$\boldsymbol{r}(t)=(\sin^2 t,\cos\sqrt{t},t+1) \quad , \quad t\in[1,3]$$

   pituus.

---

1 Tässä esiintyy vektorin normi, joka määritellään seuraavasti: Vektorin $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ **normi** on $\|\boldsymbol{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.



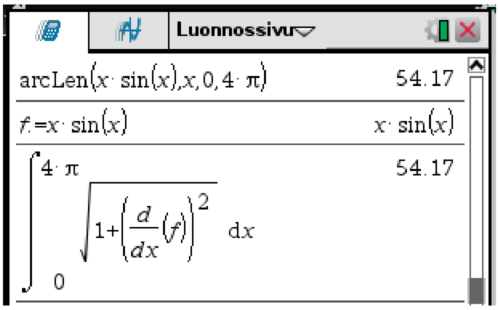
♦

2. Määritetään funktion

$$y = x \sin x \quad , \quad x \in [0, 4\pi]$$

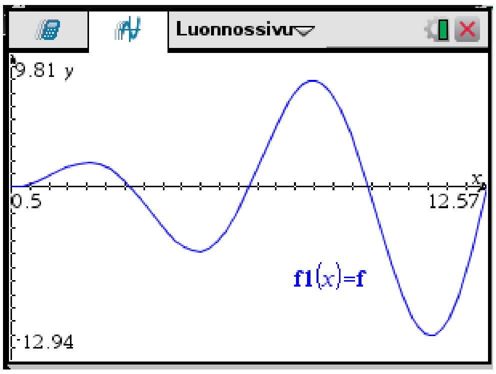
kuvaajan pituus.

Lasketaan pituus valmiilla komennolla ja integraalina.



Pituus on siis 54,17.

Käyrän kuva:



♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden kuvaajien pituudet

   a) $y=\frac{1}{x},\quad x\in[0{,}1\,;10]$ b) $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x}{2}},\quad x\in[-5{,}5]$

2. Määritä seuraavien avaruuskäyrien pituudet

   a) $\boldsymbol{r}(t)=\left(t,t^2,t^3\right)\quad,\quad t\in[-2{,}3]$ b) $\boldsymbol{r}(t)=\left(e^t,t\cos t,\sqrt{t^2+1}\right)\quad,\quad t\in[-1{,}1]$

3. Määritä ruuviviivan kaaren

$$\begin{cases} x=R\cos t \\ y=R\sin t \\ z=\frac{h}{2\pi}t \end{cases}\quad,\quad t\in[0,2\pi]$$

   pituus.

9.7.3 Pyörähdyskappaleen tilavuus

Välillä $[a,b]$ jatkuvan funktion kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri muodostuvan *pyörähdyskappaleen* tilavuus on

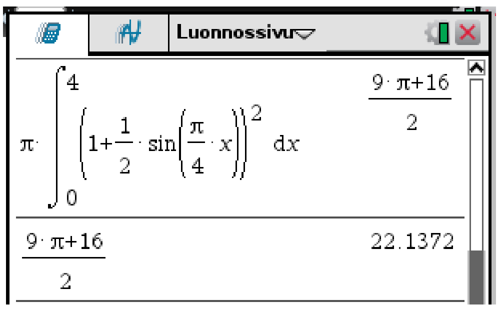
$$V=\pi\int_a^b f(x)^2dx$$

ESIMERKKEJÄ

1. Käyrä

$$y=1+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\quad,\quad x\in[0{,}4]$$

   pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä pyörähdyskappaleen tilavuus.

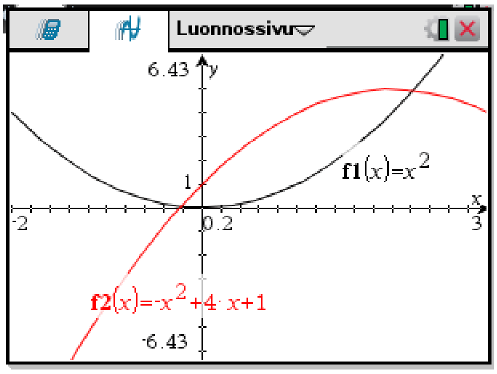


   Tilavuus on siis 22,1372.

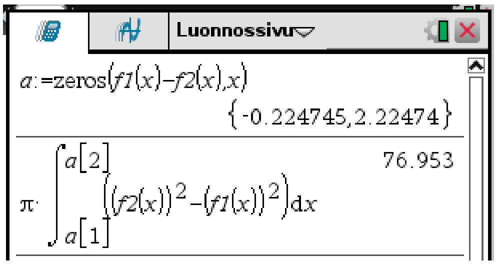
♦

2. Käyrät $y=x^2$ ja $y=-x^2+4x+1$ rajoittavat alueen, joka pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä näin muodostuvan kappaleen tilavuus.

   Ratkaisu: Piirretään kuva tilanteesta.



Määritetään käyrien leikkauspisteiden x-koordinaatit.



Pyörähdyskappaleen tilavuus saadaan käyrien muodostamien pyörähdyskappaleiden tilavuuksien erotuksena

$$V=\pi\int_{a_1}^{a_2} f_2(x)^2\,dx-\pi\int_{a_1}^{a_2} f_1(x)^2\,dx=\pi\int_{a_1}^{a_2}\left(f_2(x)^2-f_1(x)^2\right)dx$$

Tilavuus on 76,953.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Seuraavat käyrät pyörähtävät x-akselin ympäri. Määritä pyörähdyskappaleen tilavuus.

   a) $y=\sin x \quad x\in[0,\pi]$.

   b) $y=\ln x \quad , \quad x\in[1,3]$

2. Käyrät $y=-x^2-3x+6$ ja $y=-x+3$ rajoittavat alueen, joka pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä näin muodostuvan kappaleen tilavuus.

9.7.4 Pyörähdyskappaleen vaipan ala

Kun funktion

$$y=f(x) \quad , \quad x \in [a,b]$$

kuvaaja pyörähtää

- x-akselin ympäri, niin muodostuvan pinnan pinta-ala on

$$A_x = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

- y-akselin ympäri, niin muodostuvan pinnan pinta-ala

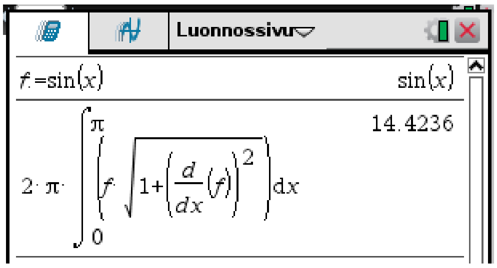
$$A_y = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

ESIMERKKEJÄ

1. Käyrä

$$y = \sin x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

pyörähtää x-akselin ympäri. Määritetään muodostuvan pinnan pinta-ala.



Pinta-ala on 14,4236.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien x-akselin ympäri pyörähtävien käyrien muodostamien pintojen pinta-alat.

   a) $y = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$ b) $y = x^2 - 4, \quad x \in [-2, 2]$

2. Määritä seuraavien y-akselin ympäri pyörähtävien käyrien muodostamien pintojen pinta-alat.

   a) $y = \sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ b) $y = e^x, \quad x \in [1, e]$

9.8 Summat ja sarjat

Summa $\sum_{k=n}^{m} x_k$ lasketaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> 5: Summa** tai valitsemalla summan laskentamalli näppäimellä aukeavasta ikkunasta.

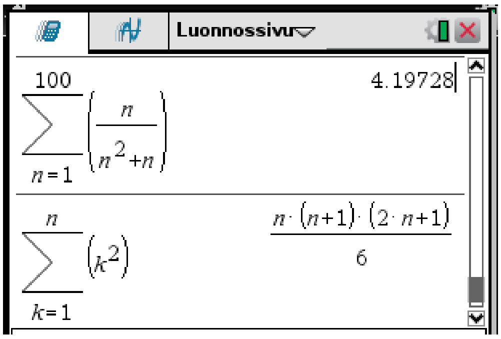
Jos summan yläraja on ääretön, on kyseessä sarja. Laskin pystyy laskemaan joidenkin sarjojen, esimerkiksi geometrisen sarjan, summia.

ESIMERKKEJÄ

1. Lasketaan summat

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{n}{n^2+n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$



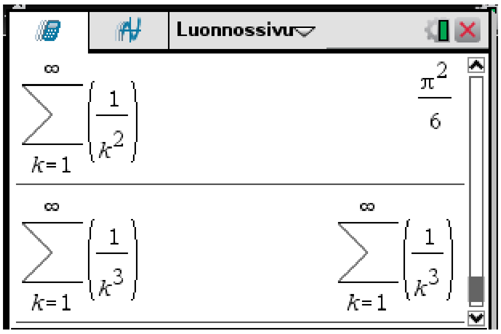
Edellisessä summan laskenta on päätetty näppäimillä ctrl enter, jolloin on saatu tulos desimaaliesityksenä.

♦

2. Lasketaan sarjojen summat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

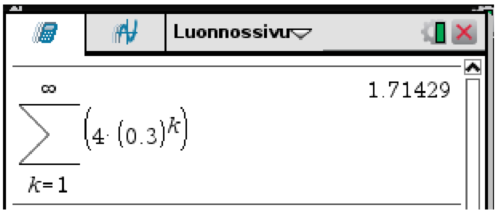
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$



Alemman sarjan summaa laskin ei laske.

♦

3. Lasketaan geometrisen sarjan summa



♦

TEHTÄVIÄ

1. Laske

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

9.9 Taylorin polynomit

Funktion Taylorin polynomi muodostetaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> C: Sarjat >> 1: Taylorin polynomi**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **taylor**. Komennon muoto on

taylor(funktio, muuttuja, kertaluku, keskus)

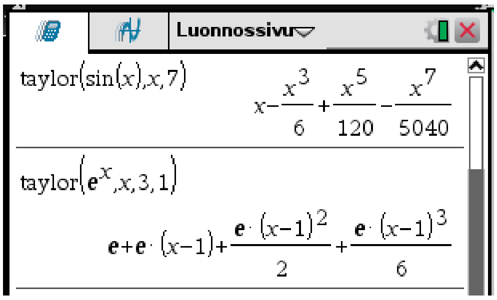
missä

- **funktio** määrittää funktion
- **muuttuja** on riippumattoman muuttujan
- **kertaluku** on Taylorin polynomin kertaluvun
- **keskus** on Taylorin polynomin kehityskeskuksen.

Jos parametrin **keskus** jättää pois, on kehityskeskus 0.

ESIMERKKEJÄ

1. Muodostetaan Taylorin polynomeja.



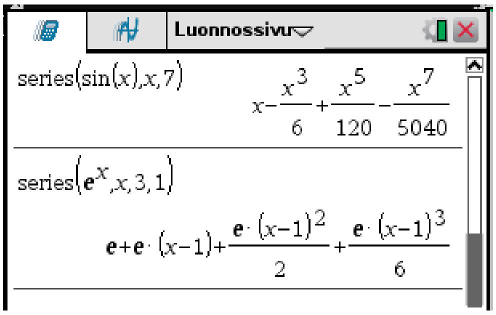
Edellisessä kehityskeskus on 0 jälkimmäisessä 1.

♦

Komento **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> C: Sarjat >> 2: Yleistetyt sarjat** on **taylor**-komennon yleistys. Se muodostaa funktion Laurentin kehitelmän, jossa potenssit voivat olla myös negatiivisia. Komento näkyy syöttörivillä komentona **series**. Komennon parametrit ovat samat kuin komennossa **taylor**.

ESIMERKKEJÄ

2. Muodostetaan Taylorin polynomit käyttäen komentoa **series**.



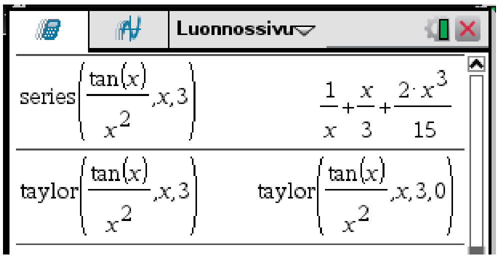
Saatiin samat tulokset kuin edellisessä esimerkissä.

♦

Komento **series** tekee enemmän kuin komento **taylor**.

ESIMERKKEJÄ

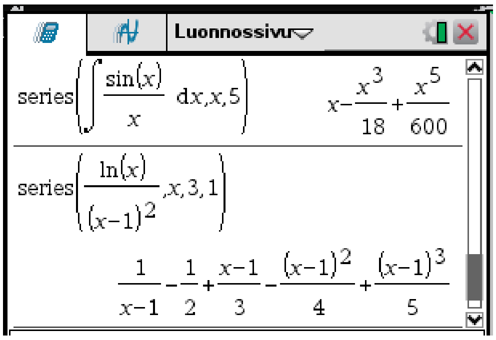
3. Kokeillaan molempia komentoja.



Komento **taylor** ei siis suorittanut laskua.

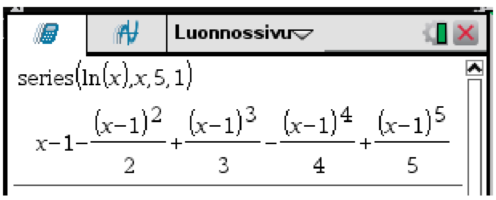
♦

4. Kokeillaan komentoa **series**.



Edellisen komennon tekee myös komento **taylor**.

Jälkimmäisen komennon tulos saadaan myös jakamalla kertalukua 5 oleva Taylorin polynomi



termillä $(x-1)^2$.

♦

Komento[1]

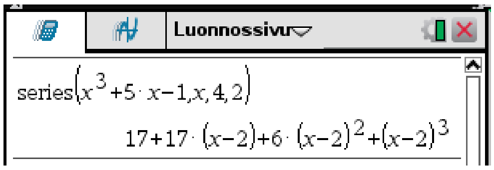
$$\mathbf{series}(P(x), x, n, x_0)$$

[1] Myös komentoa **taylor** voi käyttää.

esittää n:nnen asteen polynomin $P(x)$ termin $x-x_0$ potenssien avulla.

ESIMERKKEJÄ

5. Esitetään polynomi $P(x)=x^3+5x-1$ termin $x-2$ potenssien avulla.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien funktioiden Taylorin polynomit 0:n ympäristössä. Valitse mieleisesi kertaluku.
   a) $\cos x$ b) $\arctan x$ c) $\sqrt{1+x}$
2. Määritä funktion $\sin x$ kertalukua 3 oleva Taylorin polynomi pisteessä $\frac{\pi}{4}$.
3. Esitä polynomi $P(x)=2x^4-4x^3+6x+5$ termin $x+3$ potenssien avulla.

10. DIFFERENTIAALIYHTÄLÖT

10.1 Symbolinen ratkaiseminen

Laskimella voidaan määrittää ensimmäisen ja toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöiden yleisiä ratkaisuja ja alkuarvoprobleemien ratkaisuja. Ratkaisu suoritetaan menu-valikon komennolla **4: Differentiaali- ja integraalilaskenta >> D: Differentiaaliyhtälön ratkaisija**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **deSolve**. Komennon muoto on

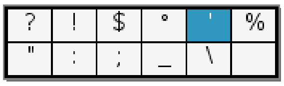
deSolve(diff_yht, x, y),

missä

- **diff_yht** on differentiaaliyhtälö sisältäen mahdolliset alkuarvot
- **x** on riippumaton muuttuja
- **y** on ratkaistava funktio.

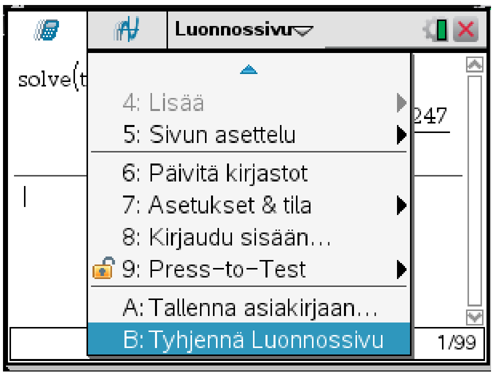
Komennon argumentissa **diff_yht**

- differentiaaliyhtälön tuntemattoman derivaatat on muodostettava heittomerkillä, joka löytyy näppäimellä aukeavasta ikkunasta[1]



- mahdolliset alkuarvot on erotettava sanalla **and**.

Yleisen ratkaisun integroimisvakiot laskin esittää muodossa ***c1***, ***c2***, … Jos ratkaisussa esiintyy kaksi eri *c*:n indeksiä, on yleisessä ratkaisussa kaksi integroimisvakiota. Indeksi kasvaa joka laskukerralla. Luonnossivun indeksin saa alustettua avaamalla sivun otsikkovalikko ja valitsemalla sieltä komento **B: Tyhjennä Luonnossivu**.



ESIMERKKEJÄ

[1] Heittomerkki löytyy myös näppäimillä ctrl aukeavasta merkki-ikkunasta.

1. Määritetään differentiaaliyhtälön

$$y'+y=-x$$

yleinen ratkaisu.

Yleinen ratkaisu on siis

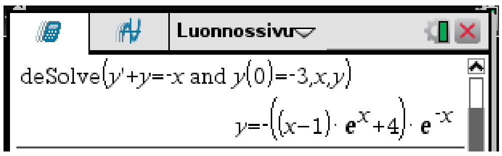
$$y=C\mathrm{e}^{-x}-x+1$$

♦

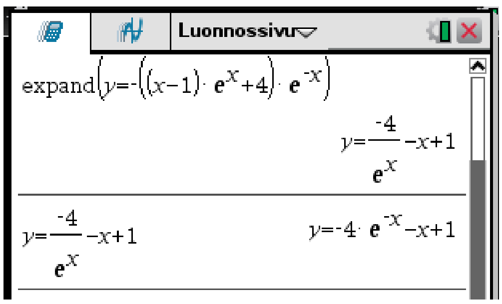
2. Määritetään alkuarvoprobleeman

$$y'+y=-x \quad , \quad y(0)=-3$$

ratkaisu.



Sievennetään vielä ratkaisua suorittamalla kertolasku ja ottamalla tulos syöttöriville.



Ratkaisu on siis

$$y=4\mathrm{e}^{-x}-x+1$$

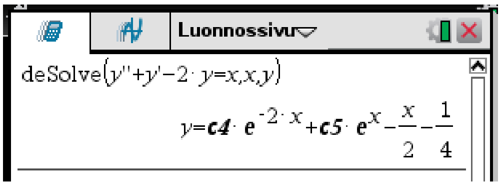
Huomaa kuinka alkuehto asettaa edellisen esimerkin yleisen ratkaisun integroimisvakiolle arvon.

♦

3. Määritetään differentiaaliyhtälön

$$y''+y'-2y=x$$

yleinen ratkaisu.



Yleinen ratkaisu on siis

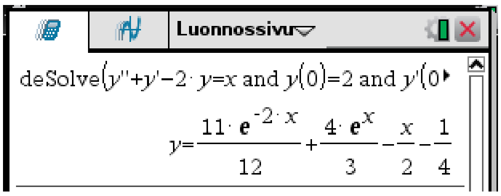
$$y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

♦

4. Määritetään alkuarvoprobleeman

$$y''+y'-2y=x \qquad y(0)=2 \quad , \quad y'(0)=-1$$

ratkaisu.



Komennon muoto yllä on seuraava:
deSolve(y''+y'-2*y=x and y(0)=2 and y'(0)=-1,x,y)

Ratkaisu on siis

$$y=\frac{11}{12}\mathrm{e}^{-2x}+\frac{4}{3}\mathrm{e}^{x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$$

Tässäkin alkuehto asettaa edellisen esimerkin yleisen ratkaisun integroimisvakioille arvot.

♦

TEHTÄVIÄ

1. Määritä seuraavien differentiaaliyhtälöiden yleiset ratkaisut.

a) $y^2y'=\tan x$ b) $y'+\frac{1}{3}y=\frac{1}{3}(1-2x)y^4$

c) $tx''+2x'+4tx=4$ d) $y''+3y'-4y=\sin 2x$

2. Ratkaise seuraavat aluarvoprobleemat
   a) $y'+y=y^2(\cos x-\sin x)$, $y(0)=-2$
   b) $y''+3y'-4y=\sin 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$

10.2 Numeerinen ratkaiseminen

Laskimella voi ratkaista numeerisesti ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmien alkuarvoprobleemoja.

10.2.1 Differentiaaliyhtälöiden teoriaa

Ensimmäisen kertalukua oleva differentiaaliyhtälöryhmä on muotoa

$$\begin{cases} y_1'=f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2'=f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \quad\ldots \\ y_n'=f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases}$$

missä

$$y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x), \ldots, y_n=y_n(x)$$

ovat tuntemattomia ratkaistavia funktioita.

Differentiaaliyhtälöryhmän alkuarvoprobleemassa on löydettävä se ratkaisu, joka annetussa pisteessä x_0 toteuttaa *alkuehdon*

$$\begin{cases} y_1(x_0)=\hat{y}_1 \\ y_2(x_0)=\hat{y}_2 \\ \quad\ldots \\ y_n(x_0)=\hat{y}_n \end{cases}$$

missä $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots, \hat{y}_n$ ovat annettuja lukuja.

Kertalukua n oleva differentiaaliyhtälö on numeerista ratkaisemista varten muunnettava 1. kertaluvun differentiaaliyhtälöryhmäksi. Seuraavassa esitetään menetelmä, joka johtaa ns. **normaaliryhmään**.

1. Ratkaistaan korkein derivaatta
$$y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$
2. Määritellään *n* funktiota
$$\begin{cases} y_1(x)=y(x) \\ y_2(x)=y'(x) \\ y_3(x)=y''(x) \\ \ldots \\ y_n(x)=y^{(n-1)}(x) \end{cases} .$$
3. Suoraan derivoimalla todetaan, että nämä funktiot toteuttavat differentiaaliyhtälöryhmän

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}'=y_n \\ y_n'=f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

Tämä ryhmä on differentiaaliyhtälöä (1) vastaava **normaaliryhmä**.

Funktio $y(x)=y_1(y)$ on differentiaaliyhtälön (1) ratkaisu, jos ja vain jos $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ on vastaavan normaaliryhmän ratkaisu.

Jos differentiaaliyhtälöön (1) liittyy alkuehto

$$y(x_0)=\hat{y}_0, y'(x_0)=\hat{y}_1, y''(x_0)=\hat{y}_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=\hat{y}_{n-1}$$

missä $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n$ ovat annettuja lukuja, niin normaaliryhmän alkuehdoksi tulee

$$\begin{cases} y_1(x_0)=\hat{y}_1 \\ y_2(x_0)=\hat{y}_2 \\ \quad \dots \\ y_n(x_0)=\hat{y}_n \end{cases}$$

Skalaarisen ensimmäinen kertaluvun differentiaaliyhtälön $y'=f(x, y)$ *kulmakerroinkenttä* koostuu lyhyistä viivoista siten, että kohdassa (x, y) olevan viivan kulmakerroin on $f(x, y)$. Viivat ovat silloin differentiaaliyhtälön ratkaisun tangentin suuntaisia, jolloin kulmakerroinkenttää käyttäen voidaan hahmotella ratkaisun kulku.

Ensimmäinen kertaluvun autonomisen differentiaaliyhtälöparin

$$\begin{cases} y_1'=f_1(y_1, y_2) \\ y_2'=f_2(y_1, y_2) \end{cases}$$

suuntakenttä koostuu $y_1 y_2$ -faasiavaruuden[1] lyhyistä viivoista siten, että kohdassa (y_1, y_2) oleva viiva on vektorin

$$f_1(y_1, y_2)\boldsymbol{i}+f_2(y_1, y_2)\boldsymbol{j}$$

suuntainen. Viivat ovat silloin faasiavaruudessa differentiaaliyhtälön ratkaisun suuntaisia, jolloin suuntakenttää käyttäen voidaan hahmotella ratkaisun kulku.

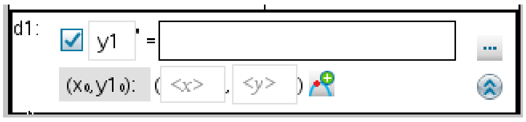
10.2.2 Differentiaaliyhtälöiden numeerinen ratkaiseminen

Differentiaaliyhtälöitä voi numeerisesti ratkaista piirtosivulla joko luonnossivun piirtotilassa, kuvaajat-sovelluksessa tai geometria-sovelluksessa[2]. Differentiaaliyhtälön ratkaiseminen aloitetaan menu-valikon komennolla **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus** >> **7: Diff Eq**. Tällöin näytön alaosaan aukeaa syöttörivi,

---

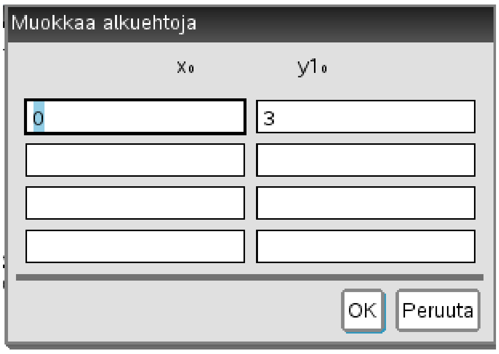
[1] Muista muita faasiavaruuksia voi olla.

[2] Geometria-sovelluksessa on valittava kuvaajien piirto menu-valikon komennolla **2: Näytä >> 1 Kuvaajat**.



jonne kirjoitetaan ensin normaaliryhmän derivaatan $y_1{}'$ lauseke ja sen alapuolella alkuehdon $y(x_0)=\hat{y}_0$ arvot x_0 ja $\hat{y}_0$. Sitten painetaan nuolinäppäintä ▼ ja kirjoitetaan derivaatan $y_2{}'$ lauseke jne. Riippumattomana muuttujana on *x* ja ratkaistavat funktiot ovat $y_1, y_2, \ldots$

Painiketta käyttäen aukeaa ikkuna, jossa voi syöttää useita eri alkuehtoja.

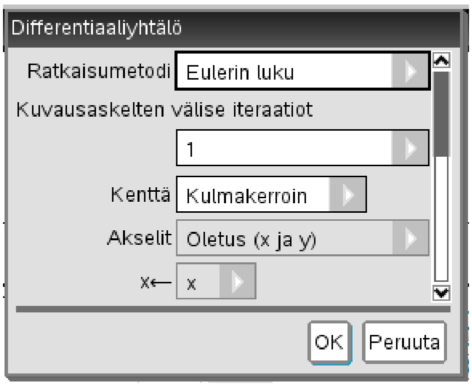


Tällöin piirretään kutakin annettua alkuarvoa vastaavan ratkaisun kuvaaja.

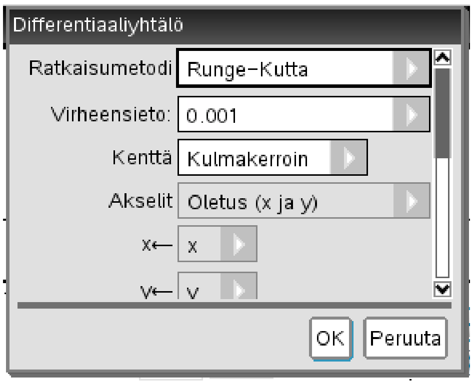
Painamalla syöttörivillä olevaa painiketta ⋯, aukeaa differentiaaliyhtälön ratkaisemisen parametri-ikkuna, jossa määritetään differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemista ohjaavia asioita.

Ratkaisumenetelmä annetaan ikkunan kohdassa **Ratkaisumetodi**. Ratkaisumenetelmiä on kaksi:

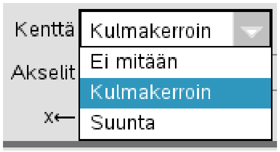
- **Eulerin menetelmä**, joka voi olla iteratiivinen. Iteraatioiden lukumäärä annetaan.



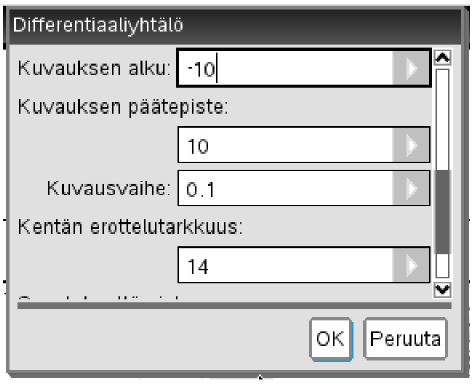
- **Runge-Kutta-menetelmä**, jossa annetaan virhetoleranssi.



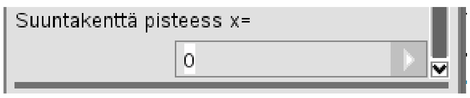
Kumpaakin menetelmää käytettäessä voidaan piirtää kulmakerroin- tai suuntakenttä.



Differentiaaliyhtälön ratkaisemisen parametri-ikkunassa annetaan myös piirron alku- ja loppupisteet sekä askelpituus[1]. Kohdassa **Kentän erottelutarkkuus** annetaan kulmakerroin- ja suuntakentän viivojen vaakasuuntainen lukumäärä.



Kohdassa **Suuntakenttä pisteess x =** asetetaan ei-autonomisen differentiaaliyhtälöparin suuntakenttää piirrettäessä tarvittava riippumattoman muuttujan *x* arvo.



Kuvan käsittelyyn on käytettävissä samat komennot kuin funktioesityksen kuvan käsittelyyn.

Syöttöriville pääsee uudelleen näppäimellä tab.

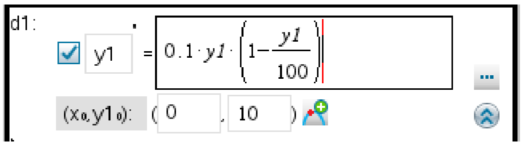
[1] Laskimen käyttämät suomenkieliset nimitykset ovat vähän outoja.

ESIMERKKEJÄ

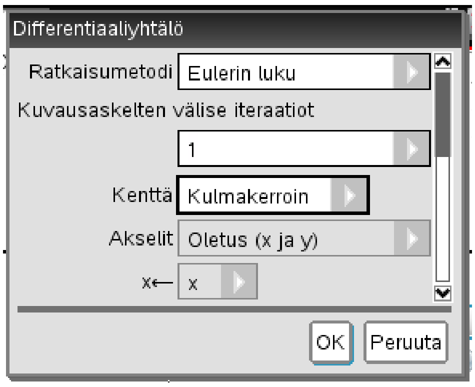
1. Tarkastellaan *logistisen kasvumallin differentiaaliyhtälöä*

$$y'=0{,}1\,y\left(1-\frac{y}{100}\right)\quad,\quad y(0)=10$$

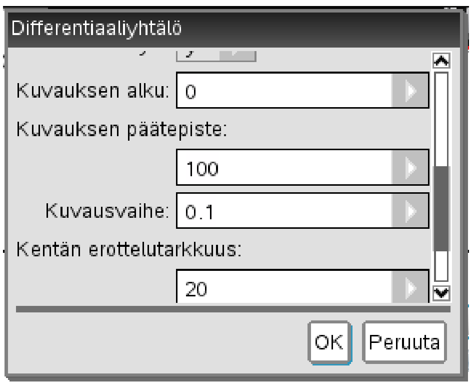
Annetaan menu-valikon komento **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 7: Diff Eq** ja syötetään differentiaaliyhtälö ja alkuehto.



Käytetään Eulerin menetelmää ja piirretään kuvaan kulmakerroinkenttä.



Ratkaistaan differentiaaliyhtälö välillä $[0,\ 100]$ käyttäen piirrossa askelpituutta 0,1.

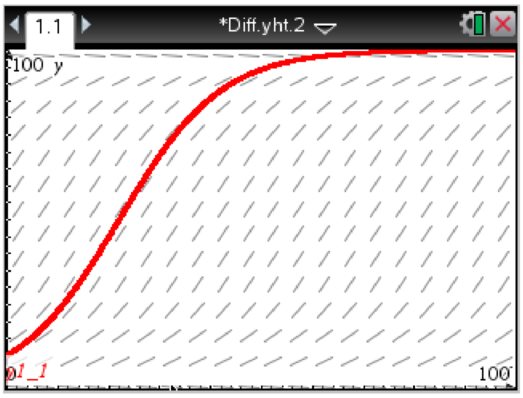


Asetetaan piirron ikkuna-asetus menu-valikon komento **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** siten, että

x: 0 … 100

y: 0 … 100

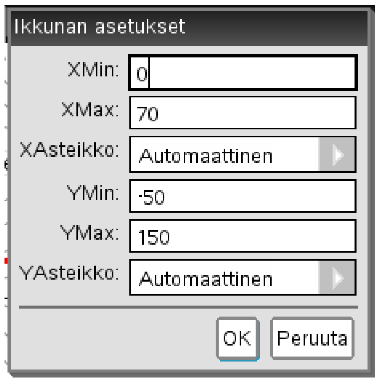
Tällöin saadaan seuraava kuvaaja:



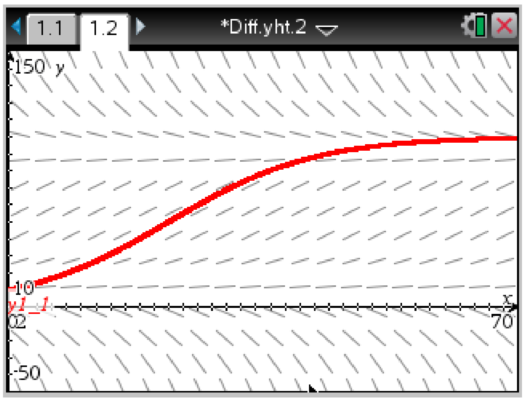
Ratkaisun arvoja voi tutkia kuvaajasta menu-valikon komennolla **5: Jäljitys >> 1: Jäljitä kuvaaja**.

Kuvasta huomataan, että ratkaisukäyrä kulkee kulmakerroinkentän viivojen mukaisesti.

Piirretään kuva ikkuna-asetuksilla



jolloin saadaan



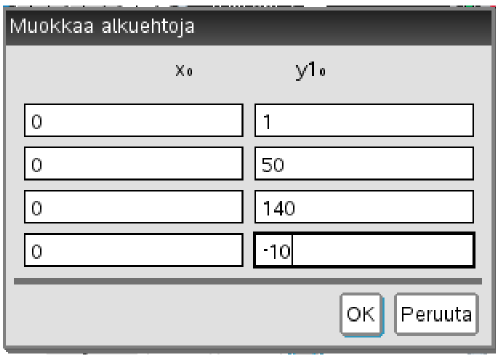
Kuvasta nähdään, että jos differentiaaliyhtälön alkuarvo

- $y(0)>0$, niin ratkaisu lähestyy kohden arvoa 100, kun x kasvaa.
- $y(0)<0$, niin ratkaisu pienenee koko ajan, kun x kasvaa.

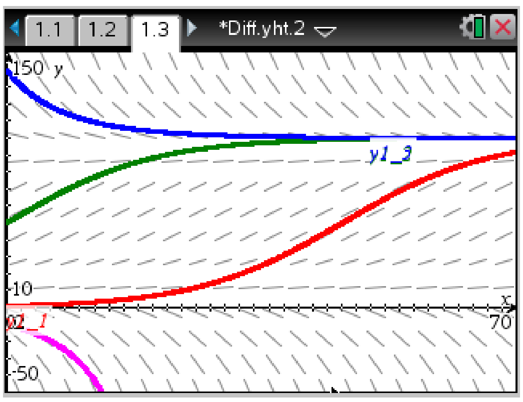
Kokeillaan tätä. Tutkitaan differentiaaliyhtälön ratkaisun käyttäytymistä seuraavilla alkuehdoilla:

$$y(0)=1 \quad , \quad y(0)=50 \quad , \quad y(0)=140 \quad , \quad y(0)=-10 \quad .$$

Tämä saadaan aikaiseksi painamalla differentiaaliyhtälön syöttörivin painiketta  ja laittamalla esille aukeavaan ikkunaan lisäalkuehdot



Laskin piirtää nyt seuraavanlaisen kuvan



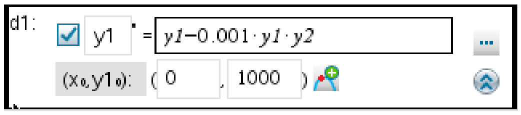
joka on odotusten mukainen.

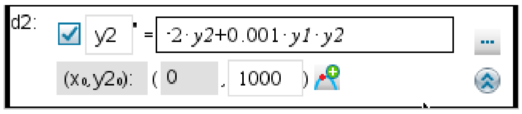
♦

2. Tarkastellaan *Lotkan-Volterran differentiaaliyhtälöä* eli *saalis-saalistaja-mallia*

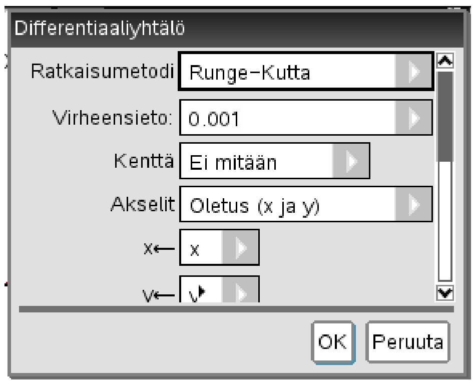
$$\begin{cases} y_1{}'=y_1-0{,}001\,y_1\,y_2 \\ y_2{}'=-2\,y_2+0{,}001\,y_1\,y_2 \end{cases},\quad \begin{cases} y_1(0)=1000 \\ y_2(0)=1000 \end{cases}$$

Annetaan menu-valikon komento **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 7: Diff Eq** ja syötetään differentiaaliyhtälö ja alkuehdot.

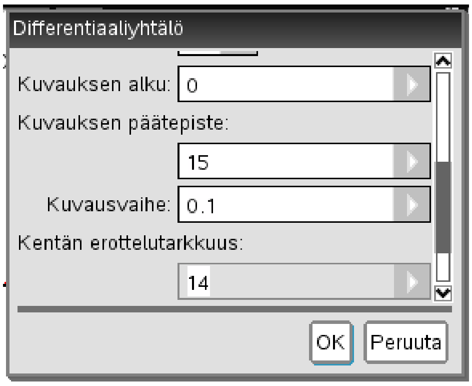




Käytetään Runge-Kutta-menetelmää, kenttäviivoja ei piirretä.



Ratkaistaan differentiaaliyhtälö välillä $[0,\ 15]$ käyttäen piirrossa askelpituutta 0,1.

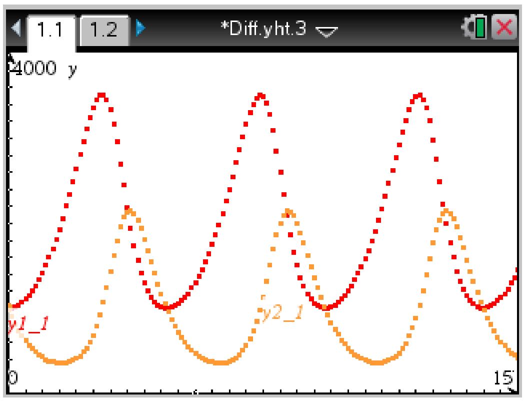


Asetetaan piirron ikkuna-asetus menu-valikon komennolla **4: Ikkuna >> 1: Ikkunan asetukset...** siten, että

x: 0 … 15

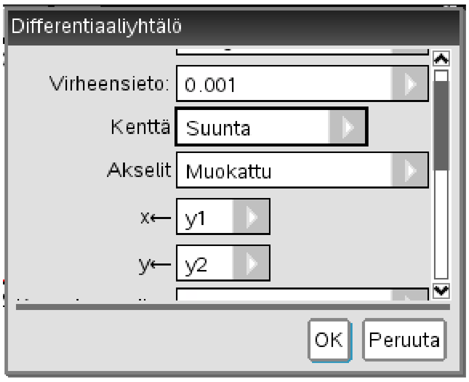
y: 0 … 4000

Tällöin saadaan seuraava kuva:

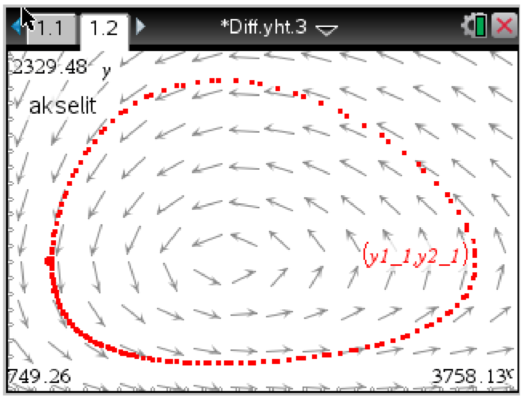


Oletusasetusarvoilla piirretään y_1 ja y_2, jos syöttörivillä molemmissa differentiaaliyhtälöissä on valintaväkänen. Nähdään, että ratkaisut ovat jaksollisia funktioita.

Piirretään myös faasikuva $y_1 y_2$ -avaruudessa ja suuntakenttä.



Seuraavan kuvan ikkuna-asetus on saatu menu-valikon komennolla **4: Ikkuna >> A: Zoomaa – Sovita**.



Kuvasta huomataan, että ratkaisu kulkee suuntakenttäviivojen mukaisesti.

♦

3. Tarkastellaan kolmannen kertaluvun lineaarista ei-vakiokertoimista differentiaaliyhtälöä

$$y'''+y''+xy'+xy=x\sin x$$

alkuehdoilla

$$y(0)=3,\quad y'(0)=1,\quad y''(0)=0\ .$$

Muunnetaan differentiaaliyhtälö normaaliryhmäksi ratkaisemalla korkein derivaatta

$$y'''=-y''-xy'-xy+x\sin x$$

ja määrittelemällä funktiot

$$\begin{cases} y_1=y \\ y_2=y' \\ y_3=y'' \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = y_3 \\ y_3' = y''' = -y'' - x\,y' - x\,y + x \sin x = -y_3 - x\,y_2 - x\,y_1 + x \sin x \end{cases}$$

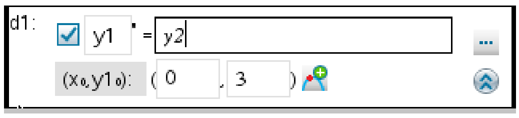
josta saadaan normaaliryhmä

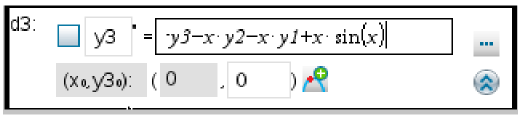
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_3 - x\,y_2 - x\,y_1 + x \sin x \end{cases}$$

Alkuehto on

$$\begin{cases} y_1(0) = 3 \\ y_2(0) = 1 \\ y_3(0) = 0 \end{cases}$$

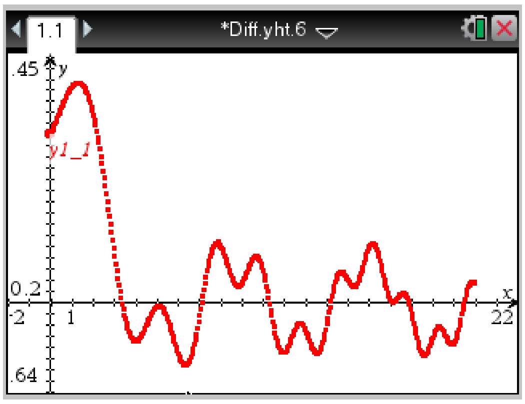
Annetaan **menu**-valikon komento **3: Kuvaajan syöttö/Muokkaus >> 7: Diff Eq** ja syötetään differentiaaliyhtälö ja alkuehdot.





Edellä valintaväkänen on laitettu ensimmäisen differentiaaliyhtälön kohdalla, jolloin piirretään differentiaaliyhtälön ratkaisu y_1.

Käytetään Runge-Kutta-menetelmää, kenttäviivoja ei piirretä. Ratkaistaan differentiaaliyhtälö välillä 0 … 20 käyttäen piirrossa askelpituutta 0,05. Asetetaan ikkuna-asetus **menu**-valikon komennolla **4: Ikkuna >> A: Zoomaa – Sovita**. Tällöin saadaan seuraava kuva.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Ratkaise numeerisesti välillä [1, 10] alkuarvoprobleema

$$y' + \frac{y}{x} = 5\sin 2x\,,\quad y(1) = -2\quad .$$

2. Ratkaise numeerisesti välillä [0, 15] alkuarvoprobleema

$$y'' + \sin(t)\,y' + 9y = 2\sin 4t\,,\quad y(0) = 1,\, y'(0) = 0\quad .$$

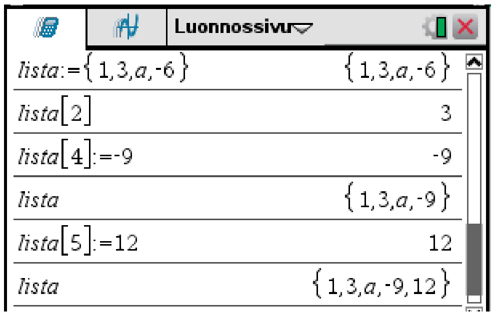
11. LISTAT

11.1 Listoilla laskeminen

Laskimessa lista koostuu aaltosulkujen sisällä olevista pilkulla erotetuista alkioista. Listan alkioihin viitataan hakasuluissa olevalla indeksillä, joka ilmoittaa monesko listan alkio on kyseessä. Listan alkio voidaan muuttaa sijoituskäskyllä ja listaan voi lisätä alkioita yksi kerrallaan sijoituskäskyllä.

ESIMERKKEJÄ

1. Listan luonti ja käsittely.

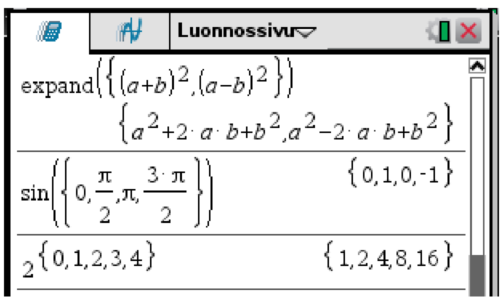


♦

Listaan kohdistetut operaatiot suoritetaan kullekin listan alkioille erikseen. Yhtä pitkillä listoilla voi laskea alkioittain. Yksittäinen alkio käsitetään minkä tahansa listan pituiseksi sama-alkioiseksi listaksi.

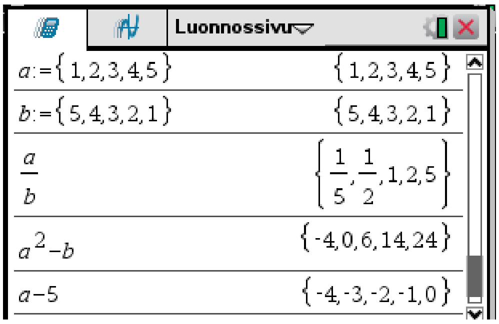
ESIMERKKEJÄ

2. Listaan kohdistettuja operaatioita.



♦

3. Listoilla laskentaa.



♦

Jotkut komennot tuottavat listoja. Tärkeä tällainen komento on menu-valikon komento **3: Algebra >> 4: Nollakohdat**, joka näkyy syöttörivillä komentona **zeros**. Komento määrittää funktion nollakohdat.

Jos yhtälöllä on useita ratkaisuja ja niitä pitää jatkotyöstää, voi olla parempi komennon **solve** sijasta käyttää komentoa **zeros**. Koska

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$$

voidaan yhtälö aina muuttaa nollakohtien määrittämiseksi tai päinvastoin. Siis komennot

solve(f(x)=g(x), x)

ja

zeros(f(x)-g(x), x)

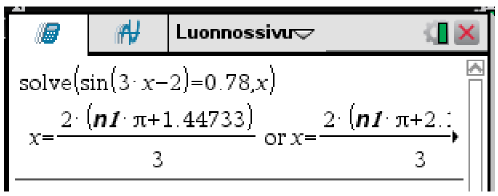
antavat saman ratkaisujoukon.

ESIMERKKEJÄ

4. Ratkaistaan yhtälö[1]

$$\sin(3x-2)=0{,}78$$

Solve-komento antaa tuloksen



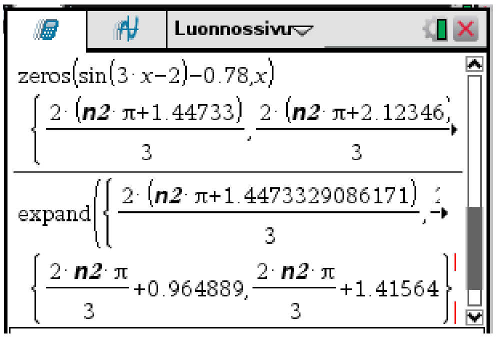
jossa pitäisi suorittaa vielä kerto- ja jakolaskut. Tämä ei kuitenkaan onnistu yhdellä komennolla, vaan ratkaisujoukon molemmat osat on käsiteltävä erikseen.

Muuttamalla yhtälö muotoon

[1] Tätä esimerkkiä on käsitelty myös luvussa 2.1.

$$\sin(3x-2)-0{,}78=0 \quad ,$$

voidaan käyttää **zeros**-komentoa, jonka tulos on listarakenne. Tähän voidaan kohdistaa **expand**-komento.



Ratkaisu on siis

$$x=0{,}964889+n\cdot\frac{2\pi}{3} \quad \text{tai} \quad x=1{,}41564+n\cdot\frac{2\pi}{3}$$

♦

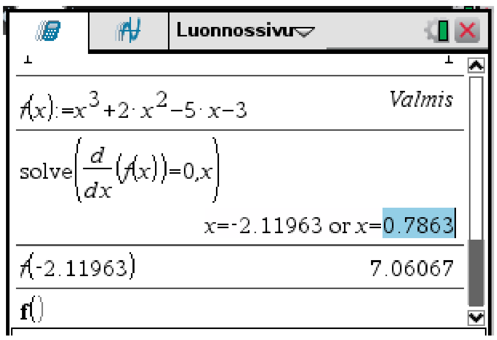
5. Lasketaan funktion[1]

$$f(x)=x^3+2x^2-5x-3$$

arvot funktion derivaatan nollakohdissa.

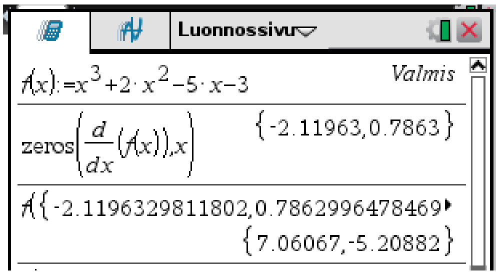
Tallennetaan funktio ensin funktioksi $f(x)$.

Käytettäessä **solve**-komentoa derivaatan nollakohtien määrittämiseen, on funktion arvot nollakohdissa laskettava erikseen kullekin nollakohdalle.

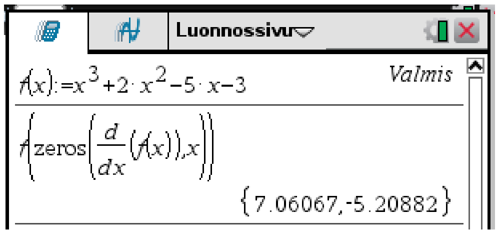


Käytettäessä **zeros**-komentoa derivaatan 0-kohtien määrittämiseen, voidaan funktion arvot nollakohdissa laskea yhdellä käskyllä ja tarkkuus säilyy.

[1] Tätä esimerkkiä on käsitelty myös luvussa 2.1.



Koko asia voidaan tehdä vielä lyhyemmin.

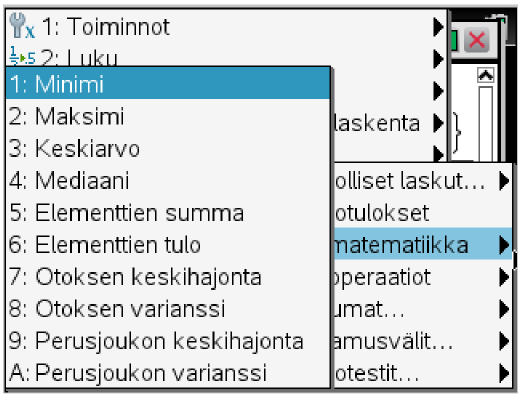


Funktio arvot derivaatan nollakohdissa ovat siis $7{,}06067$ ja $-5{,}20882$.

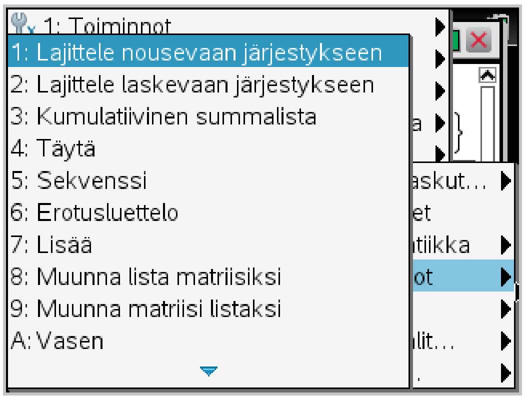
♦

11.2 Listaoperaatiot

Listoihin liittyviä komentoja löytyy menu-valikon **6: Tilasto** valikoista **3: Listamatematiikka**



ja **4: Listaoperaatiot**.

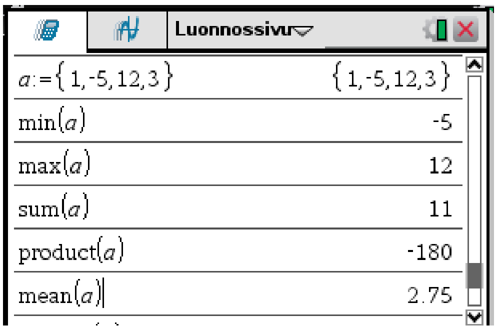


Valikon **3: Listamatematiikka** komennoilla voi määrittää listan

- pienimmän ja suurimman alkion. Komennot näkyvät syöttörivillä muodossa **min** ja **max**.
- listan alkioiden elementtien summan ja tulon. Komennot näkyvät syöttörivillä muodossa **sum** ja **product**.
- joitain tilastollisia tunnuslukuja.

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan listamatematiikkakomentoja.



♦

Listoja voi lajitella valikon **4: Listaoperaatiot** komennoilla

- **1: Lajittele nousevaan järjestykseen**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **sortA**.
- **2: Lajittele laskevaan järjestykseen**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **sortD**.

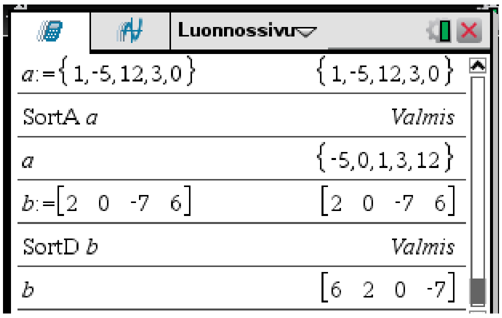
Komennon **sortA** muoto on

sortA *kohde*

missä *kohde* on listan tai vektorin nimi. Komento järjestää listan tai vektorin *kohde* alkiot nousevaan järjestykseen. Vastaavasti tietenkin komento **sortD**.

ESIMERKKEJÄ

2. Kokeillaan lajittelua.

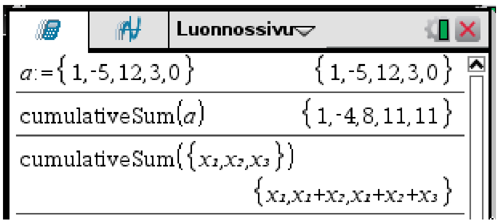


♦

Valikon **4: Listaoperaatiot** komento **3: Kumulatiivinen summalista** luo uuden listan, jossa jokainen lähtölistan alkio on korvattu alkion ja sitä edeltävien alkioiden summalla. Komento näkyy syöttörivillä komentona **cumulativeSum**.

ESIMERKKEJÄ

3. Kokeillaan kumulatiivisen summalistan muodostamista.



♦

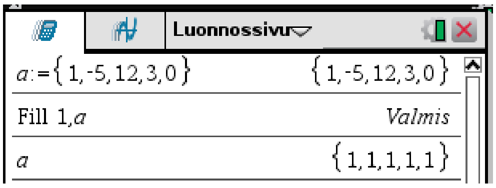
Valikon **4: Listaoperaatiot** komento **4: Täytä** näkyy syöttörivillä komentona **Fill**. Komennon muoto on

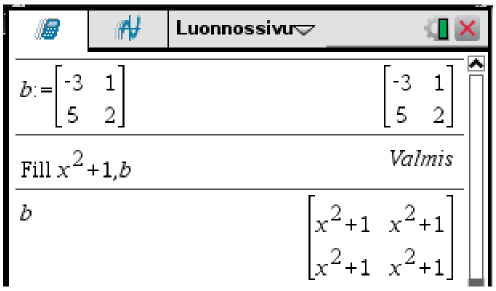
Fill *lauseke, kohde*

missä *kohde* on lista tai matriisi. Komento korvaa muuttujan *kohde* alkiot lausekkeella *lauseke*.

ESIMERKKEJÄ

4. Kokeillaan komentoa **Fill**.





♦

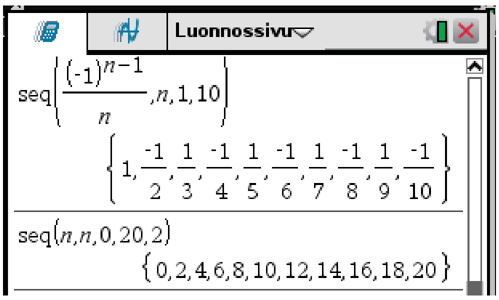
Valikon **4: Listaoperaatiot** komento **5: Sekvenssi** näkyy syöttörivillä komentona **seq**. Komennon muoto on

seq(lauseke, muuttuja, alaraja, yläraja, askel)

Komento muodostaa listan lausekkeen **lauseke** arvoista, kun **muuttuja** askeltaa arvosta **alaraja** arvoon **yläraja** käyttäen askelpituutta **askel**. Komennon argumentin **askel** voi jättää pois. Sen oletusarvo on 1.

ESIMERKKEJÄ

5. Muodostetaan listoja komennolla **seq**.



♦

Valikon **4: Listaoperaatiot** komento **7: Lisää** yhdistää kaksi listaa[1] peräkkäin. Komento näkyy syöttörivillä muodossa **augment**.

ESIMERKKEJÄ

[1] tai matriisia, ks. luku 8.1

6. Asetetaan listoja peräkkäin.

♦

Listasta voi valita osalistoja valikon **4: Listaoperaatiot** komennoilla

- **A: Vasen**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **left**. Komennon muoto on

  left(lista, k)

  Komento valitsee listasta **lista** **k** vasemmanpuoleista alkiota.
- **B: Keski**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **mid**. Komennon muoto on

  mid(lista, i, k)

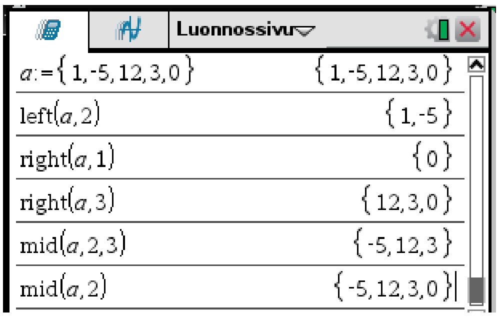
  Komento valitsee listan **lista** **i**:nnesta alkiosta alkaen **k** alkiota. Jos argumentti **k** jätetään pois otetaan listaan kaikki alkiot **i**:nnesta alkaen.
- **C: Oikea**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **right**. Komennon muoto on

  right(lista, k)

  Komento valitsee listasta **lista** **k** oikeanpuoleisinta alkiota.

ESIMERKKEJÄ

7. Kokeillaan osalistojen valintaa.



♦

Muunnoksia listojen ja matriisien välillä voidaan suorittaa valikon **4: Listaoperaatiot** komennoilla

- **8: Muunna lista matriisiksi**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **list▶mat**. Komennon muoto on

  list▶mat(lista, sarakkeiden lukumäärä)

Komento muodostaa listan **lista** alkioista riveittäin matriisin, jonka sarakkeiden lukumäärä on annettu. Tarvittaessa matriisin viimeiselle riville lisätään nollia. Jos argumenttia **sarakkeiden lukumäärä** ei anneta, on tuloksena vaakavektori. Siis komento

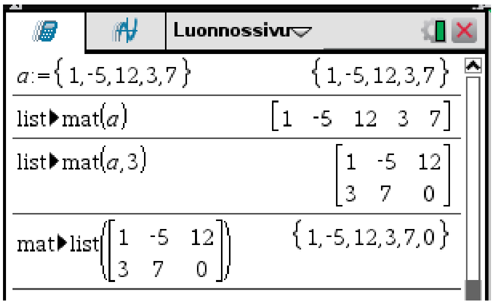
list►mat(lista)

muuntaa listan vaakavektoriksi.

- **9: Muunna matriisi listaksi**. Komento näkyy syöttörivillä komentona **mat►list**. Komento muodostaa matriisin alkioista riveittäin listan.

ESIMERKKEJÄ

8. Kokeillaan muunnoksia.



♦

12. LOGIIKKAA JA BITTIOPERAATIOITA

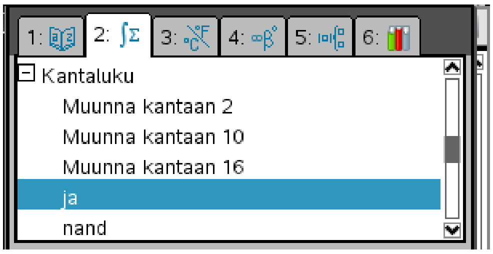
12.1 Logiikan operaatiot

Laskimella voi käsitellä loogisia lauseita. Laskimessa totuusarvot ovat

true = tosi

false = epätosi.

Totuusarvoja voi sijoittaa muuttujiin. Muuttuja on looginen muuttuja, jos sen mahdolliset arvot ovat totuusarvoja. Loogisia muuttujia ja totuusarvoja voi yhdistää konnektiiveilla eli logiikan operaattoreilla. Logiikan operaattorit löytyvät ryhmästä **Kantaluku** komentojen aiheen mukaisesta ryhmittelystä, joka saadaan näppäimillä 2.



Ainoa unaarinen operaattori on **not**, negaatio, joka tulee operandin eteen muodossa

not operandi

Muut operaattorit on binäärisiä ja tulevat operandien väliin muodossa

operandi1 **operaattori** operandi2

Seuraavaan taulukkoon on koottu loogiset perusoperaattorit.

Komento	Laskimessa	Merkitys	Toiminta
ei	**not**	negaatio	Vaihtaa totuusarvon.
ja	**and**	konjunktio	Arvo on tosi, jos molemmat operandit ovat tosia, muuten epätosi.
tai	**or**	disjunktio	Arvo on epätosi, jos molemmat operandit ovat epätosia, muuten tosi.
nand	**nand**	ei-ja	Arvo on epätosi, jos molemmat operandit ovat tosia, muuten tosi.
eikä	**nor**	ei-tai	Arvo on tosi, jos molemmat operandit ovat epätosia, muuten epätosi.
xor	**xor**	poissulkeva tai	Arvo on tosi, jos molemmilla operandeilla on eri totuusarvot, muuten epätosi.
⇒	**⇒**	implikaatio	Arvo on epätosi, jos vasen operandi tosi ja oikea epätosi, muuten tosi.
⇔	**⇔**	ekvivalenssi	Arvo on tosi, jos molemmilla operandeilla on sama totuusarvo, muuten epätosi.

Loogiset lauseet koostuvat totuusarvoista tai totuusarvoisista muuttujista ja niitä yhdistävistä konnektiiveista. Loogisia lauseita kirjoitettaessa käytetään tarvittaessa sulkuja. Sulkujen käyttöä vähentävät seuraavat presedenssisäännöt

- Negaatio **not** suoritetaan ennen muita konnektiiveja
- Konnektiivi **and** suoritetaan ennen[1] muita binäärisiä konnektiiveja.
- Muut konnektiivit suoritetaan ennen implikaatiota **⇒** ja ekvivalenssia **⇔**.

Lisäksi

- Peräkkäiset konnektiivit **and** ja **or** voidaan kirjoittaa ilman sulkuja.

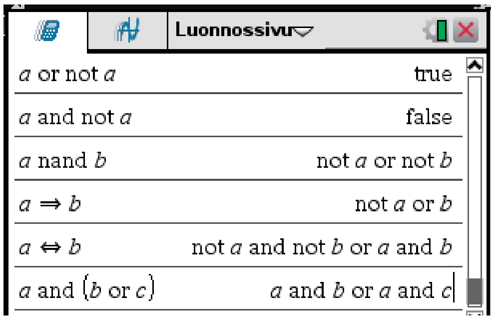
Lause on *tautologia*, jos se on aina tosi. Lauseet p ja q ovat *loogisesti ekvivalentteja*, jos ekvivalenssi $p \Leftrightarrow q$ on tautologia. Tämä merkitsee sitä, että lauseilla p ja q on aina samat totuusarvot. Lauseita p ja q voidaan tällöin pitää samoina lauseina ja kirjoittaa $p = q$.

Laskin sieventää automaattisesti loogiset lauseet ja esittää ne konnektiiveja **not**, **and** ja **or** käyttäen.

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan lauseiden sieventämisestä.

[1] Tämä on päätelty kokeilemalla. Asia ei siis ole aivan varma.



Edellisen mukaan *poissuljetun kolmannen laki*

a **or not** *a*

on tautologia,.

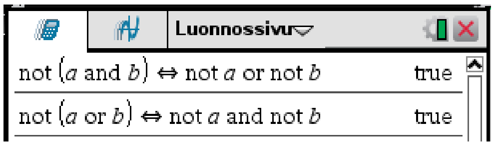
♦

2. *de Morganin kaavojen* mukaan

not (*a* **and** *b*) = **not** *a* **or not** *b*

not (*a* **or** *b*) = **not** *a* **and not** *b*

Tarkistetaan nämä laskimella osoittamalla, että vastaavat ekvivalenssit ovat tautologioita.



♦

TEHTÄVIÄ

1. Osoita laskimella, että lauseet $a \Rightarrow b$ ja **not** (*a* **and not** *b*) ovat loogisesti ekvivalentit.

12.2 Totuustaulujen käyttö

Laskimessa binääriluvut käsitellään 64 binäärinumerolla eli 16 heksanumerolla. Luvun alussa olevia nollia laskin ei esitä. Binääriluvut ovat bittijonoja, joista kullakin bitillä on arvo 0 tai 1. Nämä arvot voidaan ajatella loogisiksi arvoiksi siten, että

1 = tosi

0 = epätosi.

Logiikan perusoperaattorit operoivat bittijonoihin biteittäin: samalla kohdalla oleville biteille lasketaan operaation arvo.

Loogisen lauseen toiminta voidaan kuvata *totuustaululla*, jossa on esitetty lauseessa olevien totuusarvomuuttujien kaikki mahdolliset arvokombinaatiot ja niitä vastaavat loogisen lauseen arvot.

ESIMERKKEJÄ

1. Esitetään joidenkin perusoperaattoreiden totuustaulut. Nämä ovat samalla näiden operaattoreiden määritelmät.

   Negaation totuustaulu:

a	**not** *a*
0	1
1	0

   Konjunktion totuustaulu:

a	*b*	*a* **and** *b*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

   Disjunktion totuustaulu:

a	*b*	a **or** *b*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

♦

2. Muodostetaan loogisen lauseen

   a **or** (**not** *b* **and** *c*)

   totuustaulu.

a	b	c	**not** b	**not** b **and** c	a **or** (**not** b **and** c)
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	1	0	0	1

♦

Laskimella voidaan muodostaa sellaisten loogisten lauseiden totuustaulut, joissa totuusarvomuuttujien lukumäärä on korkeintaan 6. Totuusarvomuuttujien p_1, p_2, … kaikki kombinaatiot saadaan seuraavilla tavoilla.

Lukumäärä	Bittimuuttujat
1	p_1 = `0b10`
2	p_1 = `0b1010` = `0hA` p_2 = `0b1100` = `0hC`
3	p_1 = `0hAA` p_2 = `0hCC` p_3 = `0hF0`
4	p_1 = `0hAAAA` p_2 = `0hCCCC` p_3 = `0hF0F0` p_4 = `0hFF00`
5	p_1 = `0hAAAAAAAA` p_2 = `0hCCCCCCCC` p_3 = `0hF0F0F0F0` p_4 = `0hFF00FF00` p_5 = `0hFFFF0000`
6	p_1 = `0hAAAAAAAAAAAAAAAA` p_2 = `0hCCCCCCCCCCCCCCCC` p_3 = `0hF0F0F0F0F0F0F0F0` p_4 = `0hFF00FF00FF00FF00` p_5 = `0hFFFF0000FFFF0000` p_6 = `0hFFFFFFFF00000000`

Kun laskimella muodostetaan bittijonojen loogisia lauseita on huomattava seuraavaa:

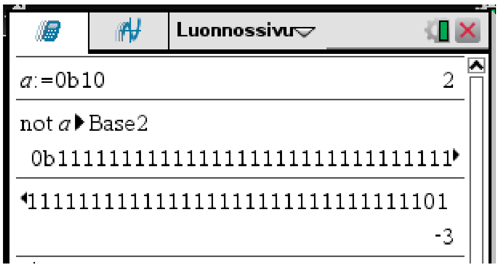
- Laskin käsittelee bittijonoja aina 64-bittisinä, jolloin bittijonon alkuun voi tulla asiayhteyteen kuulumattomina ykkösiä. Ne voidaan poistaa ottamalla tuloksen konjunktio (**and**-operaatio) sopivan ykkösbittijonon kanssa. Seuraavassa taulukossa on esitetty tällaiset sopivat ykkösbittijonot.

Lukumäärä	Bittimuuttujat
1	p = `0b11`
2	p = `0b1111` = `0hF`
3	p = `0hFF`
4	p = `0hFFFF`
5	p = `0hFFFFFFFF`

- Laskin ei esitä bittijonon mahdollisia alkunollia.

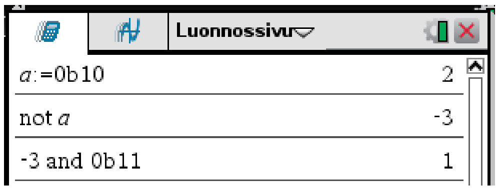
ESIMERKKEJÄ

3. Muodostetaan laskimella negaation totuustaulu.



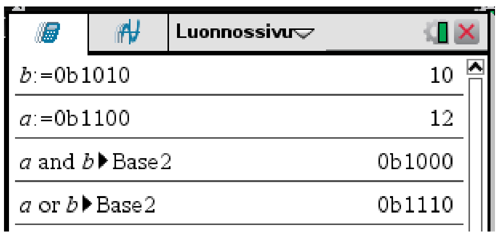
Toisen rivin komento tuottaa bittijonon, jonka alku koostuu ykkösistä. Vain bittijonon kaksi viimeistä bittiä ovat kuitenkin kiinnostavia. Ne ovat näkyvissä kolmannen rivin komennossa.

Seuraavassa on napattu bittijonon kaksi viimeistä bittiä. Koska tällöin ensimmäinen bitti on 0 ei sitä esitetä.



♦

4. Muodostetaan laskimella konjunktion ja disjunktion totuustaulut.

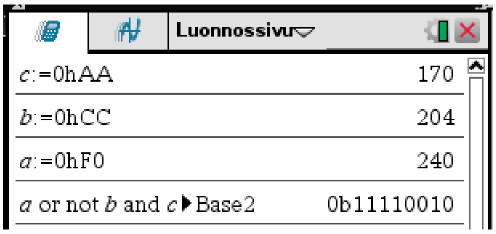


♦

5. Muodostetaan lauseen

$$a \textbf{ or } (\textbf{not } b \textbf{ and } c)$$

totuustaulu laskimella (vrt. Esim. 2).



♦

Koska tautologia on aina tosi, on tautologian totuusarvo 1 totuustaulun jokaisella rivillä. Loogisesti ekvivalenteilla lauseilla p ja q on aina samat totuusarvot, joten looginen ekvivalenssi voidaan todistaa totuustauluja käyttäen joko

- tarkistamalla, että lauseilla p ja q on joka rivillä samat totuusarvot tai
- osoittamalla että ekvivalenssin $p \Leftrightarrow q$ jokaisen rivin totuusarvo on tosi.

ESIMERKKEJÄ

6. Laskin sieventää lauseen

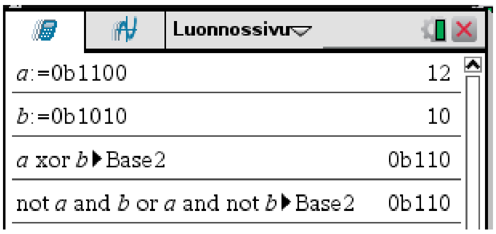
   a **xor** *b*

   muotoon

   not *a* **and** *b* **or** *a* **and not** *b*

Tarkistetaan totuustauluja käyttäen, että

a **xor** *b* = **not** *a* **and** *b* **or** *a* **and not** *b*



Koska lauseilla on joka rivillä samat totuusarvot, ovat lauseet samoja.

♦

Jos tiedetään lauseen p totuustaulu, voidaan muodostaa lauseen kanssa loogisesti ekvivalentti lause seuraavilla vaihtoehtoisilla tavoilla:

- Jokaista totuustaulun riviä kohden, jolla lause p on tosi, muodostetaan *konjunktio, joka on tosi ainoastaan tällä rivillä*. Sen jälkeen muodostetaan kaikkien näiden *konjunktioiden disjunktio*. Se on tosi vain niillä riveillä joilla p on tosi, joten se on loogisesti ekvivalentti p:n kanssa. Saatua muotoa sanotaan lauseen p **disjunktiiviseksi normaalimuodoksi**.
- Jokaista totuustaulun riviä kohden, jolla lause p on epätosi, muodostetaan *disjunktio, joka on epätosi ainoastaan tällä rivillä*. Sen jälkeen muodostetaan kaikkien näiden *disjunktioiden konjunktio*. Se on epätosi vain niillä riveillä joilla p on epätosi, joten se on loogisesti yhtäpitävä p:n kanssa. Saatua muotoa sanotaan lauseen p **konjunktiiviseksi normaalimuodoksi**.

Koska jokainen looginen lause voidaan esittää totuustaulun avulla, voidaan jokainen looginen lause esittää sekä disjunktiivisessa että konjunktiivisessa normaalimuodossa.

ESIMERKKEJÄ

7. Muodostetaan lause, joka on loogisesti ekvivalentti lauseen p kanssa. Lause p on määritelty seuraavalla totuustaululla:

a	b	c	P
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Muodostetaan sekä disjunktiivinen että konjunktiivinen normaalimuoto

<u>Disjunktiivinen normaalimuoto</u>: Lause p on tosi totuustaulun vaakariveillä 1, 3 ja 7.

- lause **not** *a* **and not** *b* **and not** *c* on tosi vain rivillä 1
- lause **not** *a* **and** *b* **and not** *c* on tosi vain rivillä 3
- lause *a* **and** *b* **and not** *c* on tosi vain rivillä 7

Lauseiden disjunktio on tosi täsmälleen silloin, kun ainakin yksi sen jäsen on tosi. Siten lause p on

(**not** *a* **and not** *b* **and not** *c*) **or** (**not** *a* **and** *b* **and not** *c*) **or** (*a* **and** *b* **and not** *c*)

<u>Konjunktiivinen normaalimuoto</u>: Lause p on epätosi totuustaulun vaakariveillä 2, 4, 5, 6 ja 8:

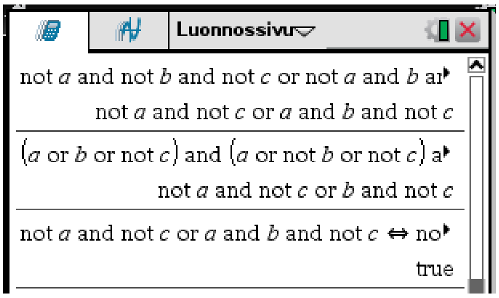
- lause *a* **or** *b* **or not** *c* on epätosi vain rivillä 2
- lause *a* **or not** *b* **or not** *c* on epätosi vain rivillä 4

- lause **not** *a* **or** *b* **or** *c* on epätosi vain rivillä 5
- lause **not** *a* **or** *b* **or not** *c* on epätosi vain rivillä 6
- lause **not** *a* **or not** *b* **or not** *c* on epätosi vain rivillä 8

Lauseiden konjunktio on epätosi täsmälleen silloin, kun ainakin yksi sen jäsen on epätosi. Siten lause *p* on

(*a* **or** *b* **or not** *c*) **and** (*a* **or not** *b* **or not** *c*) **and** (**not** *a* **or** *b* **or** *c*) **and**
(**not** *a* **or** *b* **or not** *c*) **and** (**not** *a* **or not** *b* **or not** *c*)

Sievennetään saadut lauseet laskimella.



Disjunktiivinen normaalimuoto sievenee muotoon (ylempi lasku)

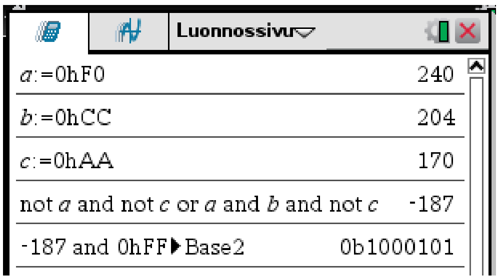
not *a* **and not** *c* **or** *a* **and** *b* **and not** *c*

ja konjunktiivinen normaalimuoto muotoon (keskimmäinen lasku)

not *a* **and not** *c* **or** *b* **and not** *c*

Alinna on tarkistettu, että nämä lauseet ovat loogisesti ekvivalentteja.

Tarkistetaan vielä, että ylimmän lauseen totuustaulu on sama kuin lauseen *p* totuustaulu.



Komento tuottaa ykkösillä alkavan jonon[1], josta on leikattu haluttu osa näkyviin. Alkunollaa laskin ei näytä. Havaitaan, että totuustaulu on sama kuin alkuperäisen lauseen totuustaulu.

♦

[1] Tätä ei ole tulostettu.

TEHTÄVIÄ

1. Muodosta laskimella seuraavien lauseiden totuustaulut.

   a) *a* **or not** *b* ⇒ *b* **or not** *a*

   b) (*a* **and** *b* **and not** *c*) **or** (*a* **and not** *b* **and not** *c*)

4. a) Esitä seuraavan totuustaulun mukainen lause sekä disjunktiivisessa että konjunktiivisessa normaalimuodossa.

a	*b*	*c*	*p*
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

   b) Sievennä saamasi muodot laskimella.

   c) Tarkista, että sivennettyjen lauseiden totuustaulut ovat oikein.

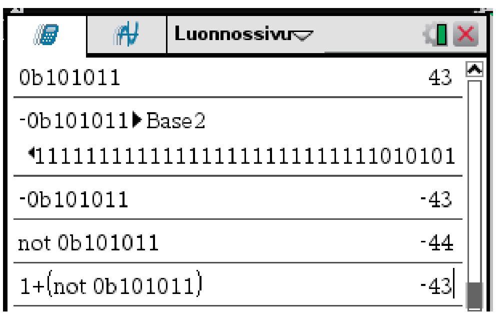
12.3 Bittioperaatioita

Näppäin (−) muodostaa binääriluvun *kahden komplementin*, joka on binääriluvun negaatio + 1. Siis[1]

- binääriluku = 1 + **not** binääriluku

ESIMERKKEJÄ

1. Kokeillaan kahden komplementin muodostamista luvulla 0b101011.



[1] Laskimessa on laskettava tässä järjestyksessä.

Rivillä kaksi nähdään, että -0b101011 on luvun 0b101011 kahden komplementti.

♦

Komentojen aiheen mukaisen ryhmittelyn[1] ryhmän **Kantaluku** komennolla

- **Siirrä** siirretään bittijonoa oikealle tai vasemmalle. Komento näkyy syöttörivillä komentona **shift**.
- **Kierrä** kierretään bittijonoa oikealle tai vasemmalle. Komento näkyy syöttörivillä komentona **rotate**.

Komennot operoivat 64 bitin muodostamaan bittijonoon.

Komennon **shfit** muoto on

shfit(bittijono, siirtojen lukumäärä)

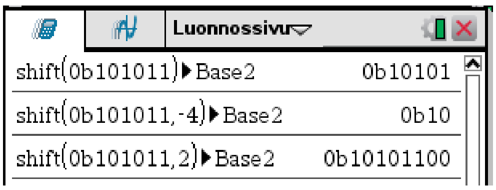
missä

- **bittijono** on kokonaisluku, jonka laskin muuntaa etumerkillisen 64 bitin binäärimuotoon.
- **siirtojen lukumäärä** on kokonaisluku, joka ilmoittaa siirtojen lukumäärän. Oletusarvona on –1. Jos luku on
  - positiivinen tapahtuu siirto vasemmalle siten, että vasemmalta ylivuotavat bitit pudotetaan pois ja oikealle lisätään nollia.
  - negatiivinen tapahtuu siirto oikealle siten, että oikealta ylivuotavat bitit pudotetaan pois ja vasemmanpuoleinen bitti toistuu.

ESIMERKKEJÄ

2. Kokeillaan komentoa **shift**.

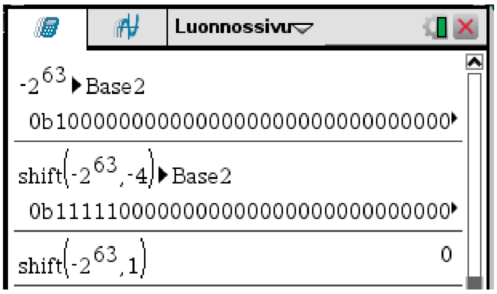
   Seuraavassa on ensin siirto oikealla yhden bitin verran, sitten siirto oikealle neljä bittiä ja viimeiseksi siirto vasemmalle 2 bittiä. Loppuun tulee tällöin nollia.



   Seuraavassa on ensin siirto oikealla neljä bittiä, jolloin vasemmanpuoleinen bitti 1 toistuu. Sitten on siirto oikealle yhden bitin verran, jolloin vasemmanpuoleinen bitti vuotaa yli ja tulokseksi tulee nollabittien jono.

---

[1] Komentojen aiheen mukainen ryhmittely saadaan näppäimillä 2.

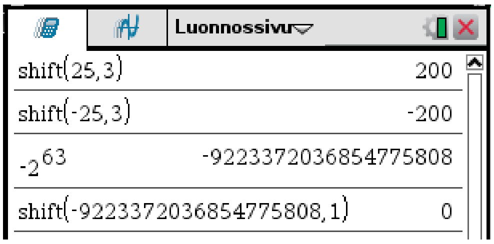


♦

Luvun siirto vasemmalle *n* bitin verran kertoo luvun luvulla 2^n , jos ylivuotoa ei tapahdu.

ESIMERKKEJÄ

3. Kokeillaan vasemmalle siirtoa.



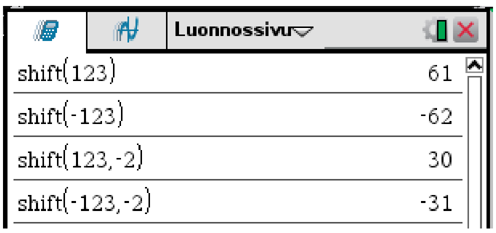
Edellä kaksi ensimmäistä siirtoa suorittaa luvun kertomisen luvulla $2^3=8$. Viimeisessä siirrossa tulee ylivuoto.

♦

Luvun siirto oikealle *n* bitin verran jakaa luvulla 2^n ja pyöristää tuloksen alaspäin kokonaisluvuksi, jos ylivuotoa ei tapahdu.

ESIMERKKEJÄ

4. Kokeillaan oikealle siirtoa.



Kahdessa ensimmäisessä laskussa jaetaan luvulla 2, kahdessa viimeisessä jaetaan luvulla $2^2 = 4$.

♦

Komennossa **rotate** toiselta puolelta poistuneet bitit kiertyvät toiselle puolelle. Komennon muoto on

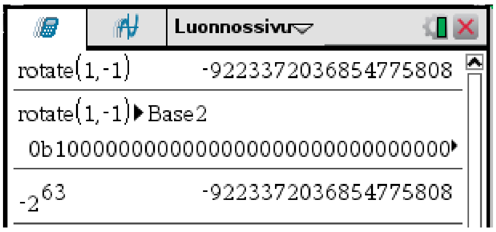
rotate(bittijono, kierron pituus)

missä

- **bittijono** on kokonaisluku, jonka laskin muuntaa etumerkillisen 64 bitin binäärimuotoon.
- **kierron pituus** on kokonaisluku, joka ilmoittaa kierron pituuden. Oletusarvona on –1. Jos luku on
    - positiivinen tapahtuu kierto vasemmalle.
    - negatiivinen tapahtuu kierto oikealle.

ESIMERKKEJÄ

5. Kokeillaan komentoa **rotate**.



Kun luku 1 kierretään vasemmalle, tulee se sellaisen 64-bittisen luvun ensimmäiseksi bitiksi, jonka muut bitit ovat nollia. Luku muuttuu silloin negatiiviseksi.

♦