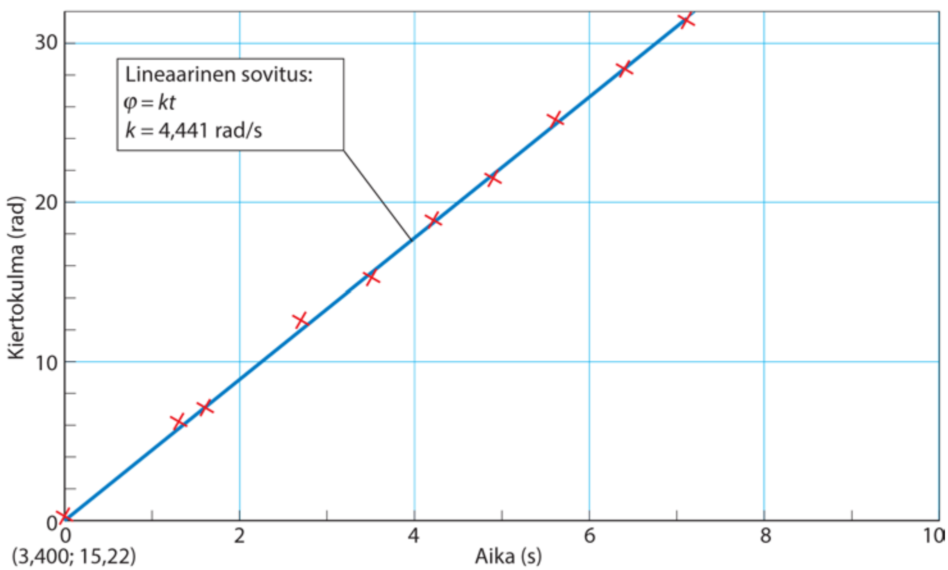
KERTAUSTEHTÄVIEN RATKAISUT

1. Viiteen pyörähdykseen kulunut aika mitattiin neljä kertaa. Lasketaan mitattujen aikojen keskiarvo: $\dfrac{6,40\text{ s}+6,42\text{ s}+6,41\text{ s}+6,41\text{ s}}{4}=6,41\text{s}.$

Pyörimisnopeus on $n=\dfrac{N}{\Delta t}=\dfrac{5}{6,41\text{ s}}\approx 0,8\ \dfrac{1}{\text{s}}.$

2. **a)** Rakolevy on pyörinyt 3,4 ensimmäisen sekunnin aikana 15,22 rad eli

$\dfrac{15,22\text{ rad}}{2\pi\text{ rad}}\approx 2,4$ kierrosta. Täysiä kierroksia on 2.



b) Rakolevyn kulmanopeus on 4,4 rad/s.

3. **a)** Pyörän säde on $r = 4{,}25$ cm. Pyörän pyörähtäessä yhden kierroksen hiihtäjä etenee matkan $s = 2\pi r$. Lenkin aikana kierroksia tulee

$$\frac{10\,000\,\text{m}}{2\pi \cdot 0{,}0425\,\text{m}} \approx 37\,000.$$

b) Renkaan kulmanopeus on
$\omega = 2\pi n = 2\pi \cdot 2{,}5\,\text{rad/s} = 5\pi\,\text{rad/s} \approx 15{,}7\,\text{rad/s}.$

Kiertokulma on $\varphi = \omega t = 5\pi\,\text{rad/s} \cdot 6 \cdot 60\,\text{s} \approx 5654{,}87\,\text{rad}.$

Pyöräilijän kuudessa minuutissa pyöräilemä matka on
$s = \varphi r = 5654{,}87\,\text{rad} \cdot 0{,}34\,\text{m} \approx 1{,}9\,\text{km}.$

Rengas pyörähtää kokonaisia kierroksia $\dfrac{5654{,}87\,\text{rad}}{2\pi} \approx 900$ kpl.

4. **a)** Auton kulmanopeus on $\omega = \dfrac{v}{r} = \dfrac{\frac{110}{3{,}6}\,\text{m/s}}{150\,\text{m}} \approx 0{,}20\,\text{rad/s}.$

b) Auton radalla pitävän voiman suuruus on

$$F = m\frac{v^2}{r} = 1050\,\text{kg} \cdot \frac{\left(\frac{110}{3{,}6}\,\text{m/s}\right)^2}{150\,\text{m}} \approx 6{,}5\,\text{kN}.$$

c) Auton pitää radalla (tiellä) auton renkaiden ja tienpinnan välinen lepokitka. (Jos kitka on liian pieni, auto suistuu tieltä. Jos auto lähtee liukumaan, kyseessä ei ole enää lepokitka, vaan lepokitka on muuttunut liukukitkaksi.)

d) Vaikka auton ratavauhti on vakio, nopeuden suunta kuitenkin muuttuu koko ajan. Autolla on normaalikiihtyvyyttä, joka suunta on kohti radan keskipistettä.

5. **a)** Napakelkan ratanopeus on $v = \dfrac{2\pi r}{T}$, josta saadaan kelkan kierrosajaksi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot 4{,}5\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 11{,}3097\,\mathrm{s} \approx 11\,\mathrm{s}.$$

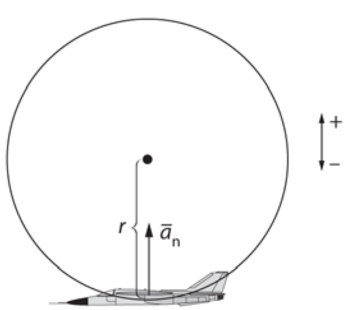
b) Pyörimisnopeus on $n = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{11{,}3097\,\mathrm{s}} \approx 0{,}088\,\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}}$.

6. Tarkastellaan autoon mäennyppylän ylimmässä kohdassa vaikuttavia voimia. Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_\mathrm{n}$.

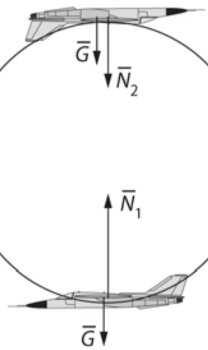
Kun suunta alas on valittu positiiviseksi, saadaan skalaariyhtälö $-N + mg = \dfrac{mv^2}{r}$. Radan ylimmässä kohdassa, kun auto juuri ja juuri on irtoamassa tien pinnasta, tien pinnasta autoon kohdistuvan tukivoiman suuruus on $N = 0$. Yhtälöstä $mg = \dfrac{mv^2}{r}$ auton nopeudeksi saadaan

$$v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81 \cdot \mathrm{m/s^2} \cdot 45\,\mathrm{m}} \approx 21\ \mathrm{m/s} \approx 76\ \mathrm{km/h}.$$

7. **a)** Oletetaan, että kysytyillä hetkillä tangenttikiihtyvyys on nolla. Lentäjään kohdistuvat paino $\overline{G}$ ja penkistä tukivoima $\overline{N}$.



b) Silmukan alimmassa kohdassa on Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\overline{N} + \overline{G} = m\overline{a}_{\mathrm{n}}$. Sovitaan suunta kohti radan keskipistettä positiiviseksi.



Skalaariyhtälöstä $N - G = ma_{\mathrm{n}}$ tukivoiman suuruus on

$$N = ma_{\mathrm{n}} + G = m\frac{v^2}{r} + G.$$

Tukivoiman suuruus voi olla $N \le 9G$ eli $m\frac{v^2}{r} + mg \le 9mg$. Yhtälöstä

$\frac{v^2}{r} + g \le 9g$ eli $\frac{v^2}{r} \le 8g$ säteen suuruudelle saadaan ehto:

$$r \ge \frac{v^2}{8g} = \frac{\left(\frac{1500}{3,6}\,\mathrm{m/s}\right)^2}{8 \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}} \approx 2,2\,\mathrm{km}.$$

8. Keplerin III laista $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$ saadaan Pluton keskietäisyydeksi Auringosta

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{r_1^3 T_2^2}{T_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(149,6 \cdot 10^6 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\right)^3 \cdot (246,8\,\mathrm{a})^2}{(1,0000\,\mathrm{a})^2}} \approx 5,886 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m} = 5886 \cdot 10^6\,\mathrm{km}.$$

9. **a)** Autot vetävät toisiaan puoleensa voimalla, jonka suuruus on

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6{,}67428 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{1200\,\mathrm{kg} \cdot 1600\,\mathrm{kg}}{(2{,}5\,\mathrm{m})^2} \approx 2{,}1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}.$$

Autot vetävät toisiaan puoleensa yhtä suurella mutta vastakkaissuuntaisella voimalla (Newtonin III laki).

b) Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_\mathrm{n}$. Koska gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \dfrac{mM}{r^2}$, normaalikiihtyvyyden suuruus $a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{r}$ ja ilmanvastus pieni, saadaan yhtälö $\gamma \dfrac{mM}{(2R)^2} = m\dfrac{v^2}{2R}$, jossa R on Maan säde.

Nopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{2R}} = \sqrt{\frac{6{,}67428 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2 \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}}} \approx 5{,}59\ \mathrm{km/s}.$$

10. **a)** Olkoon lentokoneen massa m. Gravitaatiokentän voimakkuus 12,0 km korkeudella maanpinnasta on

$$g_r = \frac{F}{m} = \frac{\gamma \frac{mM}{r^2}}{m} = \gamma \frac{M}{r^2} = 6{,}67428 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{(6378\,\mathrm{km} + 12{,}0\,\mathrm{km})^2} \approx 9{,}76\,\mathrm{m/s}^2.$$

11. Putoamiskiihtyvyys toisen planeetan pinnalla on

$$g_{\text{Planeetta}} = \gamma \frac{m_{\text{Planeetta}}}{r_{\text{Planeetta}}{}^2} = \gamma \frac{100M}{(10R)^2} = \gamma \frac{M}{R}$$

$$= 6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6378 \cdot 10^3\ \text{m})^2} \approx 9{,}80\ \text{m/s}^2.$$

12. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$. Koska gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \dfrac{mM_{\text{A}}}{r^2}$ ja normaalikiihtyvyyden suuruus $a_{\text{n}} = \dfrac{v^2}{r}$, yhtälöstä $\gamma \dfrac{mM_{\text{A}}}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$ saadaan Auringon massaksi

$$M_{\text{A}} = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(24{,}13 \cdot 10^3\ \text{m/s})^2 \cdot 227{,}9 \cdot 10^6 \cdot 10^3\ \text{m}}{6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}} \approx 1{,}988 \cdot 10^{30}\ \text{kg}.$$

13. Lasketaan ensin satelliitin ratanopeus. Newtonin II lain mukaan on $\sum \overline{F} = m\overline{a}_{\text{n}}$. Koska gravitaatiovoiman suuruus on $F = \gamma \dfrac{mM}{r^2}$, normaalikiihtyvyyden suuruus $a_{\text{n}} = \dfrac{v^2}{r}$ ja ilmanvastus pieni, saadaan yhtälö $\gamma \dfrac{mM}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$, jossa M on Maan massa, m satelliitin massa ja v ratanopeus.

Satelliitin ratanopeus on

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{530 \cdot 10^3\ \text{m} + 6378 \cdot 10^3\ \text{m}}} \approx 7597{,}29\ \text{m/s}.$$

Satelliitin liike-energia on

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 890\ \text{kg} \cdot (7597{,}29\ \text{m/s})^2 \approx 2{,}56849 \cdot 10^{10}\ \text{J}\ .$$

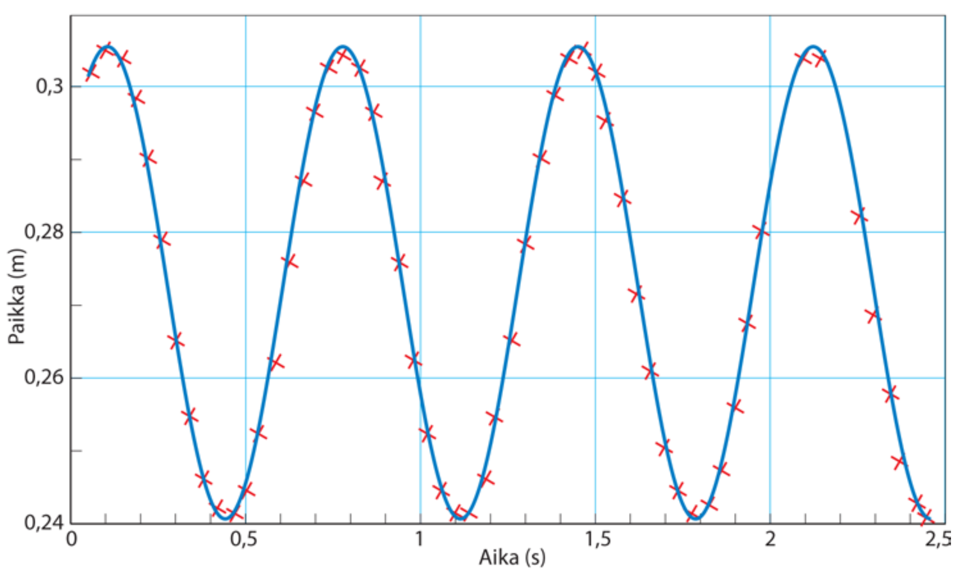
Satelliitin potentiaalienergia on

$$E_p = -\gamma \frac{mM}{r} = -6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{890\ \text{kg} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{530 \cdot 10^3\ \text{m} + 6378 \cdot 10^3\ \text{m}}$$
$$\approx -5{,}13697 \cdot 10^{10}\ \text{J}.$$

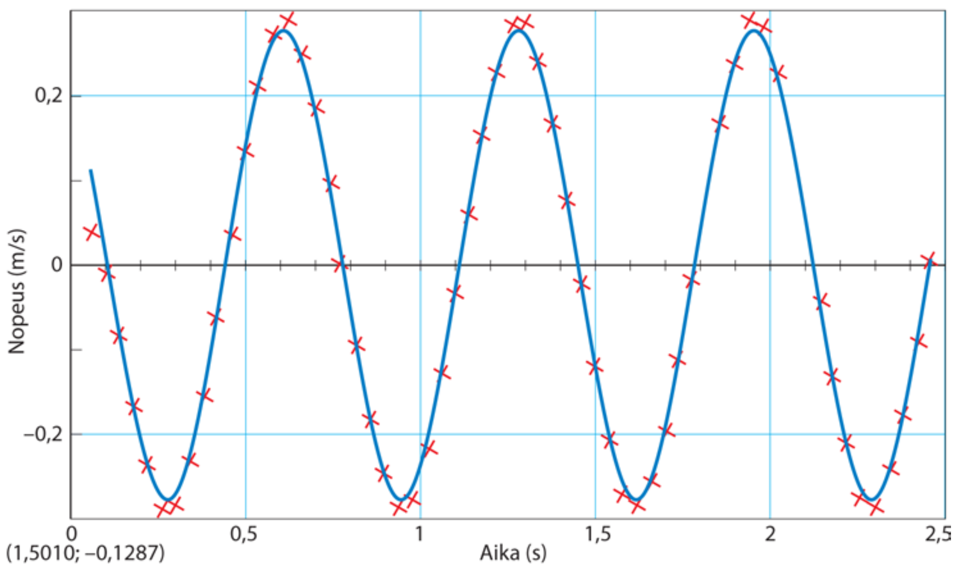
Satelliitin mekaaninen energia on

$2{,}56849 \cdot 10^{10}$ J + $(-5{,}13697 \cdot 10^{10}$ J$) \approx -2{,}6 \cdot 10^{10}$ J.

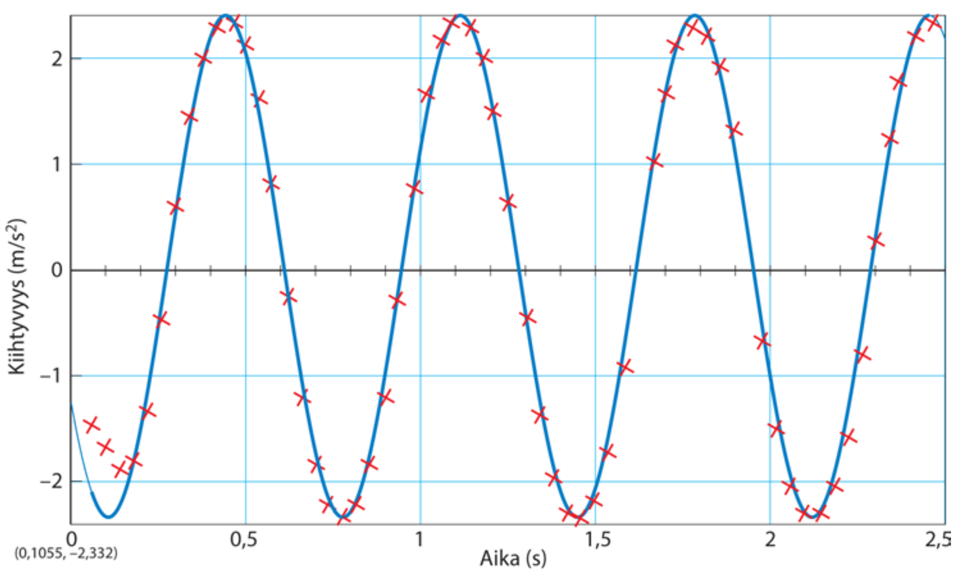
14. **a)** Punnuksen jaksonaika on 0,67 s ja taajuus $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}67\ \text{s}} \approx 1{,}5\ \text{Hz}.$



b) Punnuksen vauhti hetkellä 1,5 s on 0,13 m/s.



c) Punnuksen suurin kiihtyvyys on 2,4 m/s².



15. **a)** Värähtelyn jaksonaika on $T = \frac{32}{13}\text{ s} = 2{,}46154\text{ s} \approx 2{,}5\text{ s}$.

Taajuus on $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}46154\text{ s}} \approx 0{,}41\text{ Hz}$.

b) Sydämen värähtelytaajuus on

$f = 157\,\frac{1}{\text{min}} = \frac{157}{60\text{ s}} = 2{,}61667\text{ Hz} \approx 2{,}6\text{ Hz}$.

Jaksonaika on $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2{,}61667\,\frac{1}{\text{s}}} \approx 0{,}38\text{ s}$.

16. Punnuksen kymmeneen värähdykseen kulunut aika mitattiin viisi kertaa. Aikojen keskiarvo oli T_{10} = 8,10 s, joten punnuksen värähdysaika on T = 0,810 s. Koska punnuksen massa oli 0,2000 kg, jaksonajan yhtälöstä $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ saadaan jousen jousivakioksi $k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0{,}2000\text{ kg}}{(0{,}810\text{ s})^2} \approx 12\text{ N/m}$.

17. **a)** Värähtelevän punnuksen värähtelyn jaksonaika on $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, kun m on punnuksen massa ja k jousen jousivakio. Kun punnuksen massa on $2m$, jakson aika on $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{2}\cdot T_1$, joten jaksonaika muuttuu $\sqrt{2}$-kertaiseksi.

b) Kun punnuksen massa on $\frac{1}{2}m$ ja jousivakio $2k$, jakson aika on

$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{2}m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{m}{4k}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2}\cdot T_1$, joten jaksonaika muuttuu $\frac{1}{2}$-kertaiseksi eli pienenee puoleen.

18. Pianoon kohdistuva painon suuruus on
$G = mg = 260\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 2550{,}6\ \text{N}$.

Köyden ylöspäin suuntautuva jousivoima on $\overline{F} = -k\overline{x}$, joten köyden venymän suuruus on $x = -\dfrac{F}{k}$. Tasapainotilanteessa köyden jousivoima on yhtä suuri kuin pianoon kohdistuva paino. Valitaan suunta alas positiiviseksi, jolloin jousivoima on negatiivinen eli $F = -2550{,}6$ N.

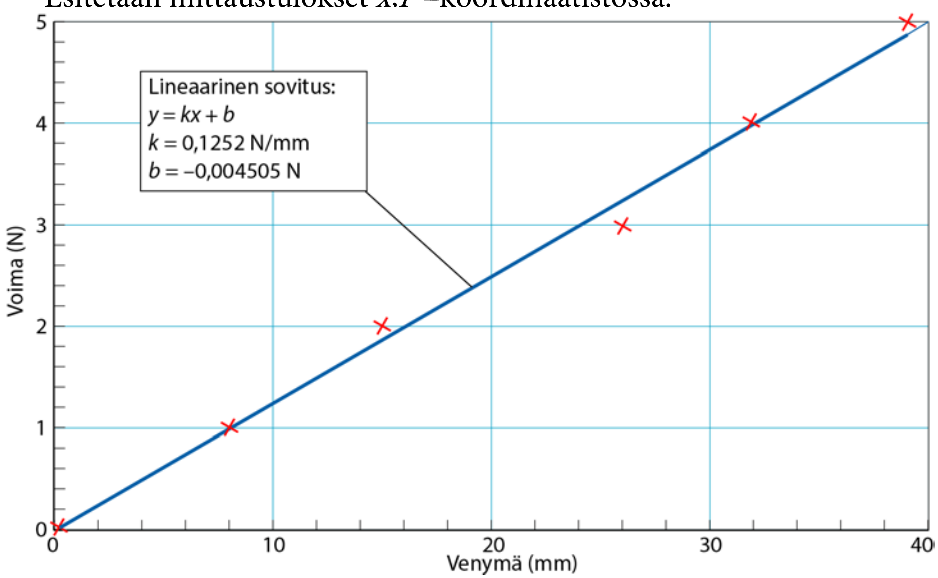
Köyden venymän suuruus on

$$x = -\frac{F}{k} = -\frac{-2550{,}6\ \text{N}}{57 \cdot 10^3\ \text{N/m}} = 0{,}0447474\ \text{m} \approx 4{,}5\ \text{cm}.$$

19. **a)** Lisätään taulukkoon jousen venymä $x = l - l_0$, kun l_0 on jousen alkuperäinen pituus 185 mm.

F (N)	0,0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
l (mm)	185	193	200	211	217	224
x (mm)	0	8	15	26	32	39

Esitetään mittaustulokset x,F–koordinaatistossa.



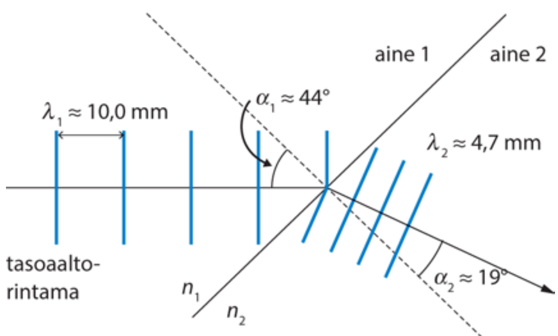
a) Jousen jousivakio on $k = 0{,}1252$ N/mm ≈ 130 N/m.

b) Jos oletetaan, että voima on harmoninen myös mittausalueen ulkopuolella venymän ollessa 52 mm, tarvittava voima on
$F = 52\text{ mm} \cdot 0{,}1252\text{ N/mm} \approx 6{,}5\text{ N}$.

20. **a)** Värähtelyn taajuus säilyy, vaikka värähdysliike siirtyy jousesta toiseen. Värähdysliikkeen etenemisnopeus jousessa B on
$v_B = \lambda f = 0{,}80\,\text{m} \cdot 5{,}0\,\text{Hz} = 4{,}0\,\text{m/s}$.

b) B on aalto-opillisesti tiheämpää ainetta, koska nopeus v_B on pienempi kuin nopeus v_A (aallonpituus jousessa on suurempi). Aallon heijastuessa aalto-opillisesti tiheämmästä aineesta tapahtuu puolen aallon vaihesiirto.

21.



Huomaa, että ratkaisussa käytetyt mitatut aallonpituudet ovat ohjeellisia, koska aallonpituus riippuu kuvan suurennossuhteesta.

Piirroksesta saadaan mittaamalla $\lambda_1 \approx 10{,}0$ mm ja $\lambda_2 \approx 4{,}7$ mm sekä $\alpha_1 \approx 44°$ ja $\alpha_2 \approx 19°$.

Lasketaan λ_2 mitattujen kulmien avulla taittumislaista:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ joten } \lambda_2=\lambda_1\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}=10{,}0\text{ mm}\cdot\frac{\sin 19^\circ}{\sin 44^\circ}\approx 4{,}7\text{ mm.}$$

Taitekerroin n_{12} saadaan kulmien avulla,

$$n_{12}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{\sin 44^\circ}{\sin 19^\circ}\approx 2{,}1.$$

Taitekerroin voidaan laskea myös aallonpituuksien avulla:

$$n_{12}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{10{,}0\text{ mm}}{4{,}7\text{ mm}}\approx 2{,}1.$$

22. **a)** Oikein. Aaltolähde määrää taajuuden.

b) Väärin. Aaltoliikkeen perusyhtälön $v=\lambda f$ mukaan jos aallonpituus pienenee, nopeuskin pienenee, koska taajuus on vakio.

23. **a)** Taittumislain $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$ mukaan

$\sin\alpha_2=\dfrac{v_2\cdot\sin\alpha_1}{v_1}=\dfrac{7200\text{ m/s}\cdot\sin 59^\circ}{6300\text{ m/s}}=0{,}979620$, joten taitekulma

$\alpha_2\approx 78^\circ$.

b) Kokonaisheijastumisessa aallon tulokulma α_1 on samalla kokonaisheijastumisen rajakulma α_r ja taitekulma on 90°. Taittumislaki

$\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{v_1}{v_2}$ saa muodon $\dfrac{\sin\alpha_1}{\underbrace{\sin 90^\circ}_{1}}=\dfrac{v_1}{v_2}$, joten $\sin\alpha_r=\dfrac{6300\text{ m/s}}{7200\text{ m/s}}=0{,}8750.$

Kokonaisheijastumisen rajakulma on $\alpha_r\approx 61^\circ$.

c) Maanjäristysaaltojen etenemisestä tehdään havaintoja eri puolilla maailmaa olevilla tutkimusasemilla (seismografisilla asemilla). Aaltojen etenemisestä, heijastumisista, taittumisista ja nopeuksista saadaan tietoa vertaamalla samojen aaltojen havaitsemishetkiä eri asemilla.

d) Kun selvitetään maanjäristysaaltojen eteneminen maankuoressa, samalla saadaan tietoa maapallon sisuksen rakenteesta: esimerkiksi tiedetään, että maapallon ytimen uloin osa on nestemäinen.

24. a, c

25. **a)** Kumpikin kivi synnyttää veden pinnalle muutamia ympyränmuotoisia aaltorintamia. Kun aaltorintamat kohtaavat, ne interferoivat. Samankokoiset kivet synnyttävät likimain yhtä voimakasta aaltoilua. Tietyissä suunnissa havaitaan likimain tyyni veden pinta, koska näissä suunnissa aaltojen aallonharjat ovat vastakkaisessa vaiheessa, jolloin amplitudiltaan yhtä suuret aallot sammuttavat toisensa. Tietyissä suunnissa havaitaan voimakasta aaltoilua. Näissä suunnissa aallot ovat samassa vaiheessa. Aallot vahvistavat toisiaan.

b) Jokainen kiven pinnan kohta, johon aaltorintama törmää, on uuden ympyränmuotoisen alkeisaallon lähde. Syntyneet alkeisaallot interferoivat. Syntyneiden aaltorintamien suunta poikkeaa alkuperäisten aaltorintamien suunnasta. Tätä kutsutaan diffraktioksi. Veden aallot voivat edetä näin ollen myös kiven taakse.

26. Kun pulssit ovat samassa paikassa, vasemmalle liikkuvan pulssin poikkeama tasapainoasemasta alas pitää olla joka kohhdassa yhtä suuri kuin oikealle liikkuvan pulssin poikkeama ylös. Tällöin jousi on hetkellisesti suora.

27. **a)** Määritetään interferenssiaallolle muutamia poikkeamia tasapainoasemasta.

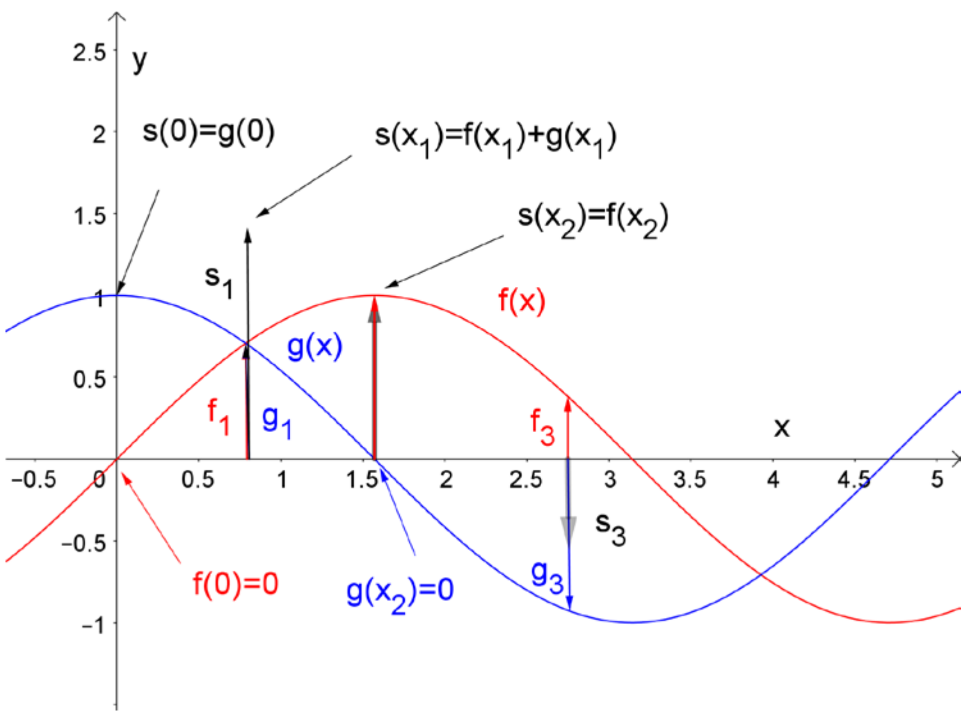
* Huomataan, että $f(0) = 0$, joten $s(0) = g(0) = 1$.

* Lasketaan yhteen poikkeamat f_1 ja g_1: $f_1 + g_1 = s_1$.

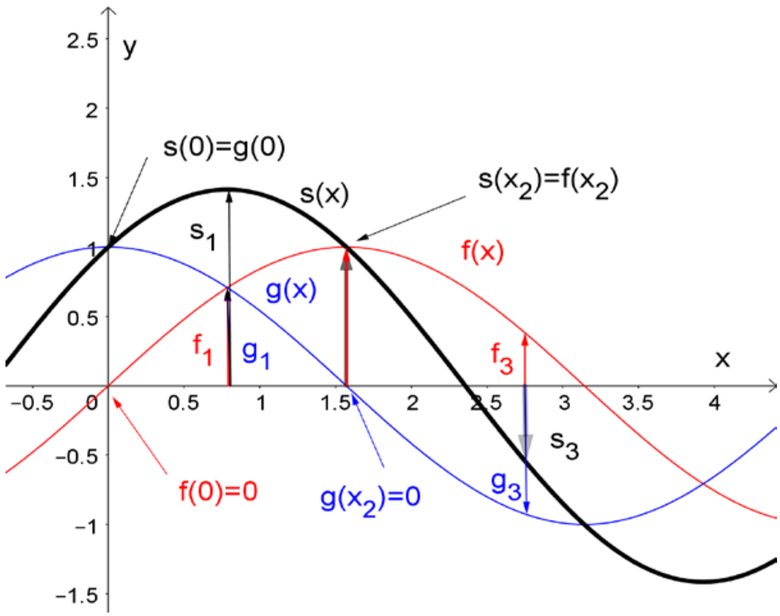
* Koska $g(x_2) = 0$, $s(x_2) = f(x_2)$.

* Interferenssiaallon poikkeama s_3 tasapainoasemasta on $s_3 = -g_3 + f_3$, kun suunta ylös on positiivinen.

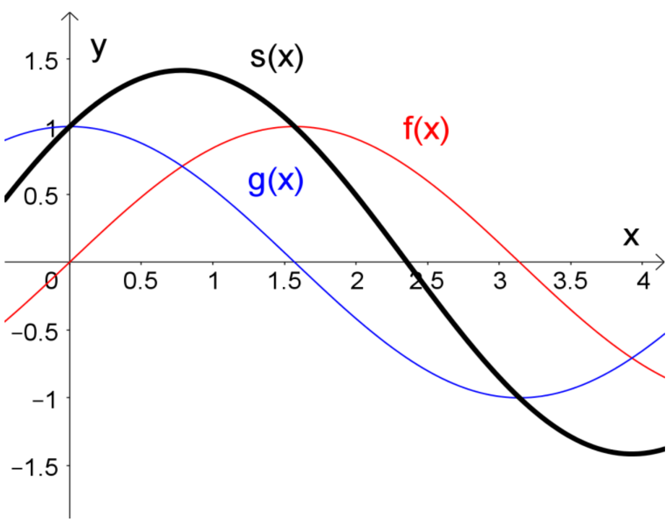
Määritä vastaavalla tavalla muutamia muita interferenssiaallon poikkeamia tasapainoasemasta.



Hahmotellaan interferenssiaalto *s*-nuolien kärkien kautta. Käyrä $s(x)$ esittää interferenssiaaltoa.



b) Funktion $s(x) = f(x) + g(x) = \sin x + \cos x$ kuvaaja esittää interferenssiaaltoa.



28. **a)** Funktion s kuvaaja esittää interferenssiaaltoa.

b) $s = f + g$.

c) Kaikilla aalloilla on yhtä suuri aallonpituus. Kun $b = 3{,}5$, aallonpituus on 1,8 m.

d) Kun kohtaavien aaltojen huiput ovat samalla kohdalla ja pohjat samalla kohdalla, interferenssiaallon huippukohtaan asetetun pisteen y-koordinaatti ilmaisee suurimman amplitudin. Interferenssiaallon suurin amplitudi on 3,0 dm.

e) Kun interferoivien aaltojen huiput ja pohjat ovat samalla kohdalla, interferenssiaallolla on pienin amplitudi 1,0 dm.

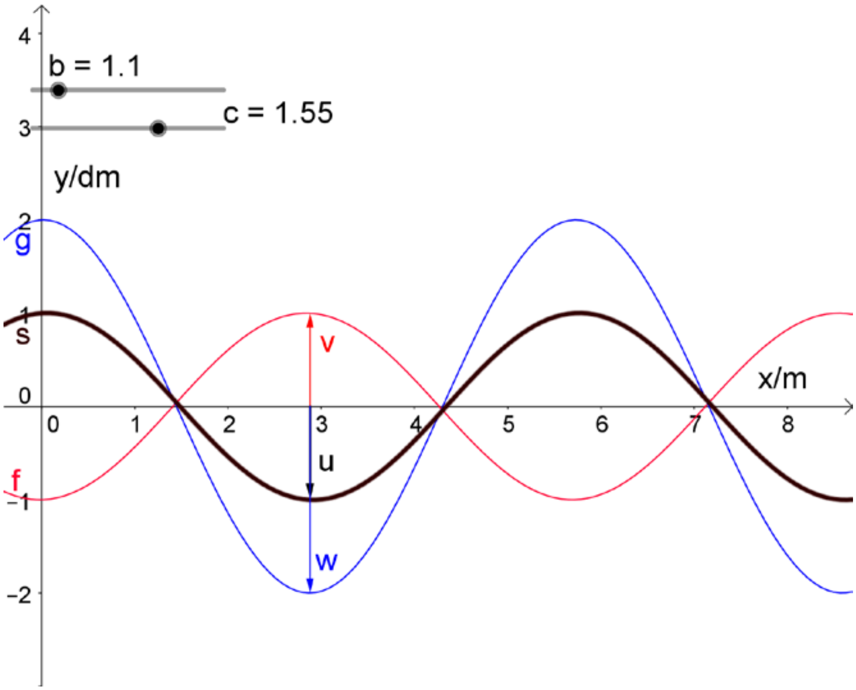
29. **a)** Jos muuttujaa b suurennetaan, aaltojen aallonpituus pienenee, ja jos b:tä pienennetään, aallonpituus kasvaa.

b) Muuttuja c määrää interferoivien aaltojen paikan.

c) Jos aallonpituus kasvaa, aallon nopeus kasvaa.

d) Käyrille f, g ja s asetetaan y-akselin suuntaiset nuolet (vektorit), joiden x-akselilla oleva alkupiste on sama ja loppupisteet ovat käyrillä f, g ja s. Kohtaavien aaltojen amplitudien summa voidaan laskea nuolien päätepisteiden koordinaateista ja sitä verrataan interferenssiaallon amplitudiin. Interferoivien aaltojen amplitudien summa on yhtä suuri kuin interferenssiaallon amplitudi.

Esimerkki amplitudeista, kun $b = 1{,}1$ ja $c = 1{,}55$.



Kuvan esimerkkitapauksessa s:n amplitudia kuvaa nuoli u, f:n amplitudia nuoli v ja g:n amplitudia nuoli w. Kärkien y-koordinaateista saadaan amplitudit: $u = -1{,}0$ dm, $v = 1{,}0$ ja $w = -2{,}0$ dm. Koska 1,0 dm – 2,0 dm = –1,0 dm, kohtaavien aaltojen amplitudien summa on yhtä suuri kuin interferenssi aallon amplitudi. Vastaava lopputulos voidaan todeta missä tahansa kupujen huippukohdassa.

e) Kun interferoivat aallot ovat kohdakkain niin, että toisen aallon huippu on toisen aallon pohjan kohdalla, interferenssiaallolla on pienin mahdollinen amplitudi. Interferoivien aaltojen amplitudit ovat eri suuret, joten niiden summa on koko ajan nollasta eroava.

30. **a)** Matkaerot pisteissä ovat seuraavat:

A: $5\lambda - 2\frac{1}{2}\lambda = 2\frac{1}{2}\lambda$, B: $3\lambda - 3\lambda = 0$ ja C: $4\frac{1}{2}\lambda - 2\frac{1}{2}\lambda = 2\lambda$.

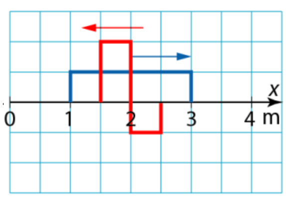
b) Aallot vahvistavat toisiaan, kun aaltojen matkaero on $x = n\lambda$, jossa $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ eli pisteissä B ja C.

Aallot heikentävät toisiaan, kun aaltojen matkaero on $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$,

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ eli pisteessä A.

31. Niissä kohdissa, joissa kohtaavien pulssien amplitudit ovat samaan suuntaan, summapulssi saadaan kohtaavien pulssien amplitudien summana. Niissä kohdissa, joissa kohtaavien pulssien amplitudit ovat vastakkaisiin suuntiin, interferenssipulssi saadaan kohtaavien pulssien amplitudien erotuksina. Huomaa, että pulssit liikkuvat nopeudella 1 m/s vastakkaisiin suuntiin.

Kuvassa on pulssien paikka hetkellä 1,0 s.



Kuva b esittää interferenssipulssia.

32. (Kysymys: Kasvaako vai pieneneekö värähtelyn taajuus, kun kupujen ja solmujen määrä videolla kasvaa? Perustele.)

Vastaus: Aaltoliikkeen perusyhtälö on $v = f\lambda$, joten $f = \dfrac{v}{\lambda}$. Koska aallon etenemisnopeus langassa on vakio, taajuus ja aallonpituus ovat kääntäen verrannollisia. Kun kupujen ja solmujen määrä kasvaa, aallonpituus pienenee, jolloin taajuus kasvaa.

(Tehtävä: Selitä statiivista lähtevän lyhyen langanpätkän värähtely.)

Vastaus: Langan toinen pää on kiinnitetty statiiviin, joten siihen syntyy solmu. Sopivalla taajuudella lankaan syntyy toinenkin solmu. Langan toinen pää voi värähdellä vapaasti, joten sinne syntyy kupu. Kun taajuus on sopiva, langanpätkässä nähdään seisova aalto, jossa on kaksi solmua ja kaksi kupua. Tällöin langanpätkän pituus aallonpituuteen verrattuna on $\dfrac{3}{4}\lambda$.

33. **a)** Kuvassa oikealla oleva laite on värähtelijä, joka värähtelee kohtisuorassa suunnassa lankaan nähden. Näin värähtelijä lähettää poikittaisia aaltoja lankaan. Langan toinen pää on kiinnitetty statiiviin, josta aalto heijastuu (vastakkaisessa vaiheessa) takaisin. Vastakkaisiin suuntiin etenevät aallot interferoivat. Kun taajuus on sopiva, lankaan syntyy seisova aaltoliike, joka näkyy langassa solmukohtina ja kupuina. Solmukohdissa lanka on paikallaan. Kupujen kohdalla lanka värähtelee poikittain.

b) 1) Aallonpituus on noin 0,45 m.

2) Koska aallonpituus on 0,45 m, langan pituus on

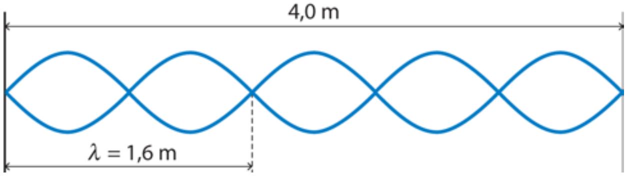
$2{,}5 \cdot 0{,}45\ \text{m} = 1{,}125\ \text{m} \approx 1{,}1\ \text{m}.$

3) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan aallon etenemisnopeus langassa

on $v = f\lambda = 58{,}7\,\frac{1}{\text{s}} \cdot 0{,}45\ \text{m} \approx 26\ \text{m/s}.$

34. **a)** Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallonpituus on

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{6{,}4\ \text{m/s}}{4{,}0\,\frac{1}{\text{s}}} \approx 1{,}6\ \text{m}.$$

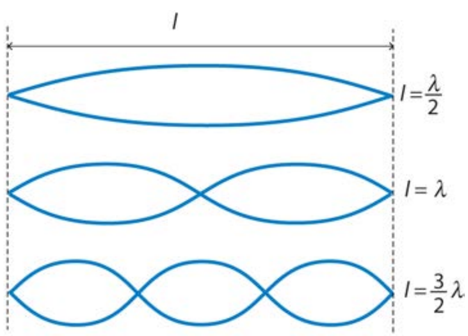


Jousi on kiinnitetty molemmista päistä, joten kiinnityskohtiin muodostuu seisovan aallon solmut. Seinästä lukien solmujen paikat ovat

$$\frac{1{,}6\ \text{m}}{2} = 0{,}80\ \text{m} \text{ ja } 1{,}6\ \text{m}.$$

b) Ensimmäinen kupu on kohdassa $\frac{1{,}6\ \text{m}}{4} = 0{,}40\ \text{m}$ ja toinen $0{,}40\ \text{m} + \frac{1{,}6\ \text{m}}{2} = 1{,}2\ \text{m}.$

35.



a) Perusvärähtelyssä langan pituus l on puolet aallonpituudesta, joten

$$\lambda = 2l = 2 \cdot 0{,}90 \text{ m} = 1{,}8 \text{ m}.$$

Ensimmäisessä ylävärähtelyssä aallon pituus on yhtä suuri kuin langan pituus, joten $\lambda = l = 0{,}90$ m.

Toisessa ylävärähtelyssä langan pituus on $l = \frac{3}{2}\lambda$, joten aallonpituus on

$$\lambda = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3} \cdot 0{,}90 \text{ m} = 0{,}60 \text{ m}.$$

b) Aaltoliikkeen perusyhtälön mukaan nopeus on

$$v = \lambda f = 1{,}8 \text{ m} \cdot 82 \frac{1}{\text{s}} \approx 150 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

36. **a)** Pitkittäinen seisova aaltoliike syntyy, kun pitkittäinen aalto heijastuu takaisin tulosuuntaansa. Tällöin vastakkaisiin suuntiin etenevät aallot interferoivat. Kun taajuus on sopiva, syntyy pitkittäinen seisova aaltoliike. Pitkittäisessä seisovassa aaltoliikkeessä kupujen kohdalla aineen rakenneosaset värähtelevät aallon etenemissuunnassa ja solmujen kohdalla rakenneosaset ovat paikallaan.

b) Aallon etenemisnopeus pysyy vakiona jousessa, vaikka aallon taajuus muuttuu. Aaltoliikkeen perusyhtälön $v = f\lambda$ mukaan aallonpituus on $\lambda = \frac{v}{f}$. Kun taajuus muuttuu, mutta aallonnopeus pysyy vakiona, aallonpituus muuttuu. Samalla solmujen ja kupujen paikat muuttuvat. Aina kun nauha on solmun kohdalla, nauha pysyy paikallaan. Kun nauha on kuvun kohdalla, nauha värähtelee.

37. **a)** Matalataajuinen tärinä etenee äänen nopeudella kiinteässä maassa, esimerkiksi graniitissa 4000 m/s. Äänen nopeus ilmassa on vain vajaa kymmenesosa tästä, joten tärinä havaitaan ennen ääntä.

b) Ääni kulkee maaperässä nopeammin kuin ilmassa, mutta tästä syntyvällä aikaerolla ei ole suurta merkitystä puhvelinmetsästyksen kannalta. Merkitystä on sen sijaan sillä, että maaperässä ääni vaimenee vähemmän kuin ilmassa, koska ilmassa kulkevaa ääntä heikentävät maaston muodot ja kasvillisuus. Maaperän kautta äänet ovat kuultavissa kauempaa.

38. Äänennopeus ilmassa on $v = 340$ m/s.

a) Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ voidaan ratkaista keskimääräinen aallonpituus: $\lambda = \dfrac{v}{f} = \dfrac{340 \text{ m/s}}{20 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 0{,}017 \text{ m} \approx 2 \text{ cm}$.

b) Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{10 \text{ Hz}} \approx 150 \text{ m}.$$

c) Ihmisen normaali kuuloalue on 20 Hz–20 kHz, joten ihminen kuulee heinäsirkan sirityksen, mutta ei sinivalaan ääntä. Ihmisen ikääntyessä korkeiden taajuuksien kuuleminen heikkenee, jolloin heinäsirkan ääni lakkaa kuulumasta.

39. Taulukkokirjan mukaan äänen nopeus ilmassa, jonka lämpötila on 0 °C, on $v_{\text{ilma}} = 331{,}4$ m/s, ja nopeus jäässä, jonka lämpötila on –4 °C, on $v_{\text{jää}} = 3280$ m/s.

a) Ilmassa ääneltä kuluu aika

$$t = \frac{s}{v_{\text{ilma}}} = \frac{750\text{ m}}{331{,}4\text{ m/s}} \approx 2{,}3\text{ s.}$$

b) Jäätä pitkin ääneltä kuluu aika

$$t = \frac{s}{v_{\text{jää}}} = \frac{750\text{ m}}{3280\text{ m/s}} \approx 0{,}23\text{ s.}$$

Jäässä molekyylit ovat sidottu toisiinsa kemiallisilla sidoksilla, joten siinä paineaallon aiheuttamat värähtelyt siirtyvät nopeasti molekyylistä toiseen. Ilmassa paineaallon vaikutus siirtyy molekyylien satunnaisten törmäysten seurauksena. Tämän takia ääni etenee ilmassa hitaammin kuin jäässä.

40. Äänen intensiteettitaso on

$$L = 10\text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10\text{ dB} \cdot \log \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ W/m}^2}{10^{-12}\text{ W/m}^2} \approx 91\text{ dB}.$$

41. Kuulokäyrää esittävän kuvaajan (s. 140) mukaan 80 dB:n intensiteettitasoa vastaa intensiteetti $I_1 = 10^{-4}$ W/m^2. Kolmen samanlaisen moottoripyörän äänen intensiteetti on $I = 3I_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ W/m^2.

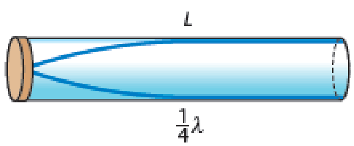
Kolmen moottoripyörän äänen intensiteettitaso on

$$L = 10\text{ dB} \cdot \log \frac{I}{I_0} = 10\text{ dB} \cdot \log \frac{3 \cdot 10^{-4}\text{ W/m}^2}{10^{-12}\text{ W/m}^2} \approx 85\text{ dB.}$$

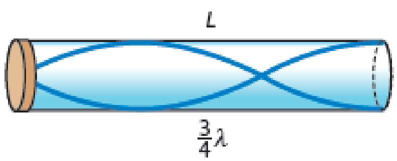
Kolmen moottoripyörän aiheuttama intensiteettitaso on noin 85 dB eli moottoripyörien määrän kolminkertaistuminen lisää intensiteettitasoa 5 dB.

42. **a)** Kun korvakäytävässä on seisova aalto, käytävän avoimessa päässä on kupu ja suljetussa päässä solmu. Mallinnetaan korvakäytävää oheisilla piirroksilla.

Matalataajuisimman seisovan aallon tapauksessa on $L = \frac{\lambda}{4}$, jossa L on korvakäytävän pituus ja λ on aallonpituus.



Seuraavan seisovan aallon tapauksessa on $L = \frac{3}{4}\lambda$.



Aaltoliikkeen perusyhtälöstä $v = f\lambda$ saadaan taajuudeksi $f = \frac{v}{\lambda}$, jossa v on äänen nopeus ilmassa, $v = 340$ m/s. Matalin seisovan aallon taajuus on silloin

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L} = \frac{340 \text{ m/s}}{4 \cdot 0{,}025 \text{ m}} \approx 3{,}4 \text{ kHz.}$$

Toiseksi matalataajuisimman seisovan aallon taajuus on

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{\frac{4}{3}L} = \frac{340\ \text{m/s}}{\frac{4}{3}\cdot 0{,}025\ \text{m}} \approx 10\ \text{kHz}.$$

b) Äänekkyystasokäyristä nähdään, että ihminen kuulee parhaiten ääntä, jonka taajuus on 3000–4000 Hz. Tämä johtuu siitä, tämän taajuiset äänet muodostavat korvakäytävään seisovan aallon, jolloin ääniaallon energia siirtyy tehokkaammin ilmasta ihmiseen kuin muilla taajuuksilla. Samoin huomataan, että ihmisellä on herkän kuulon alue myös runsaan 10 000 Hz:n taajuusalueella, mikä ilmenee äänekkyystasokäyrissä olevana ”kuoppana”. Tämä vastaa taajuudeltaan toiseksi alimman seisovan aallon syntymistä korvakäytävään.

43. Kun äänilähde ja kuulija etääntyvät toisistaan nopeudella v_h, muuttuu äänen taajuus arvosta f_0 arvoon $f = f_0 \frac{v - v_h}{v}$. Merkitään taajuuden suhteellista muutosta kirjaimella r eli $r = \frac{f_0 - f}{f_0}$. Silloin

$$r = 1 - \frac{f}{f_0} = 1 - \frac{f_0 \frac{v - v_h}{v}}{f_0} = 1 - \frac{v - v_h}{v} = \frac{v - v + v_h}{v} = \frac{v_h}{v}.$$

Tästä yhtälöstä voidaan ratkaista v_l:

$$v_h = vr$$

a) Kun $r = 1\ \%$, saadaan

$$v_h = vr = 340\ \text{m/s} \cdot 0{,}01 \approx 3\ \text{m/s}.$$

b) Kun $r = 10\ \%$, saadaan

$$v_h = vr = 340\ \text{m/s} \cdot 0{,}1 \approx\ 34\ \text{m/s}.$$

44. **a)** Äänen kulkiessa ilmasta veteen taitesuhde on

$$n_{12}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{340\text{ m/ s}}{1500\text{ m/ s}}\approx 0,23.$$

b) Taittumislaki $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{v_1}{v_2}$ saadaan muotoon $\frac{\sin\alpha_r}{\sin 90°}=\frac{v_1}{v_2}$ eli

$\sin\alpha_r=\frac{v_1}{v_2}=\frac{340\text{ m/ s}}{1500\text{ m/ s}}$, josta saadaan kokonaisheijastumisen rajakulmaksi $\alpha_r \approx 13°$. Suurin tulokulma on 13°.

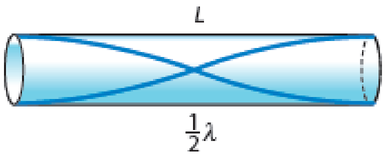
45. Ääniraudan äänen aallonpituus on $\lambda=\frac{v}{f}=\frac{340\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{440\,\frac{1}{\text{s}}}\approx 0,772727\text{ m}.$

a) Laatikon avoimeen päähän muodostuu kupu ja suljettuun solmu, jolloin laatikon pituus on neljäsosa aallonpituudesta. Laatikon pituudeksi saadaan $l=\frac{\lambda}{4}=\frac{0,772727\text{ m}}{4}\approx 19\text{ cm}.$

b) Nyt laatikon molemmissa päissä on kupu, joten laatikon pituus on puolet aallonpituudesta eli $l=\frac{\lambda}{2}$. Taajuus on

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{340\text{ m/s}}{\frac{1}{2}\cdot 0,772727\text{ m}}\approx 880\text{ Hz}.$$

46. Sopivalla nopeudella ajettaessa tikkaiden ohi virtaava viima saa ilman värähtelemään ja synnyttää seisovan aallon askelmien sisälle. Askelmat ovat avonaisia molemmista päistään, joten askelmien päissä on seisovan aallon kuvut. Vauhdin kasvaessa syntyy ensin matalin ääni, jolloin askelman sisällä olevassa ilmapatsaassa on yksi solmu. Askelman pituus on silloin puolet seisovan aallon aallonpituudesta.



Yhtälöstä $l = \lambda/2$ aallonpituudeksi saadaan $\lambda = 2l = 2 \cdot 0{,}55$ m = 1,1 m. Äänen taajuus on

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\,\mathrm{m/s}}{1{,}1\,\mathrm{m}} \approx 310\,\mathrm{Hz}.$$

47. Havaitun äänen taajuus on $f = 622$ Hz. Aaltolähteen taajuus $f_0 = 596$ Hz. Äänen etenemisnopeus on $v = 343$ m/s ja v_1 on aaltolähteen nopeus.

Kun aaltolähde lähestyy havaitsijaa, havaittu taajuus on Dopplerin ilmiön seurauksena

$$f = f_0 \frac{v}{v - v_1}$$

Ratkaistaan yhtälöstä aaltolähteen (linnun) nopeus v_1:

$$f(v - v_1) = f_0 v,$$

$$fv - fv_1 = f_0 v,$$

$$fv - f_0 v = fv_1,$$

josta saadaan linnun (aaltolähteen) nopeudeksi

$$v_1 = \frac{fv - f_0 v}{f} = \frac{622\,\text{Hz} \cdot 343\,\text{m/s} - 596\,\text{Hz} \cdot 343\,\text{m/s}}{622\,\text{Hz}} = 14{,}3376\ \text{m/s} \approx 52\,\text{km/h}.$$

48. **a)** Ultraäänen Dopplerin ilmiön avulla voidaan tutkia veren virtausnopeuksia sydämen eri osissa ja saada sillä tavalla selville sydämen mahdollinen normaalista poikkeava toiminta. Dopperin ilmiön takia liikkuvasta kohteesta heijastuneen ultraäänipulssin taajuus verrattuna anturin lähetystaajuuteen muuttuu.

b) Äänen kulkema matka ihon pinnasta kohteeseen ja takaisin on

$$s = vt = 1550\ \text{m/s} \cdot 41 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 0{,}06355\ \text{m}.$$

Heijastavan kohteen etäisyys ihon pinnasta on

$$d = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} \cdot 0{,}06355\ \text{m} \approx 3{,}2\ \text{cm}.$$

49. Kiven putoamiseen onkalon pohjalle ja äänen kulkemiseen pohjalta ylös kuluva kokonaisaika on $t = t_\text{p} + t_\text{ä} = 2{,}7$ s, jossa t_p on kiven putoamiseen kuluva aika ja $t_\text{ä}$ ääneltä kuluva aika.

Merkitään onkalon syvyyttä kirjaimella *s*. Silloin $s = \frac{1}{2}g{t_\text{p}}^2$ ja $s = vt_\text{ä}$, jossa v on äänennopeus. Tästä seuraa yhtälö $vt_\text{ä} = \frac{1}{2}g{t_\text{p}}^2 = \frac{1}{2}g(t - t_\text{ä})^2$ eli

$${t_\text{ä}}^2 - 2tt_\text{ä} + t^2 = \frac{2v}{g}t_\text{ä}$$ eli edelleen $${t_\text{ä}}^2 - 2\left(t + \frac{v}{g}\right)t_\text{ä} + t^2 = 0.$$

Toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan avulla tästä saadaan ratkaistua $t_ä$:

$$t_ä = \left(t + \frac{v}{g}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(2\left(t + \frac{v}{g}\right)\right)^2 - 4t^2}$$

$$= \left(2{,}7\ \text{s} + \frac{340\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot \left(2{,}7\ \text{s} + \frac{340\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}\right)^2 - 4 \cdot (2{,}7\ \text{s})^2} = 0{,}0976959\ \text{s}.$$

Vain negatiivinen merkki neliöjuurilausekkeen edessä kelpaa, koska positiivinen merkki antaa äänen kulkuajalle suuremman arvon kuin 2,7 s.

Onkalon syvyydeksi saadaan silloin
$s = vt_ä = 340\ \text{m/s} \cdot 0{,}0976959\ \text{s} \approx 33\ \text{m}.$

Ääneltä kuluu edestakaiseen matkaan kaivon pohjalle 2 · 0,0976959 s ≈ 0,2 s. Ihminen ei kykene luotettavasti mittaamaan näin lyhyttä aikaa esimerkiksi sekuntikellolla, joten kaiun avulla ei olisi mahdollista arvioida kaivon syvyyttä luotettavasti. (Ihmisen reaktioaika odotettavissa olevaan tapahtumaan on noin 0,2 s.) Jos mukana olisi äänianturi, mittaus olisi tätä tarkempi.

50. **a)** Äänirauta saa siihen kiinnitetyn kaikukopan ja tämän sisällä olevan ilman värähtelemään, jolloin värähtely leviää voimakkaampana ympäröivään ilmaan.

b) Kun äänirautaan lisätään paino, sen ominaistaajuus ei ole sama kuin ääniraudan alkuperäinen ominaistaajuus.

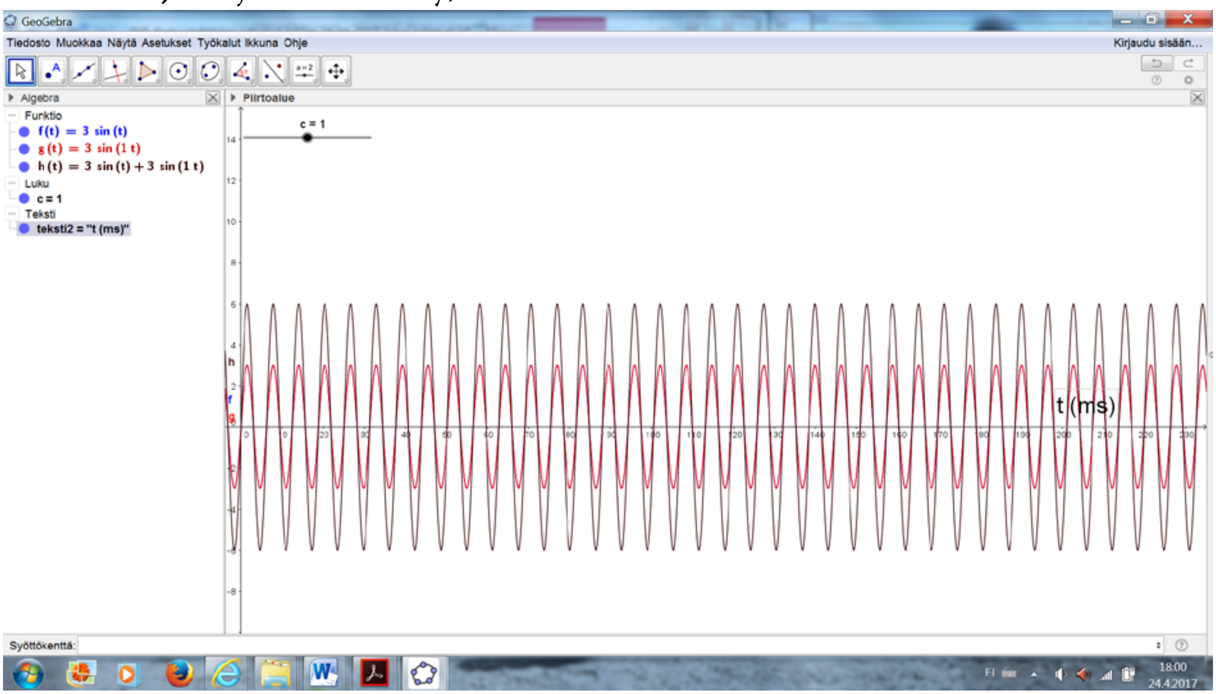
c) Koska äänirautojen ominaistaajuudet ovat erilaiset, ne ovat välillä samassa vaiheessa, jolloin niiden äänet vahvistavat toisiaan, ja välillä taas vastakkaisessa vaiheessa, jolloin niiden äänet heikentävät toisiaan. Tämä saa niiden yhteisvaikutuksena syntyvän äänen voimakkuuden vaihtelemaan jaksollisesti eli huojumaan.

d) Ääniraudan piikit värähtelevät yläpäästään suuremmalla amplitudilla kuin alapäästään. Yläpäähän asetettu paino vaikuttaa tämän takia enemmän värähtelytaajuuteen kuin alapäähän asetettu paino, koska siellä sen hitauden (massan) jarruttava vaikutus värähtelyyn on suurempi. Mitä alempana paino on, sitä lähempänä taajuus on ääniraudan omaa ominaistaajuutta.

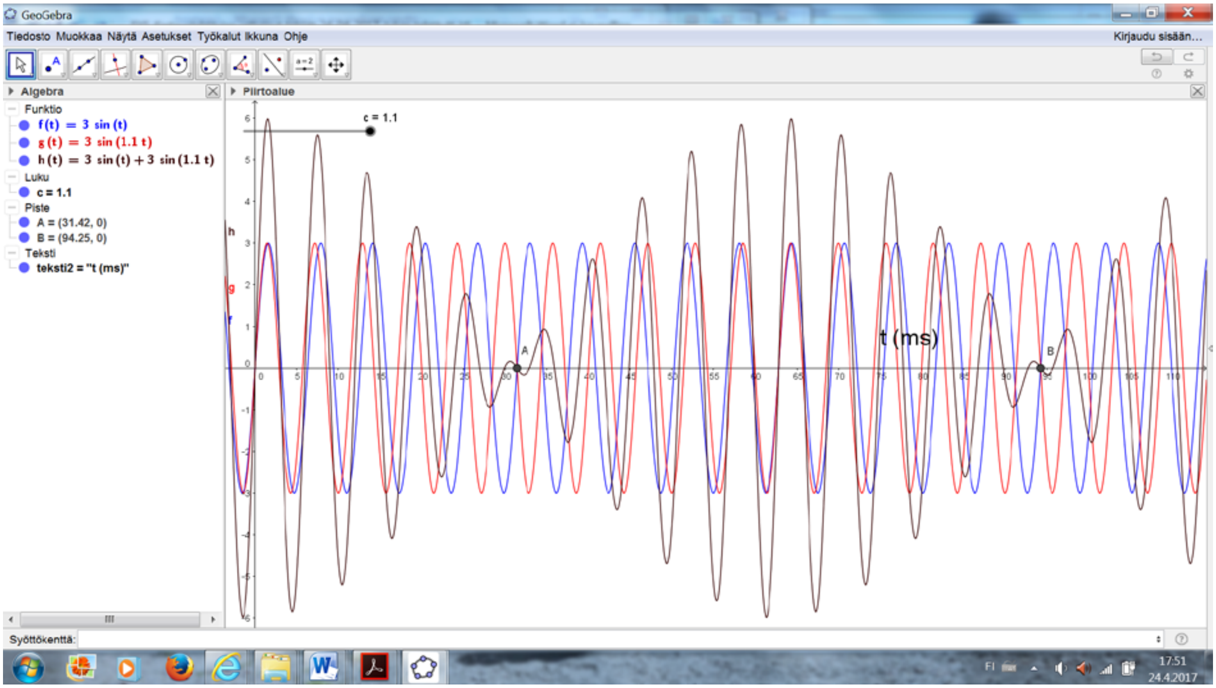
51. **a)** Koska g:n jakso on pitempi kuin f:n, g:n taajuus on pienempi.

b) Koska f:n jakso on pitempi kuin g:n, f:n taajuus on pienempi.

c) Huojuntaa ei esiinny, kun $c = 1$.



d)



Kun $c = 1{,}1$, jaksonaika on $T = 94{,}25 \text{ ms} - 31{,}42 \text{ ms} \approx 62{,}83 \text{ ms}$ ja taajuus $f = 1/T = 1/(62{,}83 \text{ ms}) \approx 16 \text{ Hz}$.

Myös tapauksessa $c = 0{,}9$ jaksonaika on $T = 63 \text{ ms}$ ja taajuus siten sama kuin edellisessä tapauksessa eli $f \approx 16 \text{ Hz}$.

VANHOJA YLIOPPILASTEHTÄVIÄ

S2016/5 (osa)

a) Newtonin II lain mukaan vaunuun vaikuttava kokonaisvoima on $\Sigma\overline{F} = m\overline{a}$. Koska vaunu on herkkäliikkeinen ja jousi kevyt, kitkaa ja jousen massaa ei oteta huomioon. Mittaustulokset asettuvat a,F-koordinaatistossa suoralle. Valitaan suoralta kaksi pistettä ja määritetään niiden avulla suoran fysikaalinen kulmakerroin. Vaunun massaksi saadaan

$$m = \frac{\Delta F}{\Delta a} = \frac{0,42\,\mathrm{N} - (-0,41\,\mathrm{N})}{1,25\,\mathrm{m/s^2} - (-1,25\,\mathrm{m/s^2})} = 0,332\,\mathrm{kg} \approx \underline{\underline{0,33\,\mathrm{kg}}}.$$

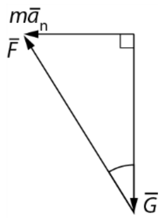
b) Hooken lain mukaan jousivoiman yhtälö on $\overline{F} = -k\overline{x}$. Mittaustulokset asettuvat a,F-koordinaatistossa suoralle. Jousivakio k saadaan tämän suoran fysikaalisesta kulmakertoimesta:

$$k = -\frac{\Delta F}{\Delta x} = -\frac{0,42\,\mathrm{N} - (-0,41\,\mathrm{N})}{-0,070\,\mathrm{m/s^2} - 0,071\,\mathrm{m/s^2}} = 5,88652\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx \underline{\underline{5,9\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}}.$$

K2013/6

a) l = 1,25 m, m = 87 g, α = 41°

Palloon kohdistuvat voimat ovat langan jännitysvoima $\overline{F}$ ja paino $\overline{G}$. Palloon kohdistuva ilmanvastus on pieni. Pallo on tasaisessa ympyräliikkeessä, joten kiihtyvyys $\overline{a}_\mathrm{n}$ on normaalikiihtyvyyttä, joka suuntautuu kohti ympyrän keskipistettä.



b) Pallon on ympyräliikkeessä, joten kiertoliikkeen jaksonaika on pallon yhden kierroksen aika $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v}$, jossa r on ympyräradan säde ja v ratavauhti. Koska pallo on ympyräradalla, Newtonin II lain mukaan on $\Sigma\bar{F} = m\bar{a}_{\mathrm{n}}$ eli $\bar{G} + \bar{F} = m\bar{a}_{\mathrm{n}}$, jossa $\bar{a}_{\mathrm{n}}$ on pallon normaalikiihtyvyys.

Vektorit $\bar{F}$, $\bar{G}$ ja $m\bar{a}_{\mathrm{n}}$ muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Pythagoraan lauseen perusteella $G^2 + (ma_{\mathrm{n}})^2 = F^2$ eli $G^2 + \left(m\frac{v^2}{r}\right)^2 = F^2$,

jossa $r = l\sin\alpha$. Ratkaistaan (symbolisella laskimella) yhtälöstä

ratavauhti v^4:

$$m^2\frac{v^4}{r^2} = F^2 - G^2$$

$$v^4 = \frac{r^2\left(F^2 - G^2\right)}{m^2}$$

$$v = \sqrt[4]{\frac{(l\sin\alpha)^2\left(\left(\frac{mg}{\cos\alpha}\right)^2 - (mg)^2\right)}{m^2}} = \sqrt[4]{(l\sin\alpha)^2 g^2\left(\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - 1\right)}$$

$$= \sqrt[4]{\left(1{,}25\ \mathrm{m}\cdot\sin 41°\right)^2\cdot\left(9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2\left(\left(\frac{1}{\cos 41°}\right)^2 - 1\right)} = 2{,}64449\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jaksonaika on $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \cdot l \sin\alpha}{v} = \frac{2\pi \cdot 1{,}25\ \text{m} \cdot \sin 41^\circ}{2{,}64449\ \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 1{,}9\ \text{s}.$

c) Palloon kohdistuva langan jännitysvoiman suuruus saadaan kohdan b suorakulmaisesta kolmiosta: $\cos\alpha = \frac{G}{F}$, josta

$$F = \frac{G}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{0{,}087\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 41^\circ} \approx 1{,}1\ \text{N}.$$

Langan palloon kohdistama voima on Newtonin III lain mukaan yhtä suuri kuin pallon lankaan kohdistama, lankaa jännittävä voima mutta vastakkaissuuntainen.

Lankaa jännittävä voima on suuruudeltaan 1,1 N, ja sen suunta on langan suunta alaviistoon.

K2014/11

a) Vedenpinnan aaltoliike muodostuu, kun lähteiden synnyttämät aallot interferoivat keskenään. Aaltojen vaaleissa ja tummissa kohdissa lähteiden synnyttämät aallot ovat samassa vaiheessa (vahvistava interferenssi): aaltojen huiput osuvat päällekkäin, samoin pohjat. Näissä kohdissa lähteistä mitattujen etäisyyksien erotus on aallonpituuksien kokonainen monikerta eli $\Delta d = n\lambda$, $n = 0,1,2,\ldots$. Näissä kohdissa aaltoliike on voimakasta ja kohtia nimitetään aaltojen maksimeiksi.

Harmaiden juovien esittämissä kohdissa aallot ovat vastakkaisessa vaiheessa (heikentävä interferenssi). Tällöin yhdestä lähteestä saapuvan aallon pohja ja toisen lähteen aallon huippu osuvat päällekkäin ja aallot sammuttavat toisensa. Näissä kohdissa lähteistä mitattujen etäisyyksien erotus on aallonpituuksien puolikkaiden kokonainen monikerta eli

$$\Delta d = (2n+1)\cdot\frac{\lambda}{2},\ n = 0,1,2,...$$

Aallot sammuttavat toisensa täysin vain, mikäli aaltojen amplitudit ovat yhtä suuret. Tällöin vesi ei aaltoile. Aaltojen amplitudi kuitenkin pienenee etäisyyden kasvaessa. Siksi aallot eivät täysin sammuta toisiaan kohdissa, joissa etäisyysero lähteisiin on saanut aikaan huomattavan eron aaltojen amplitudeihin.

b) Oletetaan aaltojen nopeus $v = f\lambda$ vakioksi. Tällöin taajuuden kaksinkertaistuessa aallonpituus pienenee puoleen ja aaltojen etenemissuunnassa aallon huippujen ja pohjien välimatka lyhenee. Vahvistavat ja heikentävät interferenssit toteutuvat pienemmillä matkaeroilla kuin kuvassa eli harmaiden kohtien muodostama ”viuhka” tiivistyy.

c) Kun toisen lähteen vaihe käännetään vastakkaiseksi, aallot ovat samassa vaiheessa ja vahvistavat toisiaan pisteissä, joissa aaltojen matkaero on pariton monikerta aallonpituuden puolikkaita. Vastaavasti aallot ovat vastakkaisessa vaiheessa ja heikentävät toisiaan, kun matkaero on aallonpituuden kokonainen monikerta. Alkuperäiseen kuvaan verrattuna minimit ja maksimit vaihtavat paikkaa keskenään.

K2004/5

a) Seisova aalto syntyy, kun kaksi vastakkaisiin suuntiin etenevää samanlaista aaltoa interferoivat. Interferenssiaallon poikkeama tasapainoasemasta vaihtelee paikallisesti. Kupujen keskellä värähtelyn amplitudi on maksimissaan ja solmuissa värähtelijät ovat paikallaan. Seisova aalto ei etene eikä siirrä energiaa. Seisova aalto syntyy tavallisesti heijastuksessa. Monissa soittimissa, esimerkiksi pianossa ja kitarassa, on sopivaan kireyteen jännitettyjä tankoja tai lankoja, joissa saadaan syntymään seisovia aaltoja. Puhallinsoittimien putkien sisällä syntyy seisovia aaltoja, joissa värähtelevät ilmapatsaat synnyttävät halutun taajuista ääntä. Soittimien kielien värähtelyt ovat seisovaa aaltoliikettä.

b) Kun havaitsija ja aaltolähde ovat liikkeessä toistensa suhteen, havaitsijan rekisteröimän aallon taajuus on erilainen verrattuna taajuuteen, kun molemmat ovat paikallaan. Esimerkiksi paikallaan olevaa havaitsijaa kohti tulevan moottoripyörän tai paloauton lähettämän äänen taajuus kuulostaa havaitsijasta korkeammalta (taajuus suurempi) kuin se kuulostaa äänilähteen mukana liikkuvan havaitsijan aistimana; vastaavasti loittonevan lähteen ääni kuuluu matalampana (taajuus pienempi). Etääntyvien tähtien lähettämän valon spektriviivat ovat siirtyneet kohti spektrin punaista päätä (punasiirtymä). Tällöin valon havaittu taajuus on pienempi kuin vastaavan paikallaan olevan lähteen lähettämän valon taajuus.

c) Vain poikittaisessa aaltoliikkeessä voi esiintyä polarisaatiota. Jos aaltoliikkeessä on vain yksi etenemissuuntaa vastaan kohtisuorassa oleva värähtelysuunta, aalto on täydellisesti polarisoitunut. Valo on täydellisesti polarisoitunut, jos sähkökenttä värähtelee vain yhdessä suunnassa. Valo polarisoituu kulkiessaan aurinkolasien polarisoivan lasin läpi tai heijastuessaan eristemateriaalin pinnasta sopivassa kulmassa. Tiedonvälityksessä käytetään antenneissa synnytettyjä polarisoituneita aaltoja. Nestekidenäytöistä heijastunut valo on polarisoitunutta.

K2013/4 (osa)

Ratkaistaan yhden ihmisen äänen intensiteetti I intensiteettitason yhtälöstä $L = 10\ \text{dB} \cdot \log \dfrac{I}{I_0}$:

$$\frac{L}{10\ \text{dB}} = \log \frac{I}{I_0}, \text{ josta saadaan}$$

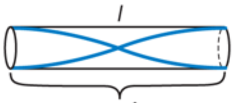
$$I = I_0 10^{L/(10\ \text{dB})} = 10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 10^{(55\ \text{dB})/(10\ \text{dB})} = 10^{-6,5}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 0{,}3162278 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

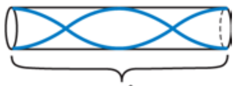
Viiden ihmisen äänen intensiteetti on $I_5 = 5I$, ja tätä vastaava intensiteettitaso on

$$L_5 = 10\ \text{dB} \cdot \log \frac{5I}{I_0} = 10\ \text{dB} \cdot \log \frac{5 \cdot 0{,}3162278 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}{10^{-12}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}} \approx 62\ \text{dB}.$$

S2004/5

a) Interferenssin vaikutuksesta putkeen syntyy seisova aalto. Putken avoimiin päihin syntyy kuvut ja välille yksi tai useita solmukohtia. Äänenvoimakkuuden ensimmäinen maksimi syntyy, kun putkessa on yksi solmu, jolloin värähtelevän ilmapatsaan pituus on puolet aallonpituudesta eli $l = \dfrac{\lambda}{2}$. Toinen maksimi syntyy, kun putkessa on kaksi solmua, jolloin ilmapatsaan pituus on kaksi aallonpituuden puolikasta eli $l = 2 \cdot \dfrac{\lambda}{2} = \lambda$.





b) Kun ensimmäinen äänenvoimakkuuden maksimi havaitaan, aallonpituus on

$\lambda_1 = 2l = 2 \cdot 1{,}10\text{ m} = 2{,}20\text{ m}.$

Äänen nopeus on $v_1 = \lambda_1 f_1 = 2{,}20\,\text{m}\cdot 150\,\frac{1}{\text{s}} = 330\,\text{m/s}$.

Kun havaitaan toinen äänenvoimakkuuden maksimi, aallonpituus on

$\lambda_2 = l = 1{,}10\text{ m}$. Äänen nopeus on $v_2 = \lambda_2 f_2 = 1{,}10\,\text{m}\cdot 295\,\frac{1}{\text{s}} = 324{,}5\,\text{m/s}$.

Lasketaan nopeuksien keskiarvo:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{330\,\text{m/s} + 324{,}5\,\text{m/s}}{2} \approx 327\ \text{m/s}.$$

Äänen nopeus on 327 m/s.

S2003/5.

a) Ääni etenee ilmassa pitkittäisenä aaltoliikkeenä. Äänen etenemisen suunnassa ilman molekyylit värähtelevät edestakaisin, jolloin ilmaan syntyy peräkkäisiä tihentymiä ja harventumia.

b) Äänen intensiteetti sekä äänen taajuus vaikuttavat eniten kuuloaistimuksen voimakkuuteen.

c) Ihmisen kuuleman äänen voimakkuus ei ole suoraan verrannollinen äänen intensiteettiin. Myös korvan herkkyys eri taajuisten äänien suhteen vaihtelee. Äänen intensiteettitason yhtälö on $L = 10\ \mathrm{dB} \cdot \log\frac{I}{I_0}$, jossa $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$ on äänen intensiteetti kuulokynnyksellä. Intensiteettitason yksikkö on 1 dB. Intensiteettitason asteikko on logaritminen, koska sen mukainen matemaattinen lainalaisuus vastaa korvan todellista toimintaa. Esimerkiksi tuotaessa yhden sähkömoottorin vierelle toinen sähkömoottori aistitun melutason voimakkuus ei kaksinkertaistu, vaikka intensiteetti kaksinkertaistuu.