Lähde: Matikkamatskut

1. Olkoon $g(x)=\dfrac{2x+6}{x^2-9}$. **(6 p.)**

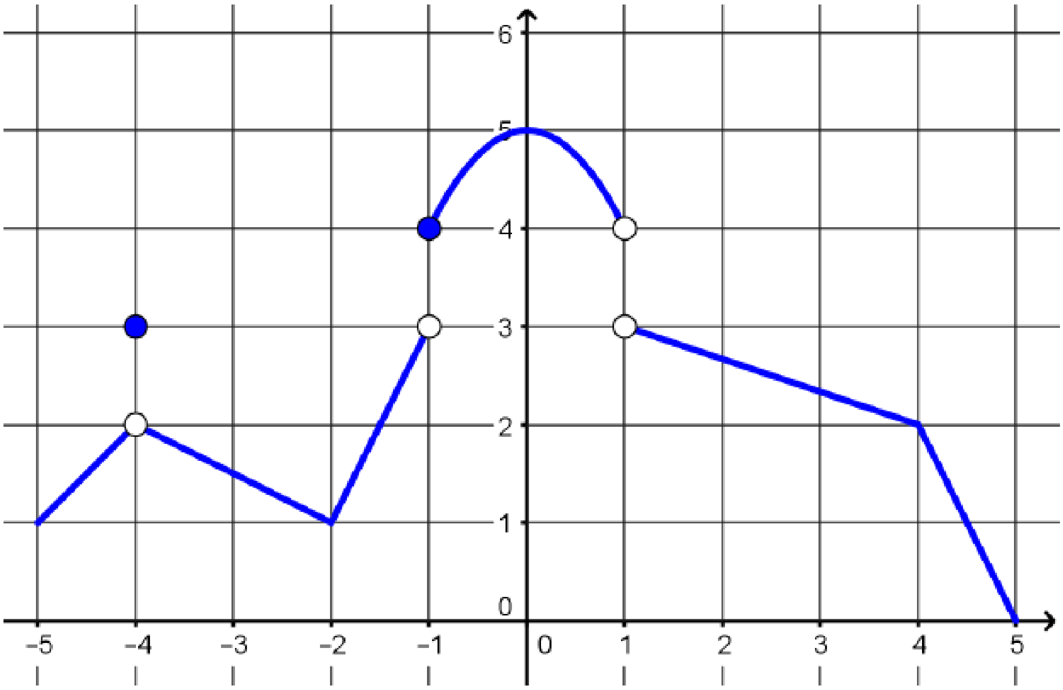
a) Mikä on funktion määrittelyjoukko?

b) Ratkaise ilman laskinohjelmistoa funktion nollakohdat.

c) sievennä funktion lauseke.

2. Ratkaise ilman laskinohjelmistoa epäyhtälö $\dfrac{2x^2+4}{x^2+x}\leq 2$. **(6 p.)**

1. Kuvassa on erään funktion $f(x)$ kuvaaja. Vastaa kuvan perusteella seuraaviin kysymyksiin. **(8 p.)**



a) Mitä on $f(-4)$?

b) Mitä on $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$?

c) Perustele *jatkuvuuden määritelmällä*, onko funktio jatkuva vai epäjatkuva kohdassa $x=-4$.

d) Perustele *jatkuvuuden määritelmällä*, onko funktio jatkuva vai epäjatkuva kohdassa $x=4$.

e) Mitä on $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$?

f) Perustele, onko funktio jatkuva tai epäjatkuva kohdassa $x=1$. Nyt tarkkana!!

g) Perustele, onko funktio vasemmalta jatkuva kohdassa $x=-1$.

h) Perustele, onko funktio jatkuva välillä $[-2, -1[$.

2. Olkoon funktio $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{kun } x=2 \\ \dfrac{x^2-4}{4x-8}, & \text{kun } x\neq 2 \end{cases}$. Tutki, onko funktio jatkuva kohdassa $x=2$. **(4 p.)**

a) Funktio $g(x)=\dfrac{2x+6}{x^2-9}$ ei ole määritelty nimittäjien nollakohdissa. Lasketaan nimittäjien nollakohdat:

$$x^2-9=0$$
$$x^2=9$$
$$x=-3 \text{ tai } x=3$$

Funktion määrittelyjoukko on $\underline{\underline{\mathbb{R}\setminus\{-3,\ 3\}}}$ (Käy myös määrittely<u>ehto</u>: $x\neq\pm3$) (2 p.)

b)

$$g(x)=0$$
$$\frac{2x+6}{x^2-9}=0 \quad \text{Rationaalilauseke on 0, kun osoittaja on 0}$$
$$2x+6=0 \qquad \text{(1 p.)}$$
$$2x=-6$$

$(x=-3)$ ei kuulu määrittelyjoukkoon! $\underline{\underline{\text{Vastaus: Ei nollakohtia!}}}$ (1 p.)

c)

$$g(x)=\frac{2x+6}{x^2-9}=\frac{2\cdot x+2\cdot 3}{x^2-3^2}$$
$$=\frac{2\cancel{(x+3)}}{(x-3)\cancel{(x+3)}} \qquad \text{(1 p.)}$$
$$=\underline{\underline{\frac{2}{x-3}}}$$

Vastaus: $\underline{\underline{g(x)=\dfrac{2}{x-3},\quad \text{missä } x\neq\pm3}}$ (1 p.)

a) Mitä on $f(-4)$? $\quad f(-4)=\underline{\underline{3}}$

b) Mitä on $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$? $\quad \lim\limits_{x\to -4} f(x)=\underline{\underline{2}}$

c) Perustele *jatkuvuuden määritelmällä*, onko funktio jatkuva vai epäjatkuva kohdassa $x=-4$.

Jatkuvuuden määritelmä: funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa a , jos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

a) ja b) –kohtien perusteella funktio on *<u>epäjatkuva</u>* kohdassa $x=-4$, sillä

$$\lim_{x\to -4} f(x)=\underline{2} \quad \neq \quad \underline{3}=f(-4).$$

d) Perustele *jatkuvuuden määritelmällä*, onko funktio jatkuva vai epäjatkuva kohdassa $x=4$.

Jatkuvuuden määritelmä: funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa a , jos $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Funktio on *<u>jatkuva</u>* kohdassa $x=4$, sillä $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\underline{2} \quad = \quad \underline{2}=f(4).$

---

e) Mitä on $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$? $\quad \lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\underline{\underline{3}} \quad$ (oikean puoleinen raja-arvo!)

f) Perustele, onko funktio jatkuva tai epäjatkuva kohdassa $x=1$. Nyt tarkkana!!

Funktio ei ole määritelty kohdassa $x=1$, joten se ***ei ole jatkuva eikä myöskään epäjatkuva*** kohdassa $x=1$. (funktiota ei ole siinä edes olemassa)

g) Perustele, onko funktio vasemmalta jatkuva kohdassa $x=-1$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to -1-} f(x) = 3 \quad & \text{(vasemman puoleinen raja-arvo!)} \\ f(-1) = 4 \quad & \text{(funktion arvo!)} \end{aligned}\right\} \text{erisuuret} \quad \Rightarrow \quad f(x) \ \underline{\text{ei ole}} \text{ vasemmalta jatkuva kohdassa } x=-1.$$

h) Perustele, onko funktio jatkuva välillä $[-2, -1[$.

Funktio on määritelty koko puoliavoimella välillä $[-2, -1[$ ja on jatkuva välin jokaisessa pisteessä. HUOM! -1 ei kuulu tarkasteltavalle välille!

Funktio $f(x)$ siis <u>on jatkuva</u> välillä $[-2, -1[$.

2. Olkoon funktio $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{kun } x=2 \\ \dfrac{x^2-4}{4x-8}, & \text{kun } x\neq 2 \end{cases}$. Tutki, onko funktio jatkuva kohdassa $x=2$. **(4 p.)**

Jatkuvuuden määritelmä: funktio $f(x)$ on jatkuva kohdassa a, jos $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{4x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{4\cdot x-4\cdot 2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{4\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1 \quad \text{(2 p.)}$$

$$f(2)=1 \qquad \text{(1 p.)}$$

Siis $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$, joten $f(x)$ *on jatkuva kohdassa* $x=2$. (1 p.)