Suhteellisuusteoriaa

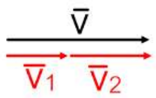
Tähtiä ja avaruutta tutkittaessa törmätään moniin äärimmäisen suuriin tai pieniin fysikaalisiin ominaisuuksiin, jotka koskevat aikaa, paikkaa, liike-energiaa tai kokonais-energiaa.
Seuraavassa lyhyt luettelo näistä erikoisen suhteellisuusteorian tuloksista.
Suureiden muunnoksien yhteydessä esiintyy usein kappaleen nopeudesta v riippuva kerroin

"gamma"

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad c = \text{valon nopeus}$$

Valon nopeuden invarianssi

Nopeus on yleensä riippuvainen havaitsijan liiketilasta:



$\overline{v} = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$

$\overline{v}$ = kohteen nopeus maahan nähden

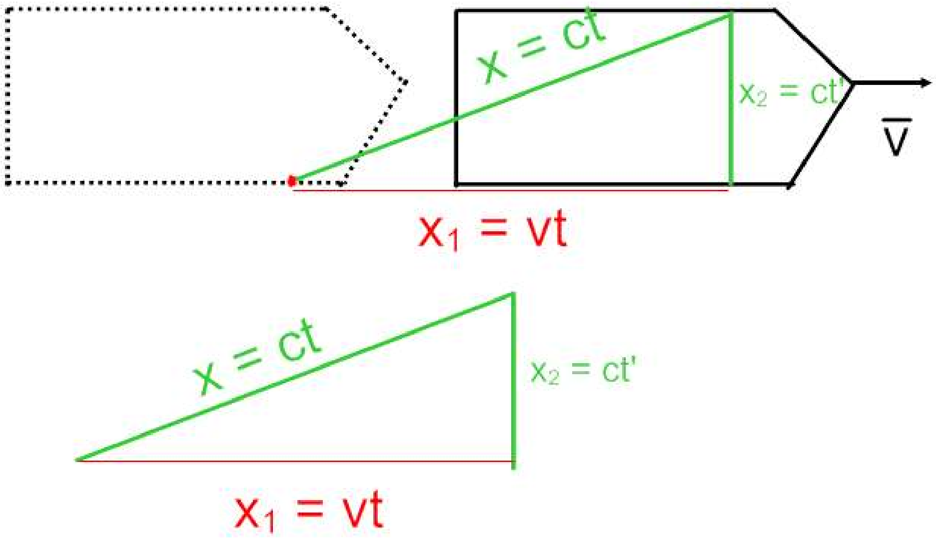
$\overline{v}_1$ = havaitsijan nopeus maahan nähden

$\overline{v}_2$ = havaisijan mittaama kohteen nopeus

Valon nopeutta tutkittaessa on kuitenkin todettu, että VALON NOPEUS EI RIIPU HAVAITSIJAN LIIKETILASTA.

Aikadilataatio

Motto: "Liikkuva kello jätättää" eli se käy liian hitaasti.



Tapahtuma: Valonsäde kiipeää avaruusaluksen lattiasta kattoon. Avaruusaluksessa mitataan tapahtuman kestoaika = t'. Toinen havaitsija, joka näkee avaruusaluksen liikkuvan nopeudella v, mittaa tapahtuman kestoajan t.

Pythagoraan lause: $x_1^2 + x_2^2 = x^2$ eli

$v^2t^2 + c^2t'^2 = c^2t^2$, josta $c^2t'^2 = c^2t^2 - v^2t^2 \quad |:c^2$

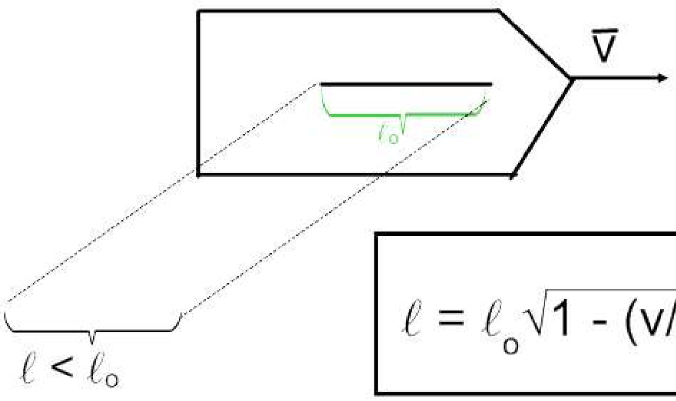
$$t'^2 = t^2 - \frac{v^2t^2}{c^2} = t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad |\sqrt{}$$

eli $t' = t\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} < t$ eli $\boxed{t = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}t' = \gamma t'}$

Pituuden kontraktio

Motto: "Liikkuva kappale lyhenee."

Jos mitataan nopeasti liikkuvan kohteen pituutta, saadaan pienempi tulos kuin mitattaessa pituutta levossa:



$$\boxed{\ell = \ell_o\sqrt{1 - (v/c)^2} = \frac{\ell_o}{\gamma}}$$

Liikkuvan kappaleen massan kasvu

Törmäystilanteessa kappaleen liikemäärä eli

$$p = m \cdot v$$

on tärkeässä roolissa. Liikemäärä on siis massan ja nopeuden tulo. Jos tutkitaan hyvin suurella nopeudella liikkuvia hiukkasia, huomataan, että niiden liikemäärä tuntuu olevan suurempi kuin klassinen tarkastelu ennustaa. Silloin otetaan käyttöön kappaleen "liikemassa"

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} m_o = \gamma m_o$$

Kokonaisenergia

Einsteinin kuuluisa kaava

$$E = mc^2$$

on kirvoittanut monen opiskelijan mielessä ajatuksen kysymyksen: "Mistä se tulee?"

Vastauksen antaminen ei ole helppoa.

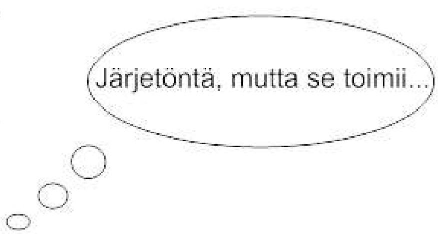
Oikeastaan kaavassa näyttää olevan ensinäkemältä järkeä vain siksi, että se antaa energialle energian yksikön, koska

$$[E] = [m][c^2] = [m][c]^2 = 1\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1\text{J (joule)}$$

Tarkemmin analysoituna suureella m tarkoitetaan "liikemassaa", joka voi liikkua nopeudella $0 < v < c$, missä c on valon nopeus. Toisaalta voidaan puhua myös "lepomassasta",

jolle käytetään merkintää m_o. Jos paikallaan oleva kappale muutetaan kokonaan energiaksi, kyseisen lepomassaenergian suuruus on

$$\boxed{E_o = m_o c^2}$$



Liike-energia

Erikoisen suhteellisuusteorian mukaan kappaleen liike-energia on

$$
\begin{aligned}
E_k &= E - E_o = mc^2 - m_o c^2 = (m - m_o)c^2 \\
&= \Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}}_{\gamma} m_o - m_o \Big) c^2 \\
&= (\gamma m_o - m_o)c^2 = (\gamma - 1) m_o c^2 .
\end{aligned}
$$

Klassinen liike-energia on

$$\boxed{E_k = \tfrac{1}{2} m_o v^2 .}$$

Ei oikein täsmää...

Kuitenkin, jos $v << c$,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \approx 1 + \tfrac{1}{2}(v/c)^2, \text{ jolloin}$$

$$\gamma - 1 = \tfrac{1}{2}\,(v/c)^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{v^2}{c^2} \quad \text{ja}$$

$$E_k = (\gamma - 1) m_o c^2 = \tfrac{1}{2}\,\frac{v^2}{\cancel{c^2}}\, m_o \cancel{c^2} = \tfrac{1}{2} m_o v^2 . \quad \square$$