Fysiikka 5: Jaksollinen liike ja aallot

1. Momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta
2. Tasapainossa voimat ja momentit kumoutuvat
3. Ympyräliike on kaksiulotteista liikettä
4. Kaikkien kappaleiden välillä on gravitaatiovuoro-vaikutus
5. Planetaarista liikettä voi mallintaa ympyräliikkeenä

6. Harmoninen voima on kohti tasapainoasemaa
7. Harmoninen värähdysliike on yksi liikkeen malli
8. Harmonisen värähtelijän energia säilyy eristetyssä systeemissä
9. Mekaaninen aaltoliike tarvitsee edetäkseen väliaineen
10. Aallot heijastuvat ja taittuvat
11. Aallot voivat vahvistaa ja heikentää toisiaan
12. Seisova aalto syntyy interferenssin seurauksena

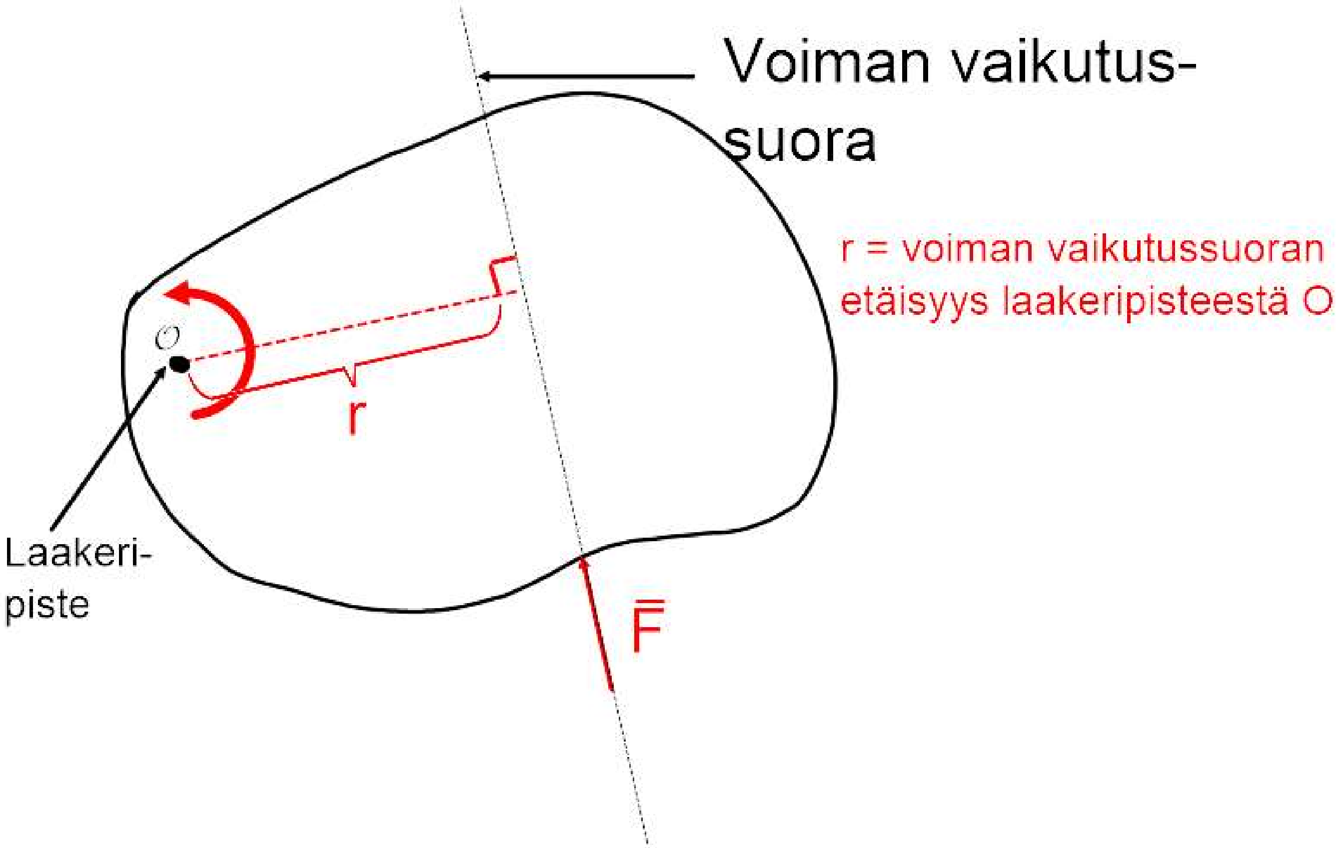
13. Ääni on pitkittäistä mekaanista aaltoliikettä

14. Ääniaallot vuorovaikuttavat keskenään ja ympäristön kanssa

15. Äänen havaittu voimakkuus havaitaan desibeleinä

16. Äänellä on monia sovelluksia

1. Momentti kuvaa voiman vääntövaikutusta



Voiman F momentti pisteen O suhteen on

$$M_o = F \cdot r$$

Voiman momentin yksikkö:

$$[M] = [F][r] = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = 1\text{Nm}$$

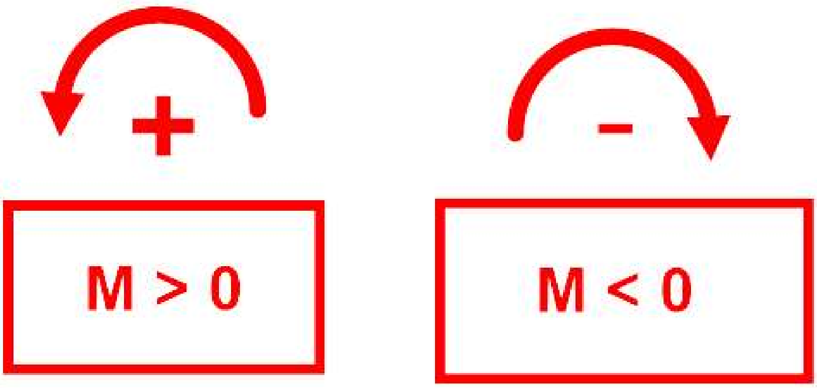
Voimien tasapaino kiertoliikkeen suhteen:

"Sigma" = SUMMA

$$\Sigma M_o = 0$$

Kokonaismomentti on oltava nolla <u>minkä tahansa</u> pisteen O suhteen.

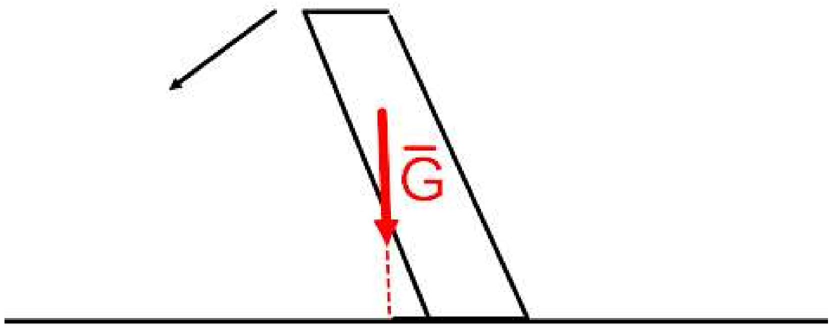
Momenttien merkkisäännöt:



2 Tasapainossa voimat ja momentit kumoutuvat

Kappaleen kaatumisehto:

Kappale kaatuu, jos sen painovoiman vaikutussuora menee tukipinnan ulkopuolelle:



Jäykän kappaleen tasapaino

1.Etenevän liikkeen tasapaino: $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.

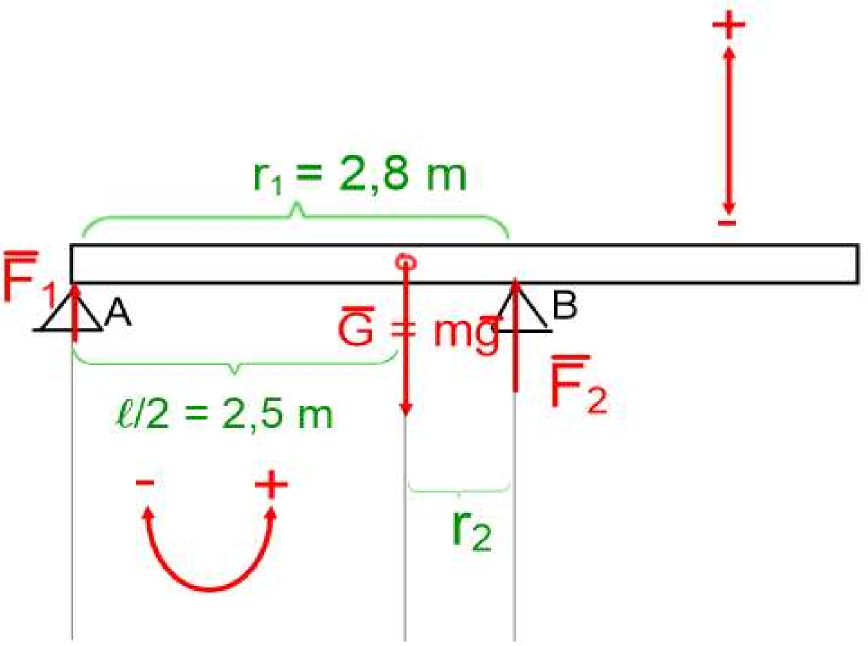
2.Kiertoliikkeen tasapaino: $\Sigma M_A = 0$
minkä tahansa momenttipisteen A suhteen.

Momenttipiste voidaan siis valita mahdollisimman tarkoituksenmukaisella tavalla.

ESIMERKKI 3 s. 24
Parrun tukivoimat

$m = 80\text{kg}$
$\ell = 5{,}0\ \text{m}$
$r_2 = r_1 - \ell/2$
$= 2{,}8\ \text{m} - 2{,}5\ \text{m}$
$= 0{,}30\ \text{m}$

a)



$$\Sigma M_B = G \cdot r_2 - F_1 \cdot r_1 = 0$$

eli $F_1 r_1 = G r_2$ eli $F_1 r_1 = mgr_2 \;|:r_1$

$$F_1 = \frac{mgr_2}{r_1} = \frac{80\text{kg} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \cdot 0{,}30\cancel{\text{m}}}{2{,}8\ \cancel{\text{m}}}$$

$$\approx 84{,}09\ \text{N} \approx 84\ \text{N}$$

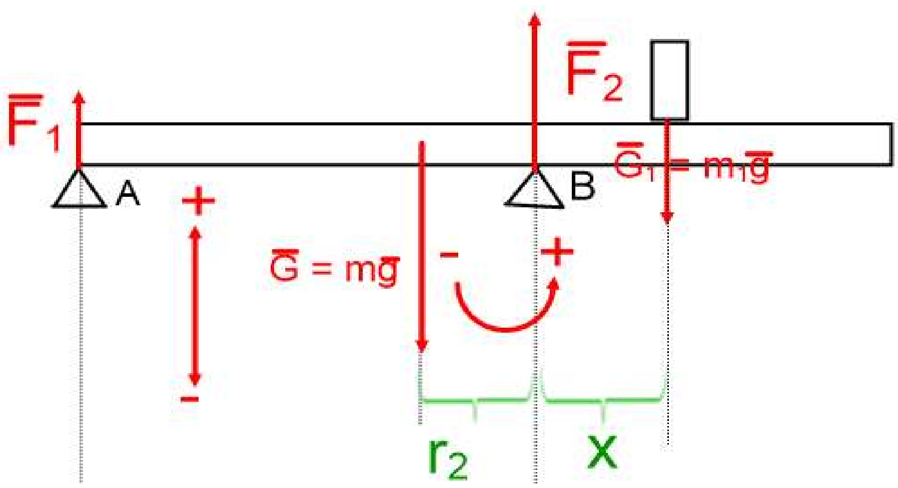
Voimatasapaino: $\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$

Suuntasopimus: $F_1 + F_2 - G = 0$

Ratk. F_2:

$$F_2 = G - F_1 = mg - F_1$$
$$= 80\text{kg} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 - 84{,}09\text{N}$$
$$\approx 700{,}7\text{ N} \approx 701\text{ N}$$

b) Milloin palkki kaatuu?



ℓ = 5,0 m
m = 80kg
m_1 = 48kg
r_2 = 0,30 m
x = ?

Milloin palkki kaatuu? Rajatapauksessa palkin vasen pää irtoaa tuesta A, jolloin $F_1 = 0$.

Momenttiehto pisteen B suhteen:

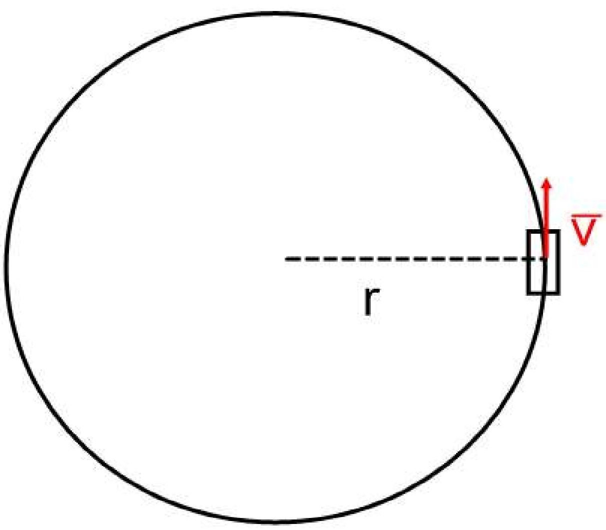
$\Sigma M_B = Gr_2 - G_1x = 0$ eli

$mgr_2 - m_1gx = 0 \quad m_1gx = mgr_2 \; |:m_1g$

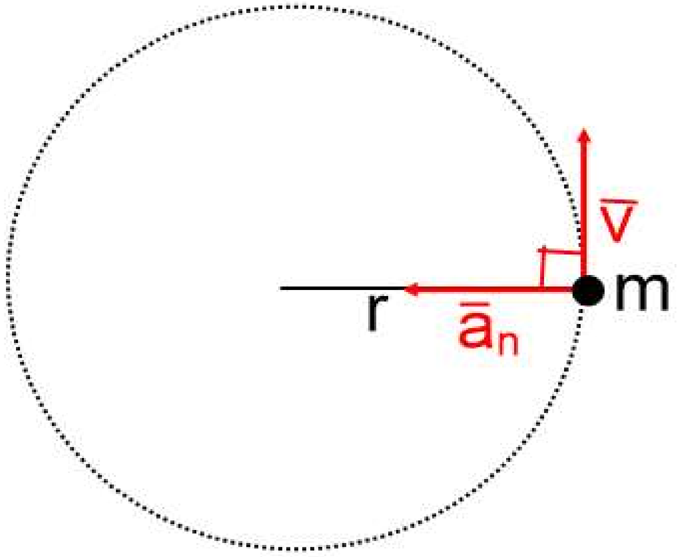
$$x = \frac{m\cancel{g}r_2}{m_1\cancel{g}} = \frac{mr_2}{m_1} = \frac{80\cancel{kg}\cdot 0{,}30\,\text{m}}{48\cancel{kg}} = 0{,}50\ \text{m}.$$

3 Ympyräliike on kaksiulotteista liikettä

- TASAINEN YMPYRÄLIIKE on TASAISTA LIIKETTÄ YMPYRÄRADALLA eli
- r = vakio JA
- v = vakio



- liikesuunnan muuttamiseen tarvitaan kiihtyvyyttä (NORMAALIKIIHTYVYYTTÄ $\bar{a}_n$)



Tarvittavan normaalikiihtyvyyden suuruus

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{r}}$$

MAOL s. 124

Normaalikiihtyvyyden suunta on AINA kohti kaarevuuskeskipistettä.

Liikeyhtälö tasaisessa ympyräliikkeessä:

$$\Sigma\bar{F} = m\bar{a}_n$$

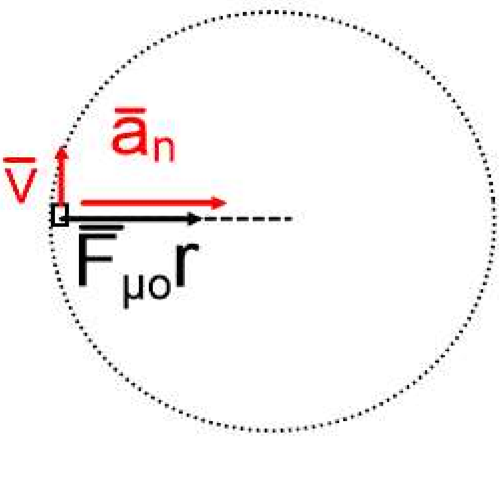
Tasaisessa ympyräliikkeessä tarvittava kokonaisvoima

- on suuruudeltaan vakio
- muuttaa suuntaansa siten että se suun-tautuu joka hetki kohti ympyräradan keskipistettä (eli se on samalla kohti-suorassa liikesuuntaan nähden)

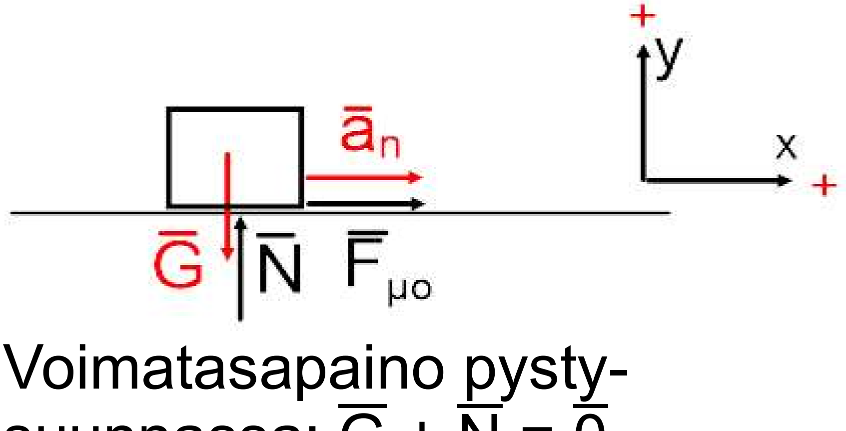
Tällainen voima voi olla esimerkiksi

- lepokitkavoima
- langan jännitysvoima
- gravitaatiovoima
- magneettinen voima

ESIMERKKI 3 s. 37 Kaarteessa pysyminen



$F_{\mu o}$ = lepokitkavoima
V = 14 km/h = 14/3,6 m/s
r = 8,2m
μ_o = 0,23



Voimatasapaino pysty-suunnassa: $\overline{G} + \overline{N} = \overline{0}$.

Skalaariyhtälö
$N - G = 0$ eli $N = G = mg$.

Liikeyhtälö tien pinnan suunnassa:

$\Sigma\overline{F}_x = m\overline{a}_n$ eli skalaarimuodossa

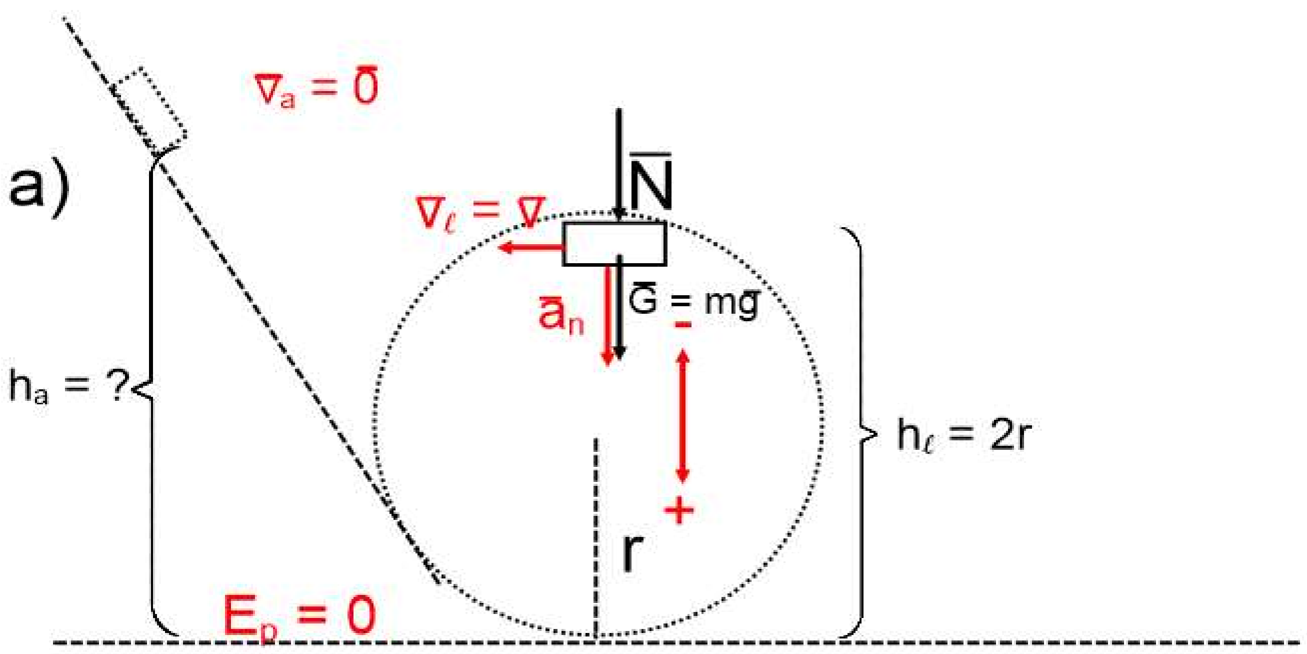
$$F_{\mu o} = \frac{mv^2}{r} \quad | \; F_{\mu o} = \mu_o N = \mu_o mg \text{ eli}$$

$$\mu_o mg = \frac{mv^2}{r} \quad |\cdot r \quad |: \mu_o mg$$

$$r = \frac{mv^2}{\mu_o mg} = \frac{v^2}{\mu_o g} = \frac{\left(\frac{14}{3,6}\right)^2 \frac{m^2}{s^2}}{0,23 \cdot 9,81 \frac{m}{s^2}} \approx 6,70\,m < 8,2\,m.$$

Ei lähde luisuun...

ESIMERKKI 5 s. 39 Vuoristoradan juna:



Liikeyhtälö radan ylimmässä kohdassa:

$m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{a}_n$ eli $mg + \cancel{N} = \frac{mv^2}{r}$

Irtoamisehto: $N \to 0$, jolloin

$\cancel{m}g = \frac{\cancel{m}v^2}{r}$ $|:m|\cdot r$ ja $v^2 = gr$ eli $v = \sqrt{gr}$

Ratkaistaan tarvittava alkukorkeus h_a mekaanisen energian säilymislakia käyttäen:

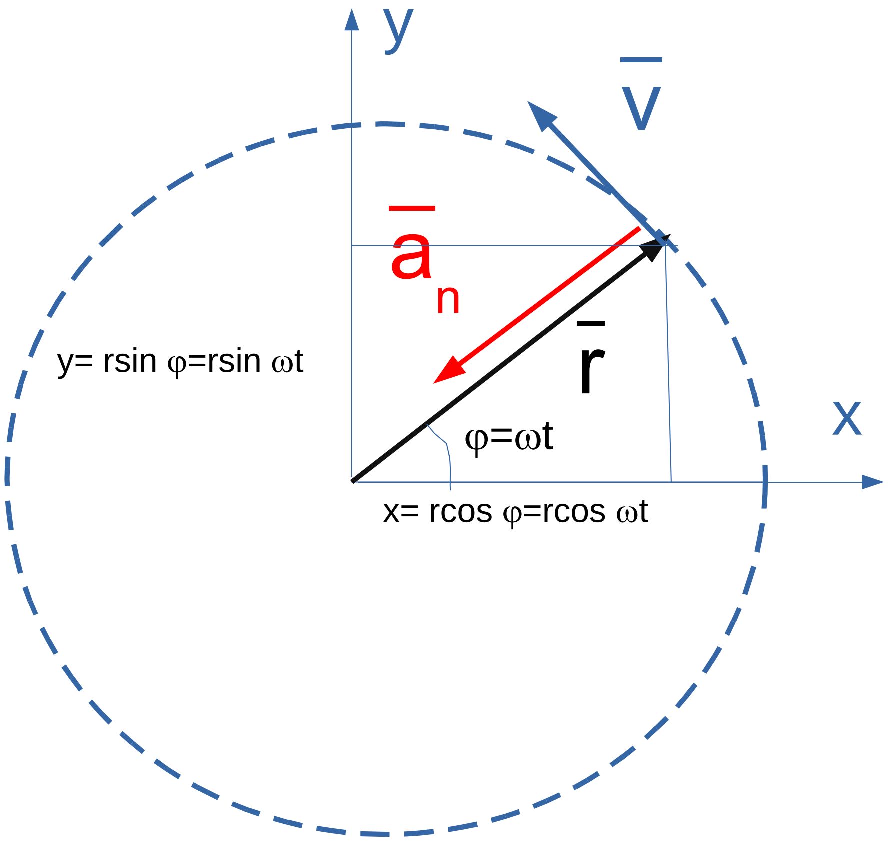
$E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ eli

$mgh_a + \cancel{\tfrac{1}{2}m\underbrace{v_a}_{0}^2} = mg2r + \tfrac{1}{2}mv^2$ $|\ v^2 = gr$

$mgh_a = \underbrace{2mgr + \tfrac{1}{2}mgr}_{5/2mgr}$ eli $mgh_a = \frac{5}{2}mgr$

$h_a = \frac{5/2\cancel{mg}r}{\cancel{mg}} = \frac{5}{2}r = \frac{5}{2} \cdot 5{,}0\text{ m} = 12{,}5\text{ m.}$

Miten normaalikiihtyvyyden lauseke lasketaan?



Paikkavektori:

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j}, \quad \text{missä}$$

$$x(t) = r\cos\omega t \qquad y(t) = r\sin\omega t$$

Nopeusvektori: $\bar{v} = v_x(t)\,\bar{i} + v_y(t)\,\bar{j}$, missä

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = r(-\sin\omega t)\cdot\omega = -\omega r\sin\omega t \quad \text{ja}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = r\cos\omega t\cdot\omega = \omega r\cos\omega t \quad \text{ja}$$

Kiihtyvyysvektori: $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$, missä

$$a_x(t) = \frac{d v_x}{dt} = -\omega r \cos \omega t \cdot \omega = -\omega^2 r \cos \omega t \quad \text{ja}$$

$$a_y(t) = \frac{d v_y}{dt} = -\omega r \sin \omega t \cdot \omega = -\omega^2 r \sin \omega t .$$

Siis $\bar{a} = -\omega^2 r \cos \omega t \, \bar{i} - \omega^2 r \sin \omega t \, \bar{j}$

eli $\bar{a} = -\omega^2 \underbrace{(r\cos \omega t \, \bar{i} + \omega^{2r} \sin \omega t \, \bar{j})}_{\bar{r}} = -\omega^2 \bar{r} .$

Kiihtyvyys suuntautuu siis origoon päin, koska kiihtyvyysvektori a on vastakkaissuuntainen paikkavektoriin r nähden eli

$$\bar{a} = -\omega^2 \bar{r} .$$

Lisäksi

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\omega^2 r)^2 \cos^2 \omega t + (\omega^2 r)^2 \sin^2 \omega t} \quad \text{eli}$$

$$a = \omega^2 r \underbrace{\sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}}_{1} = \omega^2 r = \left(\frac{v}{r}\right)^2 \cdot r = \frac{v^2}{r^2} \cdot r = \frac{v^2}{r} .$$

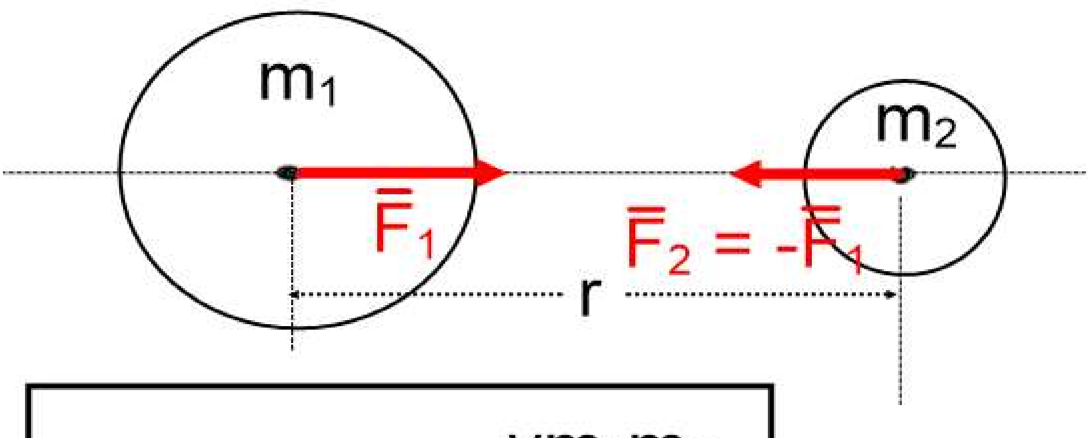
Lisäksi huomataan, että

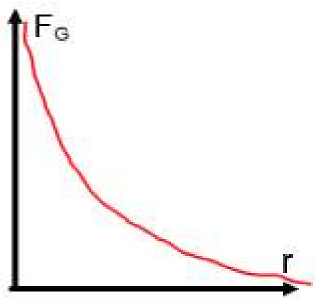
$$\bar{r}\cdot\bar{v}=(x\,\bar{i}+y\,\bar{j})\cdot(v_x\,\bar{i}+v_y\,\bar{j})$$
$$=(r\cos\omega t\,\bar{i}+r\sin\omega t\,\bar{j})\cdot(-\omega r\sin\omega t\,\bar{i}+\omega r\cos\omega t\,\bar{j})$$
$$=-\omega r^2\sin\omega t\cos\omega t+\omega r^2\sin\omega t\cos\omega t=0.$$

Tämä merkitsee sitä, että tasaisessa ympyräliikkeessä kehäpisteen paikka-vektori ja nopeusvektori ovat kohti-suorassa toisiinsa nähden. Vastaa-valla tarkastelulla voidaan todeta, että

$$\bar{v}\cdot\bar{a}=0\,.$$

4 Kaikkien kappaleiden välillä on gravitaatiovuorovaikutus





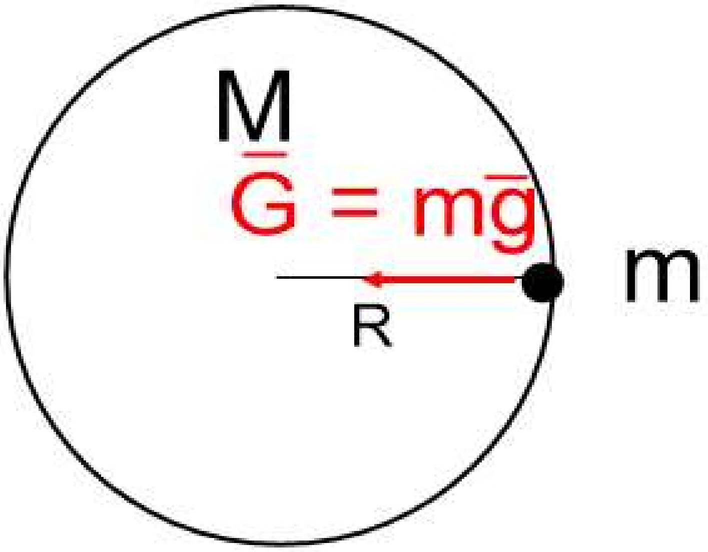
$$\boxed{F_1 = F_2 = F_G = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}}$$

MAOL s. 125

γ = gravitaatiovakio
$= 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

ESIMERKKI 3 s. 46

Putoamiskiihtyvyyden arviointi maapallon pinnalla:



Gravitaatiolaki: $G = \dfrac{\gamma M m}{R^2}$ Toisaalta $G = mg$

Siis $\dfrac{\gamma M \cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}g$ $|:m$

$$g = \frac{\gamma M}{R^2}$$

$$= \frac{6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \cancel{kg}m/s^2 \cdot \cancel{m^2}/\cancel{kg^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \cancel{kg}}{(6378{,}140 \cdot 10^3)^2\ \cancel{m^2}}$$

$$\approx 9{,}80 m/s^2$$

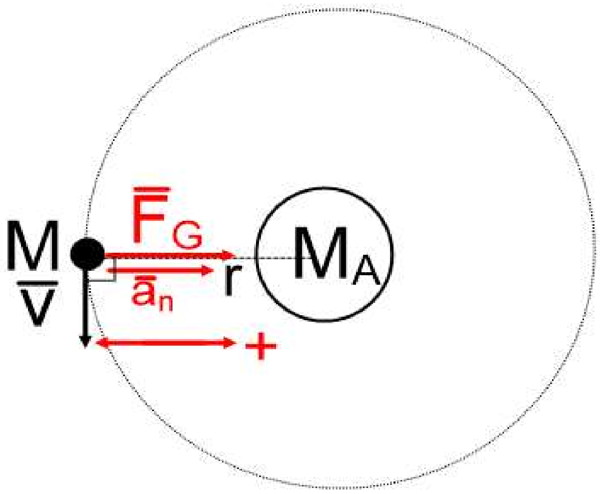
5 Planeettojen ja satelliittien liike

ESIMERKKI 2 s 55

Maapallon kiertoaika Auringon ympäri

Oletukset:

- tasainen ympyräliike (r = vakio ja v = vakio)
- Aurinko pysyy paikallaan Maan radan keskipisteessä (Tämä ei pidä ihan tarkalleen paikkaansa.)



Liikeyhtälö: $\bar{F}_G = M\bar{a}_n$

Skalaariyhtälö: $F_G = \frac{Mv^2}{r}$

$$\frac{\gamma M_A \cancel{M}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{M}v^2}{\cancel{r}} \quad |:M \quad |\cdot r$$

$$\frac{\gamma M_A}{r} = v^2 \quad |\text{Tasainen ympyräliike: } v = 2\pi r/T$$

$$\frac{\gamma M_A}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \qquad \gamma M_A T^2 = 4\pi^2 r^3 \quad |:\gamma M_A$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M_A} \quad |\sqrt{}$$

Tämä on Keplerin III lain mukainen tulos: $T^2 = VAKIO \cdot r^3$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\gamma M_A}}$$

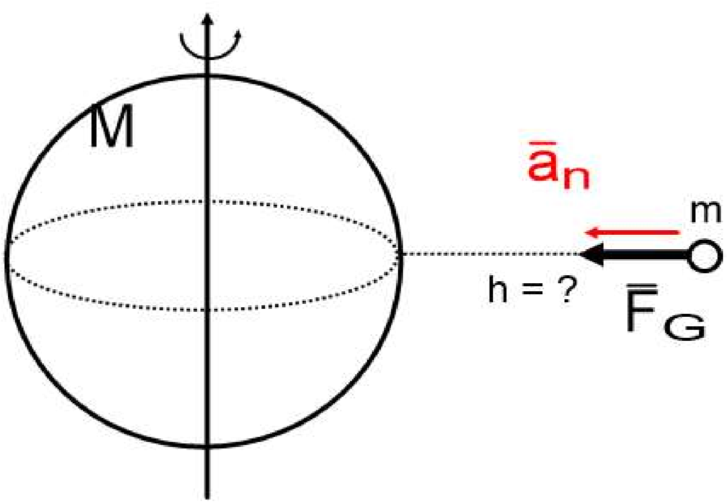
$$= \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (149{,}6 \cdot 10^9)^3 \cancel{m^3}}{6{,}67430 \cdot 10^{-11} \frac{\cancel{kg} \cancel{m^2}}{s^2 \cancel{kg^2}} \cdot 1{,}989 \cdot 10^{30} \cancel{kg}}}$$

$$\approx 31{,}5536 \cdot 10^6 s \approx 365{,}2d.$$

ESIMERKKI 3: Geostationäärinen satelliitti

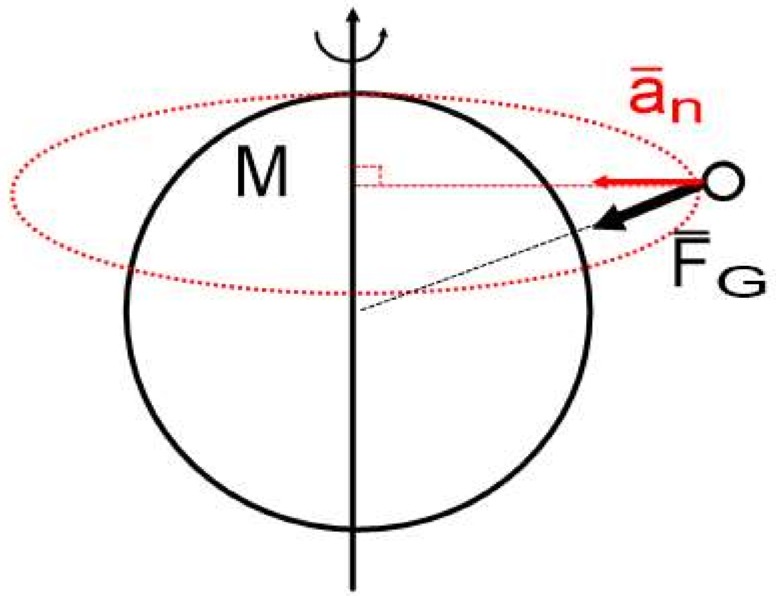
- sijaitsee päiväntasaajan yläpuolella
- kiertää maapallon samassa ajassa kuin maapallo pyörähtää yhden kierroksen
- näyttää olevan Maasta katsottuna paikallaan
- kuinka korkealla se on?

Miksi päiväntasaajan yläpuolella?



Ainoastaan päiväntasaajalla normaalikiihtyvyys ja gravitaatio-voima ovat samansuuntaisia.

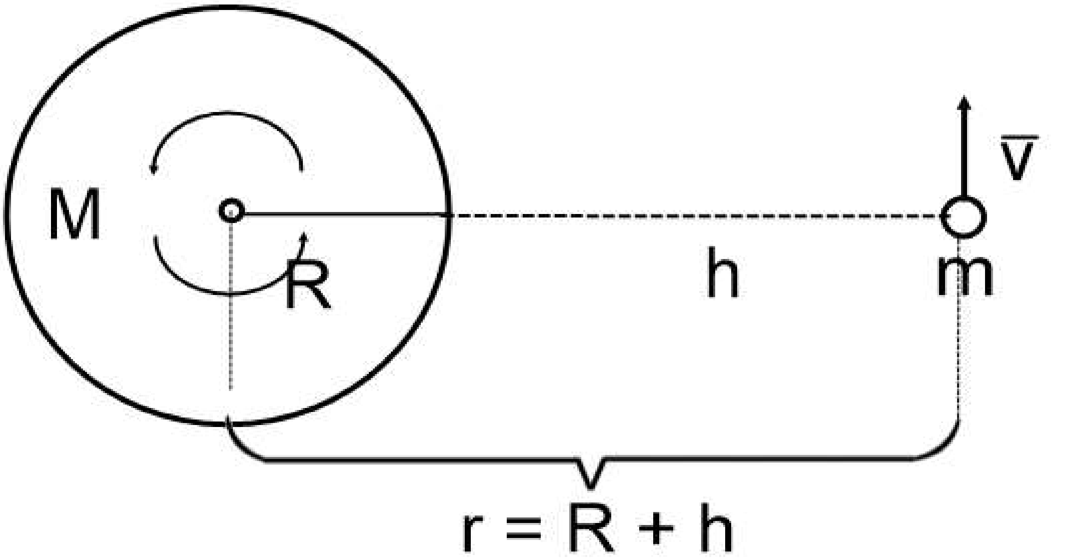
Jos ei olla päiväntasaajalla...



Gravitaatiovoima osoittaa maapallon keskipisteeseen ja normaalikiihtyvyys ratatason keskipisteeseen eli

$$\bar{F}_G \nparallel \bar{a}_n$$

Pohjoisnavalta katsottuna...



Liikeyhtälö: $\bar{F}_G = m\bar{a}_n$ eli

$$\frac{\gamma M m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Sijoitetaan $v = \dfrac{2\pi r}{T}$,

jolloin saadaan sievennyksen jälkeen kaava

$$\frac{\gamma M \cancel{m}}{r^2} = \frac{\cancel{m}4\pi^2 r^2}{rT^2} \quad |:m \; |\cdot r^2 \qquad \text{eli}$$

$$\gamma M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2} \quad |\cdot T^2 \; |:4\pi^2 r^3 \qquad \text{eli} \quad r^3 = \frac{T^2 \gamma M}{4\pi^2} \; |\sqrt[3]{}$$

Satelliitin etäisyys maapallon keskipisteestä on

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \gamma M}{4\pi^2}}$$

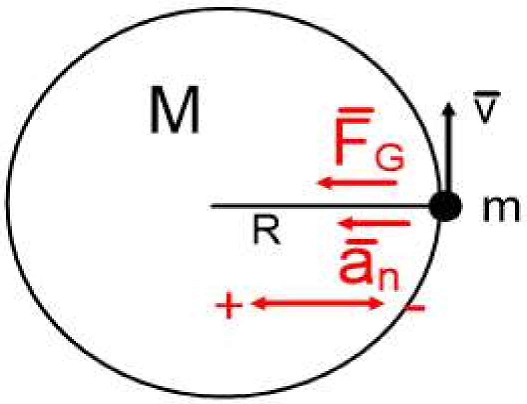
$$= \sqrt[3]{\frac{(86164{,}1\,\text{s})^2 \cdot 6{,}67430 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\text{kg}}{4\pi^2}}$$

$\approx$ 42168,4 km ja kysytty korkeus

$h = r - R = 42168{,}4\text{km} - 6378\text{km} \approx 35790\text{km}.$

ESIMERKKI 4
Ensimmäinen pakonopeus:

Ongelma: Millä lähtönopeudella päästään maapalloa kiertävälle radalle?



Liikeyhtälö: $\bar{F}_G = m\bar{a}_n$

Skalaariyhtälö:

$$\frac{\gamma M \cancel{m}}{R^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} v^2}{\cancel{R}} \qquad |\cdot R \; |:m$$

$$v^2 = \frac{\gamma M}{R} \qquad |\sqrt{}$$

$$v = v_I = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67430\cdot 10^{-11}\,\cancel{kg}m/s^2\cdot m^2/kg^{\cancel{2}}\cdot 5{,}974\cdot 10^{24}\,\cancel{kg}}{6378\cdot 10^3\,\cancel{m}}}$$

$$\approx 7900 \text{ m/s}.$$

$$v^2 = \frac{\gamma M}{R} \quad |\sqrt{}$$

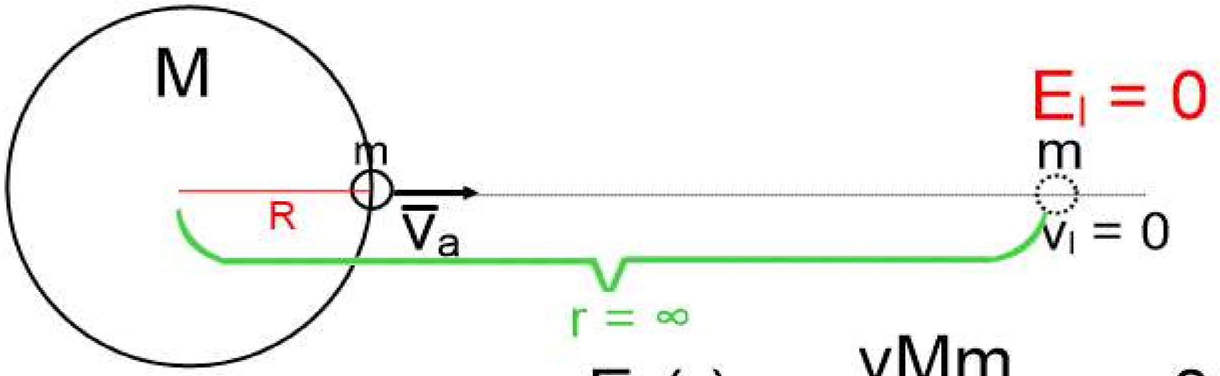
$$v = v_I = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}$$

$$= \sqrt{\frac{6{,}67428 \cdot 10^{-11}\ \cancel{kg}m/s^2 \cdot m^2/\cancel{kg^2} \cdot 5{,}974 \cdot 10^{24}\ \cancel{kg}}{6378 \cdot 10^3\ \cancel{m}}}$$

$$\approx 7900\ \text{m/s.}$$

ESIMERKKI EXTRA Toinen pakonopeus

Ongelma: Millä lähtönopeudella päästään äärettömän kauas maapallosta?



$$E_p(r) = -\frac{\gamma M m}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0^-$$

Palautetaan mieleen mekaanisen energian säilymislaki:

$E_p + E_k = \text{VAKIO}$ eli

$E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$ eli

$$-\gamma \frac{Mm}{r_a} + \frac{1}{2} m v_a^2 = -\gamma \frac{Mm}{r_l} + \frac{1}{2} m v_l^2 .$$

$E_{p,a} + E_{k,a} = \underbrace{\cancel{E_{p,l}}}_{\xrightarrow[r \to \infty]{} 0} + \underbrace{\cancel{E_{k,l}}}_{0}$, ts.

$-\frac{\gamma M \cancel{m}}{R} + \frac{1}{2} \cancel{m} v_a^2 = 0 \quad |\cdot 2 \quad |:m$

$v_a^2 = \frac{2\gamma M}{R}$ eli

$v_a = v_{II} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{2} v_I = \ldots \approx 11200 \text{ m/s}$

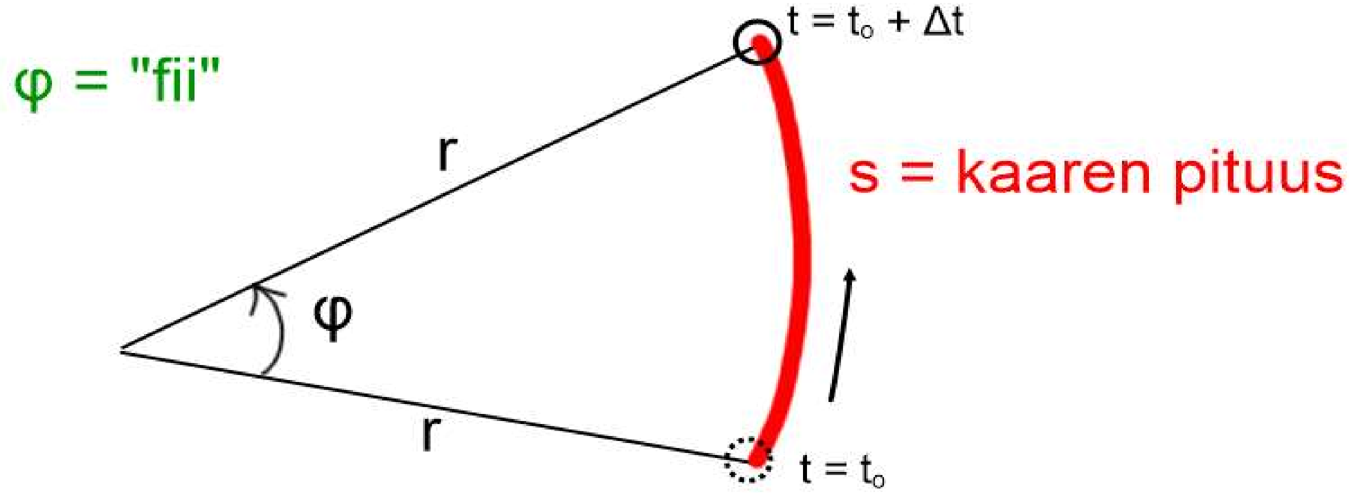
Pyörimisliike

$$\text{Pyörimisnopeus} = \frac{\text{Kierrosten lukumäärä}}{\text{Käytetty aika}}$$

ts. $$\boxed{n = \frac{N}{\Delta t} = \frac{1}{T}}$$ T = kierrosaika

$$[n] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{1s} = \frac{1}{s}$$

Kiertokulma



Kiertokulma (radiaaneina):

$$\boxed{\varphi = \frac{s}{r}}$$ $[\varphi]$ = 1rad (radiaani)

ESIMERKKEJÄ:

Jos kierretään täysi kierros eli 360°, vastaava kulma radiaaneissa on

$$\varphi = \frac{s}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi \text{ (rad)} \qquad s = 2\pi r$$

Jos kierretään neljänneskierros eli 90°,

vastaava kaaren pituus on $$s = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{2\pi r}{4}$$

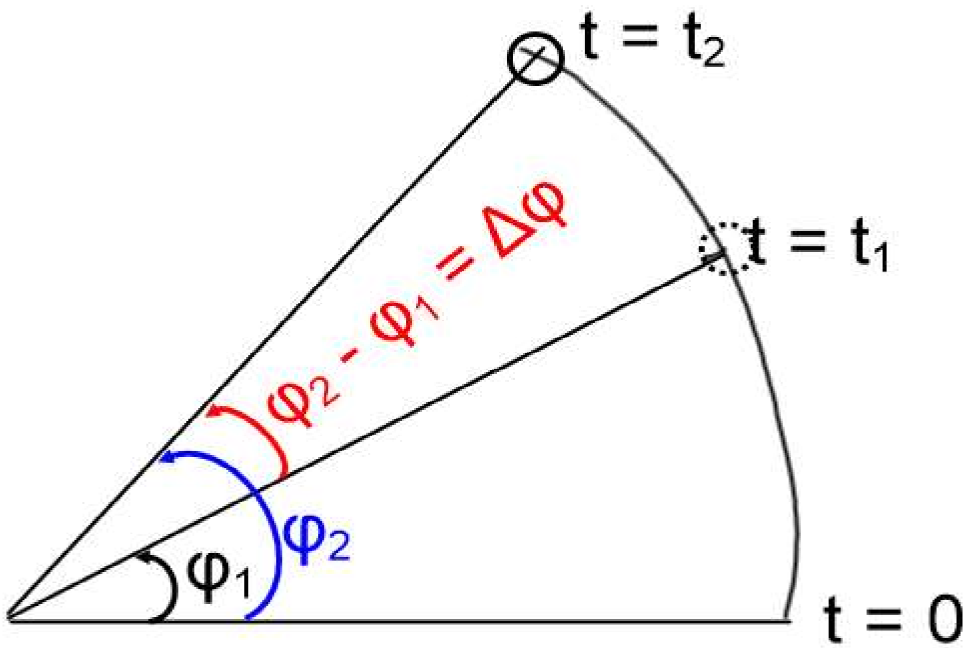
$$\text{ja } \varphi = \frac{s}{r} = \frac{2\pi \cancel{r}/4}{\cancel{r}} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$$

Koska 360° = 2π rad, niin

$$1^\circ = \frac{1}{360} \cdot 2\pi \text{ rad} = \frac{2\pi \text{ rad}}{360} \approx 0{,}0175 \text{ rad.}$$

$$\text{Vastaavasti } 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57{,}3^\circ.$$

Kulmanopeus



$$\text{Kulmanopeus} = \frac{\text{Kiertokulman muutos}}{\text{Käytetty aika}}$$

"omega"

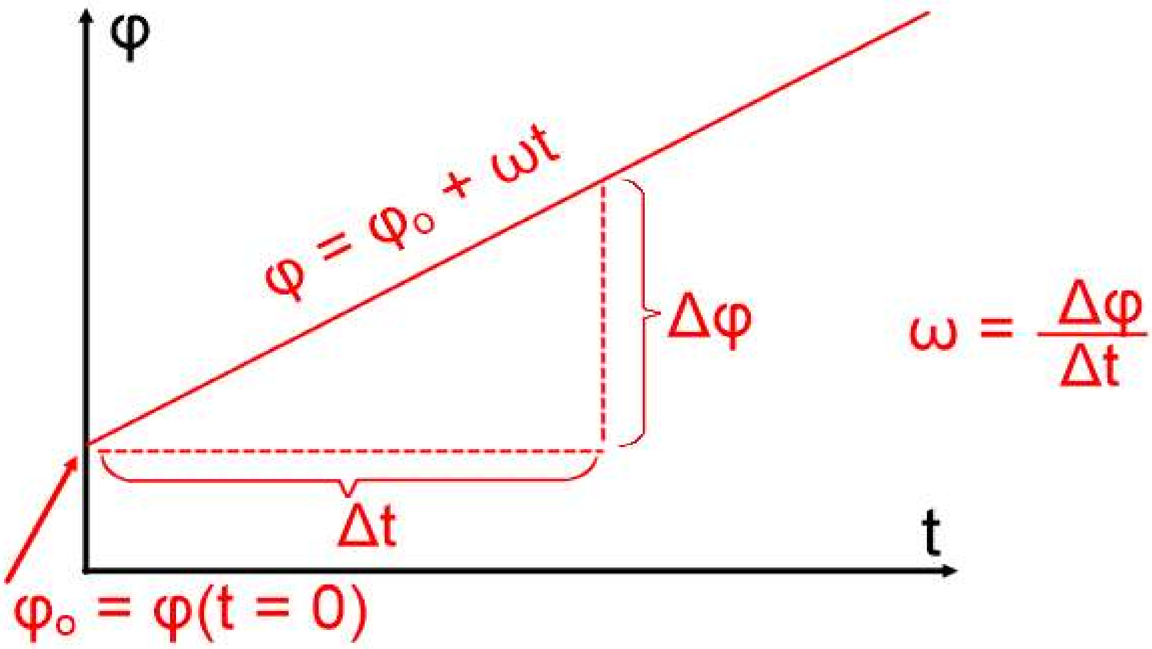
Kaava: $$\boxed{\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

Kulmanopeuden yksikkö:

rad = 1

$$[\omega] = \frac{[\Delta\varphi]}{[\Delta t]} = \frac{1\,\text{rad}}{1\,\text{s}} = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}}$$

Tasainen pyörimisliike (ω = vakio)



Kulmanopeus ja pyörimisnopeus

Lähtökohta: Kappale kiertää täyden kierroksen eli 2π rad kierrosajassa T.

Kulmanopeus

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\underbrace{\frac{1}{T}}_{n} = 2\pi n.$$

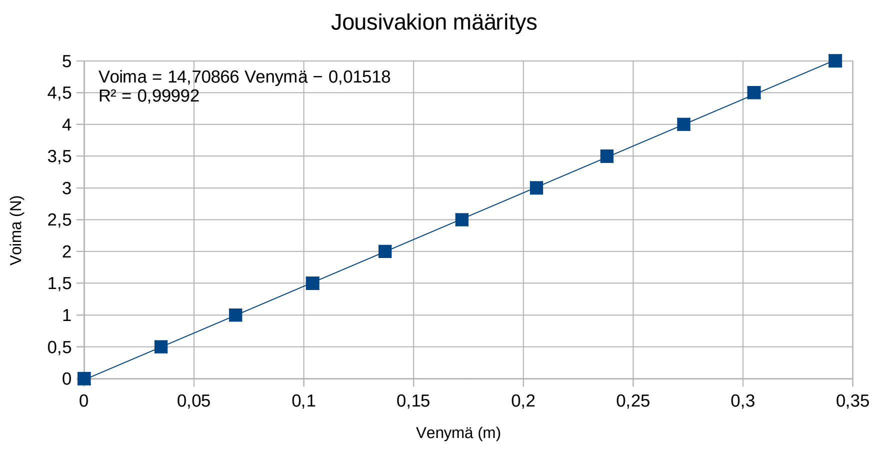
Siis $\boxed{\omega = 2\pi n}$

6 Harmoninen voima

Jousivakion määrittäminen

Merkitään:
x = jousen pituuden muutos
F = kuormittava voima

x(m)	F(N)
0,000	0,00
0,035	0,50
0,069	1,00
0,104	1,50
0,137	2,00
0,172	2,50
0,206	3,00
0,238	3,50
0,273	4,00
0,305	4,50
0,342	5,00



Johtopäätös:
F = VAKIO·x eli F = kx

JOUSIVAKIO k on suoran fysikaalinen kulmakerroin, ts.

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{2{,}90\,\mathrm{N}}{0{,}20\,\mathrm{m}} = 14{,}5\,\mathrm{N/m}.$$

Tietokonesovitus: $k \approx 14{,}7\,\mathrm{N/m}.$

Jousivakion yksikkö:

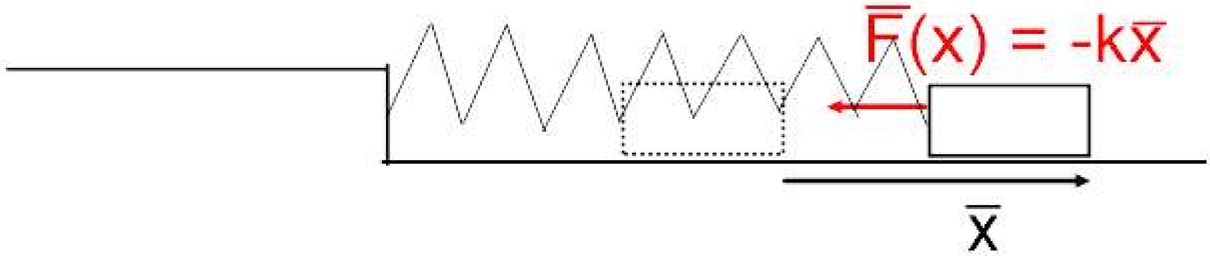
$$[k] = \frac{[\Delta F]}{[\Delta x]} = \frac{1\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

Toisaalta

$$[k] = 1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^2}{\cancel{\mathrm{m}}} = 1\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}.$$

Harmoninen voima

- suuntautuu kohti tasapainoasemaa
- on sitä suurempi, mitä suurempi on poikkeama tasapainoasemasta

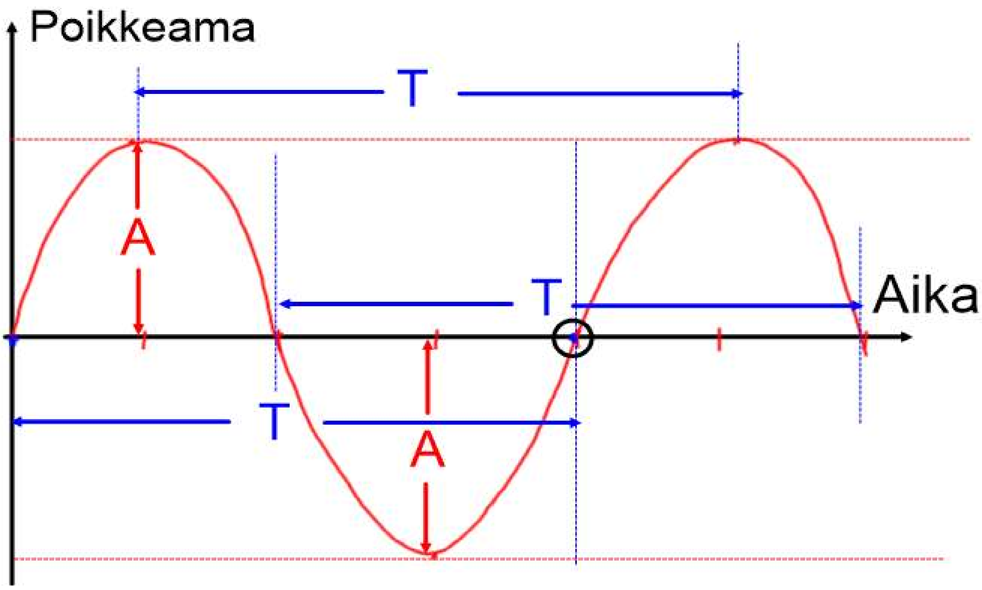


7 Värähdysliike

Värähdysliike on tietyn tasapainoaseman ympärillä tapahtuvaa JAKSOLLISTA liikettä.

Jaksollisuus tarkoittaa säännöllistä toistumista ajan suhteen.

Käsitteitä:



A = maksimipoikkeama eli AMPLITUDI
T = värähtelyn JAKSONAIKA = kahden peräkkäisen ja samanvaiheisen tapahtuman aikaero, [T] = 1s

Värähdysliikkeen frekvenssi eli TAAJUUS

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Merkitys: Kuinka monta värähdystä tapahtuu yhdessä sekunnissa?

Taajuuden yksikkö:

$$[f] = \frac{1}{[T]} = \frac{1}{s} = 1\text{Hz (hertsi)}$$

Resonanssi

- jokaisella värähtelevällä systeemillä on tietty OMINAISTAAJUUS
- värähtelevä systeemi voi ottaa vastaan ulkoista energiaa vain ominaistaajuudellaan
- värähtelyn taajuus ei silloin muutu, mutta värähtelyn amplitudi voi kasvaa vaarallisen suureksi

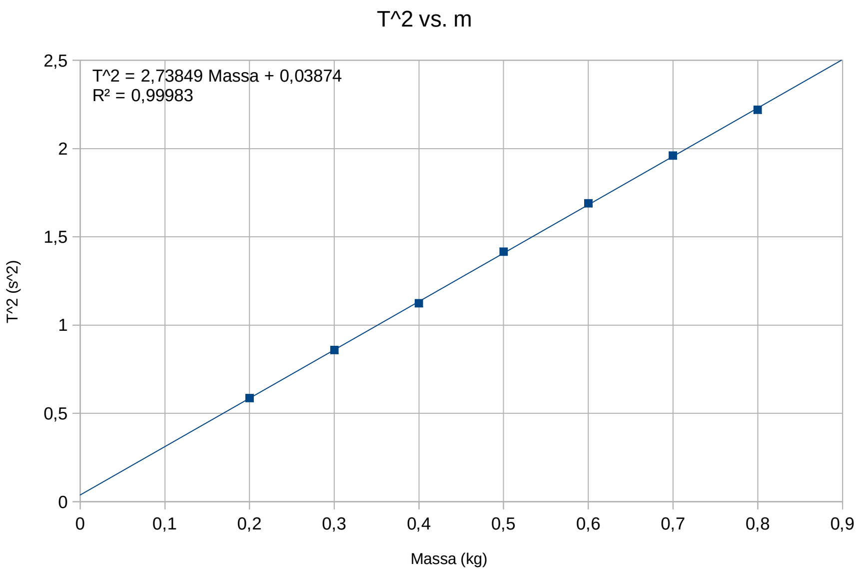
Jousi ja punnus

Merkitään:

m = punnuksen massa
T = värähtelyn jaksonaika

m(g)	T(s)	m(kg)	T^2(s^2)
200	0,766	0,20	0,587
300	0,927	0,30	0,859
400	1,06	0,40	1,124
500	1,19	0,50	1,416
600	1,30	0,60	1,690
700	1,40	0,70	1,960
800	1,49	0,80	2,220

m(kg)	$T^2(s^2)$
0,200	0,587
0,300	0,859
0,400	1,124
0,500	1,416
0,600	1,690
0,700	1,960
0,800	2,220



Johtopäätös: $T^2 = \text{vakio} \cdot m$
eli $T^2 = B \cdot m$

Teoreettinen tulos:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad ()^2$$

$$T^2=4\pi^2\frac{m}{k}$$

$$T^2=\underbrace{\frac{4\pi^2}{k}}_{B}m=B\cdot m.$$

Siis $\quad B=\frac{4\pi^2}{k} \quad |:B|\cdot k \quad$ eli

$$k=\frac{4\pi^2}{B}=\frac{4\pi^2}{2{,}73849\,s^2/kg}\approx 14{,}4\,kg/s^2=14{,}4\,N/m$$

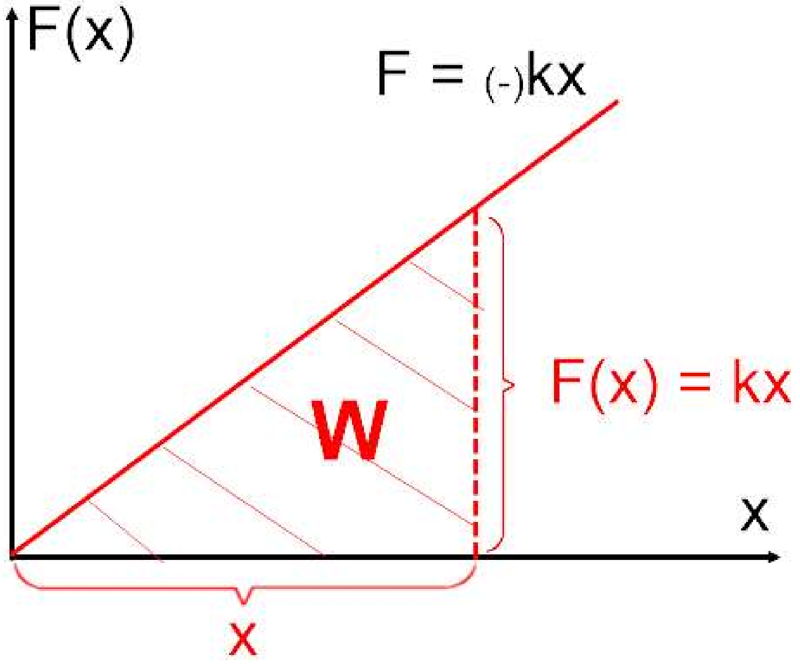
Venytysmittaus: $k\approx 14{,}7\,N/m.$

8 Harmonisen värähtelijän energia säilyy eristetyssä systeemissä

Jousi-punnus-systeemillä on sekä potentiaali-energiaa että liike-energiaa

- Potentiaalienergia on peräisin jousivoimasta
- Liike-energia riippuu punnuksen nopeudesta

Jousen potentiaalienergia on peräisin venytyksessä tehdystä työstä:



Pinta-alatulkinta:

$$E_p = W = \frac{x \cdot kx}{2} = \frac{1}{2} k x^2 .$$

Huomaa:

$$F(x) = \frac{-dE_p}{dx} = -kx .$$

ESIMERKKI 2

a) Jousivakio voidaan laskea jouseen tehdystä työstä:

$W = \frac{1}{2}kx^2$, joten jousivakioksi saadaan

$$k = \frac{2W}{x^2} = \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\cancel{m}}}{0{,}042^2\,\mathrm{m^{\cancel{2}}}} = 8{,}84354\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}} \approx 8{,}8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}.$$

b) Nopeus on suurin tasapainoaseman kohdalla, jolloin t =T/4.

Jaksonaika

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, joten ajaksi saadaan

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0{,}055\,\mathrm{kg}}{8{,}84354\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2}}}} \approx 0{,}12\,\mathrm{s}.$$

c) Systeemin kokonaisenergia muuttuu liike-energiaksi kohdassa x = 0:

$$E_{kok} = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v_{max}^2,$$ josta saadaan nopeudeksi

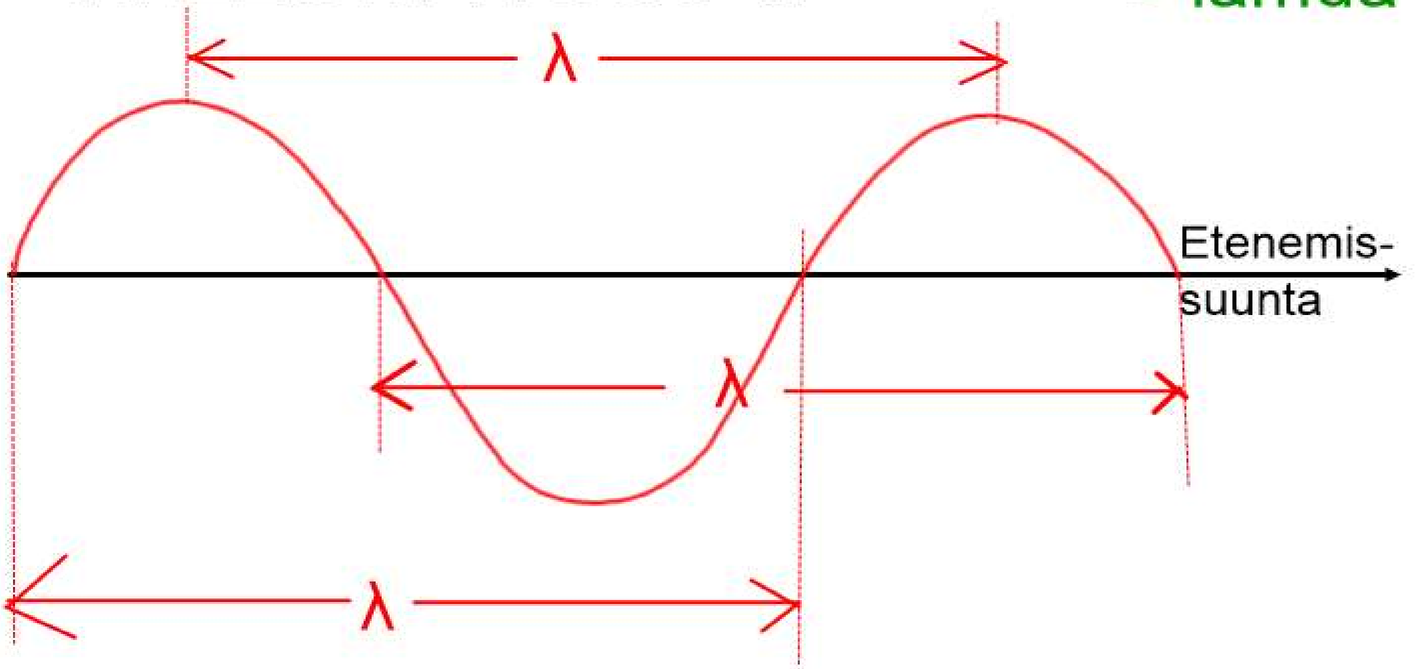
$$v_{max} = A\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}042\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{8{,}84354\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}}{0{,}055\,\mathrm{kg}}} \approx 0{,}53\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Jos epäilet taitojasi, kirjoita sijoitukset näkyviin!

9 Mekaaninen aaltoliike

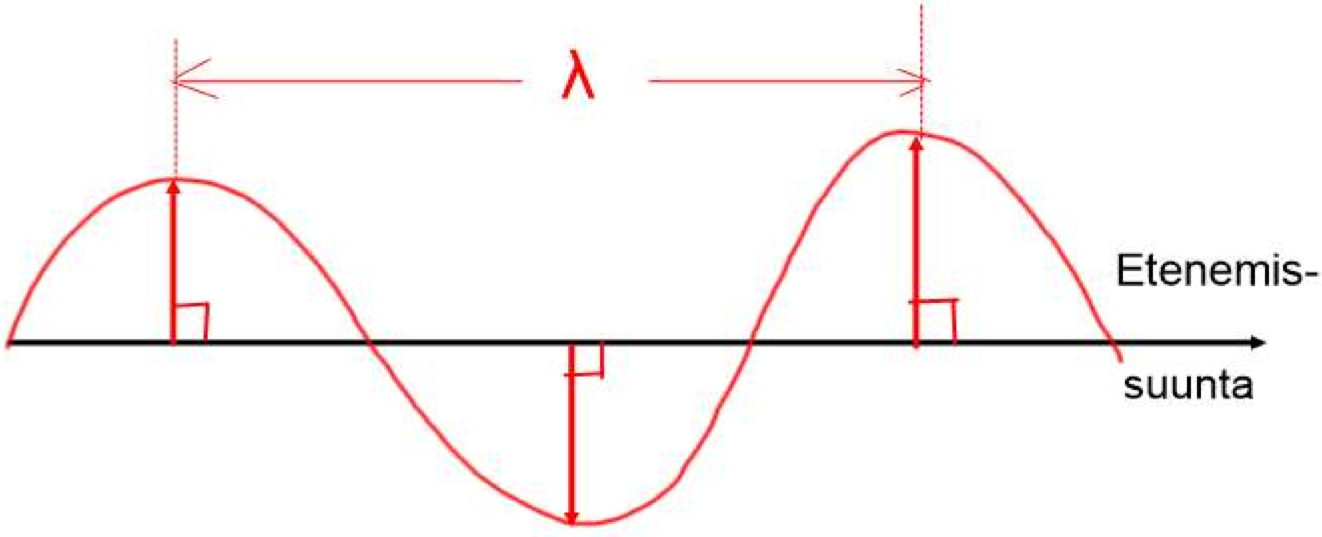
AALTO = Väliaineessa etenevä häiriö, joka on ajan ja paikan suhteen jaksollinen.

AALLONPITUUS λ

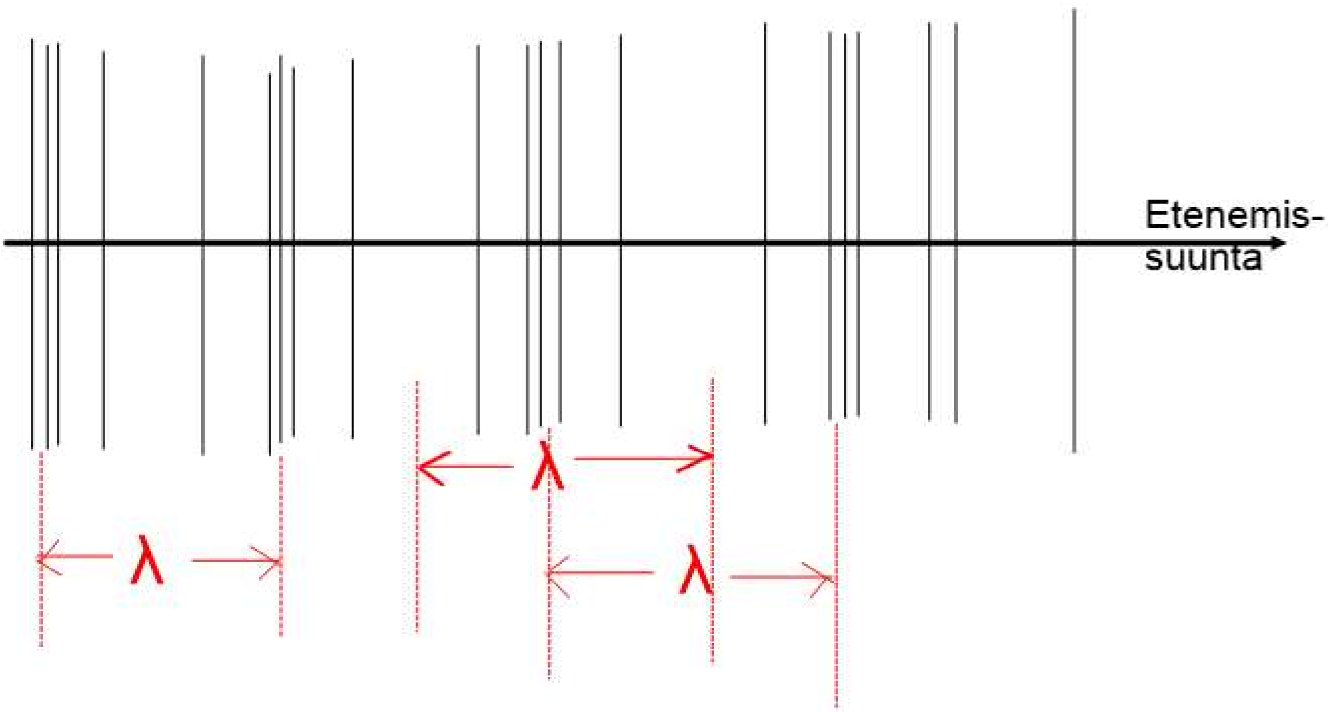


= kahden peräkkäisen ja samanvaiheisen pisteen matkaero, [λ] = 1m

Aaltoliike voi olla POIKITTAISTA...



... tai PITKITTÄISTÄ (tihentymiä ja harventumia)



Aalto etenee yhdessä jaksonajassa T yhden aallonpituuden λ.

Aallon etenemisnopeus (vaihenopeus)

$$v = \frac{\text{Kuljettu matka}}{\text{Käytetty aika}} \quad \text{eli}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \underbrace{\frac{1}{T}}_{f} = \lambda f.$$

Siis $\boxed{v = \lambda f}$

Aaltoliikkeen perusyhtälö
MAOL s.129

v = etenemisnopeus, $[v] = 1$ m/s
λ = aallonpituus, $[\lambda] = 1$m
f = taajuus, $[f] = 1$Hz = 1/s

ETENEMISNOPEUS riippuu VÄLIAINEEN ominaisuuksista.

TAAJUUS riippuu AALTOLÄHTEESTÄ, joka häiriötä aiheuttaa.

AALLONPITUUS "sopeutuu" siten, että perusyhtälö $v = \lambda f$ toteutuu.

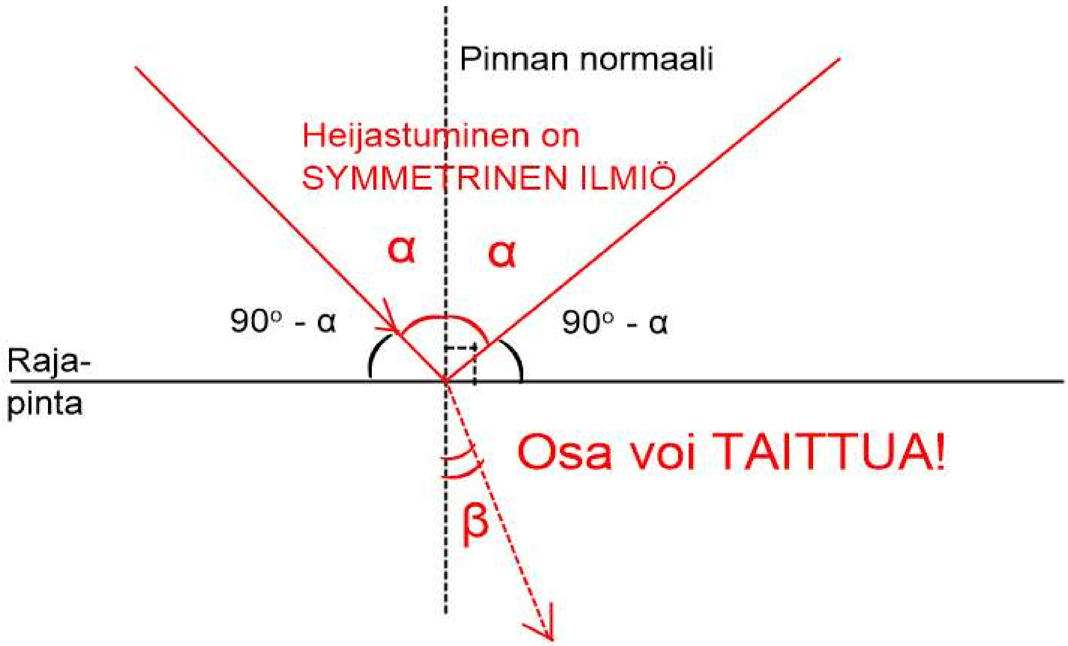
10 Aallot heijastuvat ja taittuvat

HEIJASTUMINEN JA TAITTUMINEN ovat RAJAPINTAILMIÖITÄ.

Rajapinnassa aaltoliikkeen etenemis-nopeus MUUTTUU: Suurenee tai pienenee.

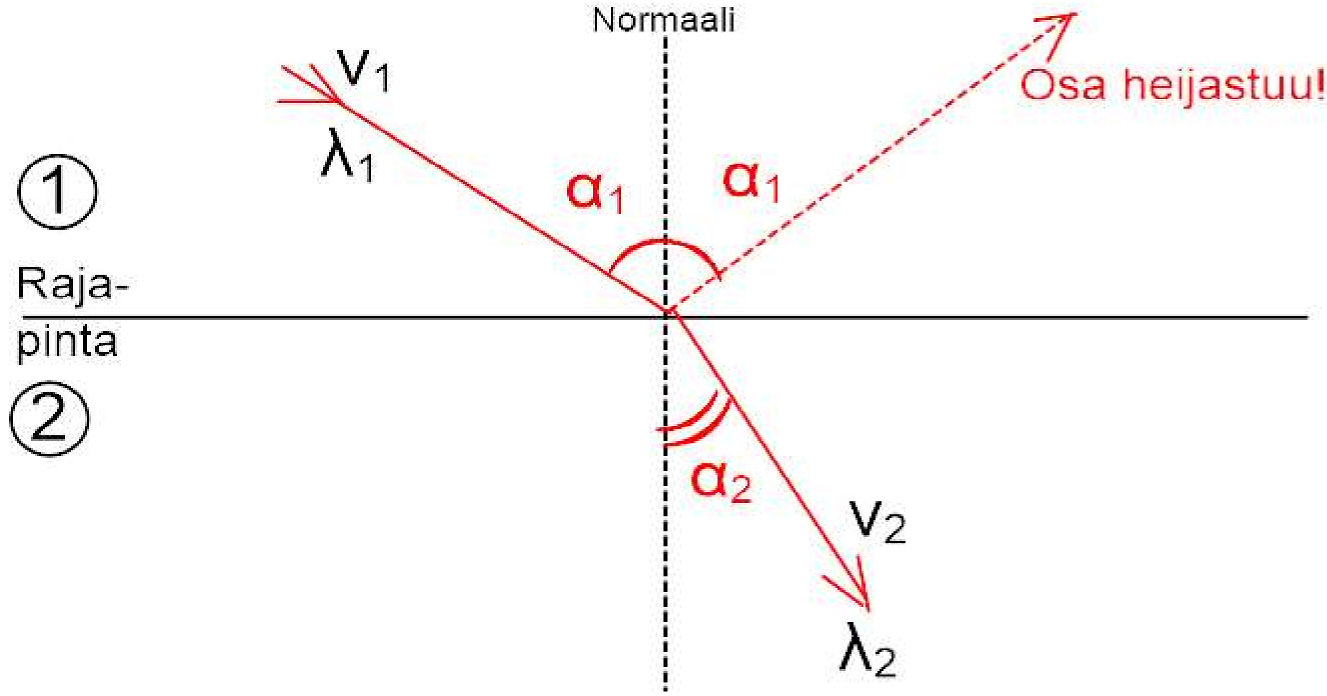
HEIJASTUMINEN

- aaltoliike kohtaa rajapinnan, kokee mahdollisesti SUUNNANMUUTOKSEN ja palaa rajapinnan samalle puolelle



TAITTUMINEN

- aaltoliike ylittää rajapinnan, jolloin se voi muuttaa suuntaansa



Taajuus ei muutu taittumisessa!
Taittumislaki:

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}}$$

MAOL s. 130

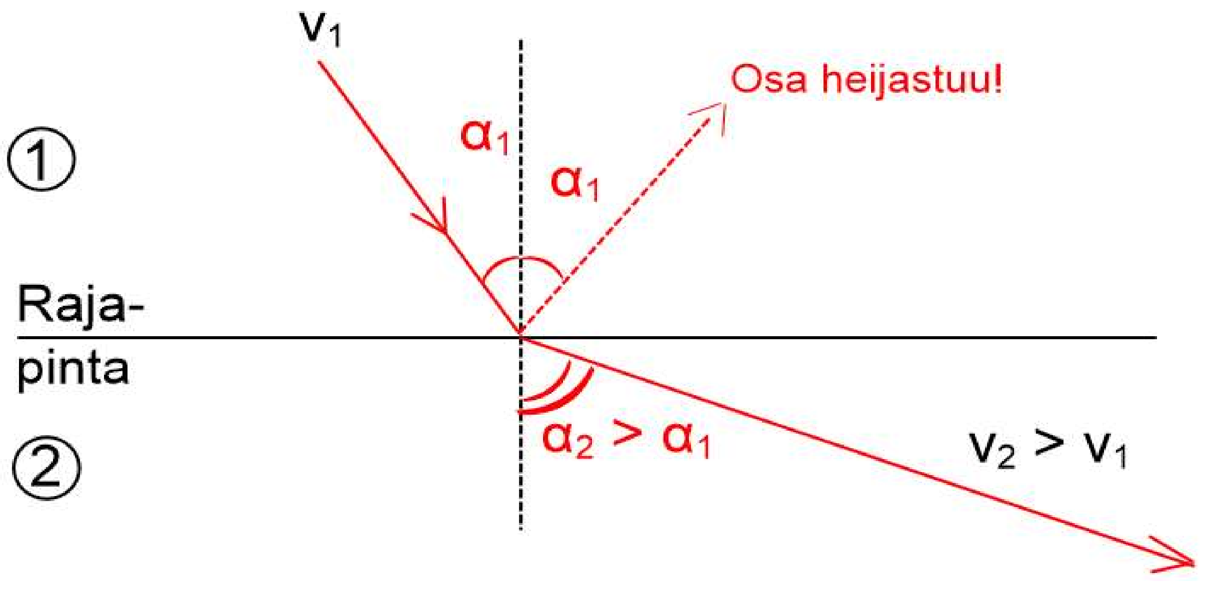
Taajuus säilyy taittumisessa eli $v_1 = \lambda_1 f$ ja $v_2 = \lambda_2 f$. Silloin

$$\boxed{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1 \cancel{f}}{\lambda_2 \cancel{f}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = n_{12}}$$

Taitesuhde

KOKONAISHEIJASTUMINEN

Lähtökohta: Aaltoliikkeen nopeus KASVAA rajapinnan ylittämisen jälkeen.



Kun tulokulma kasvaa, myös taitekulma kasvaa. Kun taitekulma $\alpha_2 = 90^o$, aalto taittuu rajapintaa pitkin. Silloin saavutetaan KOKONAISHEIJASTUMISEN RAJAKULMA $\alpha_1 = \alpha_r$. Taittumislaista seuraa, että

$$\frac{\sin\alpha_r}{\underbrace{\sin\alpha_2}_{=1}} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{eli} \quad \boxed{\sin\alpha_r = \frac{v_1}{v_2}}$$

Kun $\alpha_1 > \alpha_r$, taittuminen ei ole enää mahdollista. Silloin puhutaan KOKONAISHEIJASTUMISESTA.

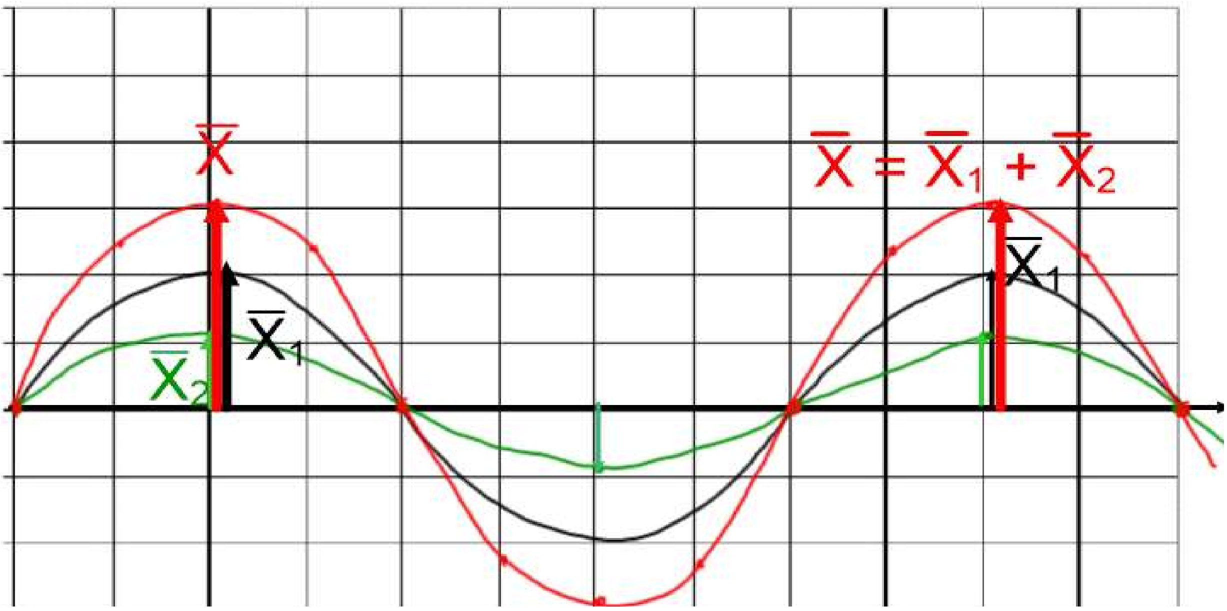
11 Aaltojen yhteisvaikutus

Aaltojen interferenssi

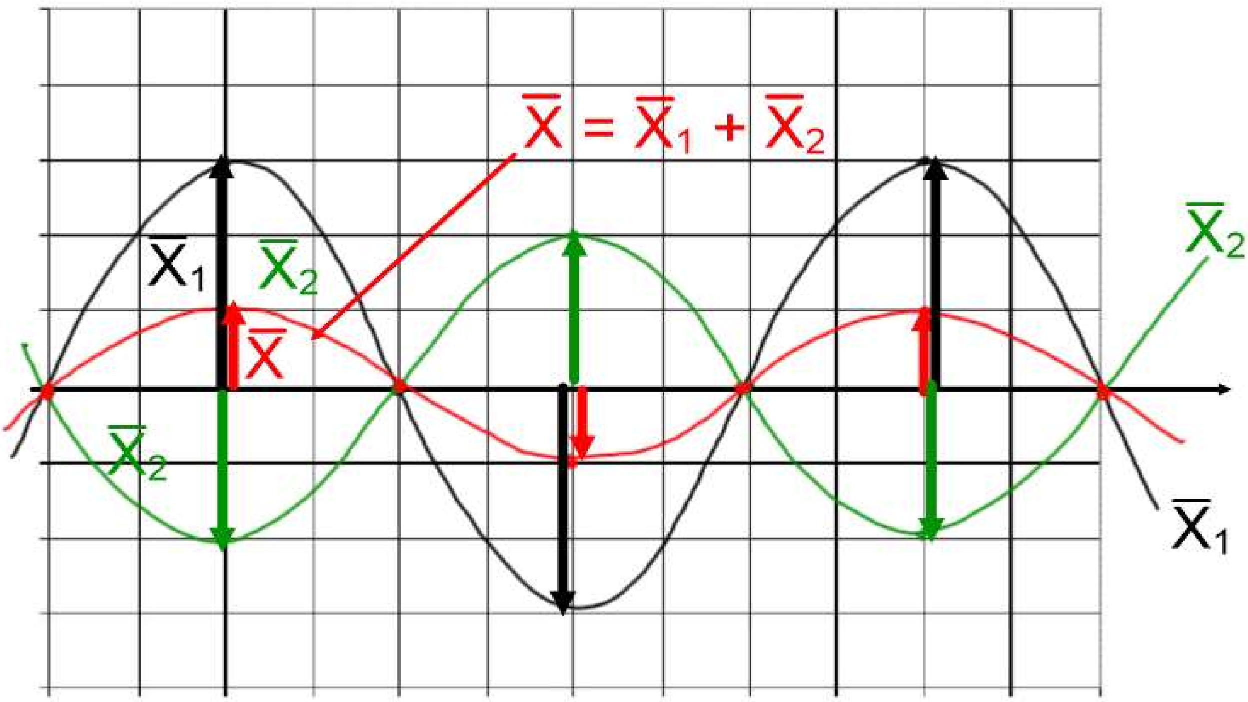
Superpositioperiaate:

- komponenttiaallot etenevät toisistaan riippumatta
- summa-aallon poikkeama on kompo-nenttiaaltojen poikkeamien VEKTORI-SUMMA

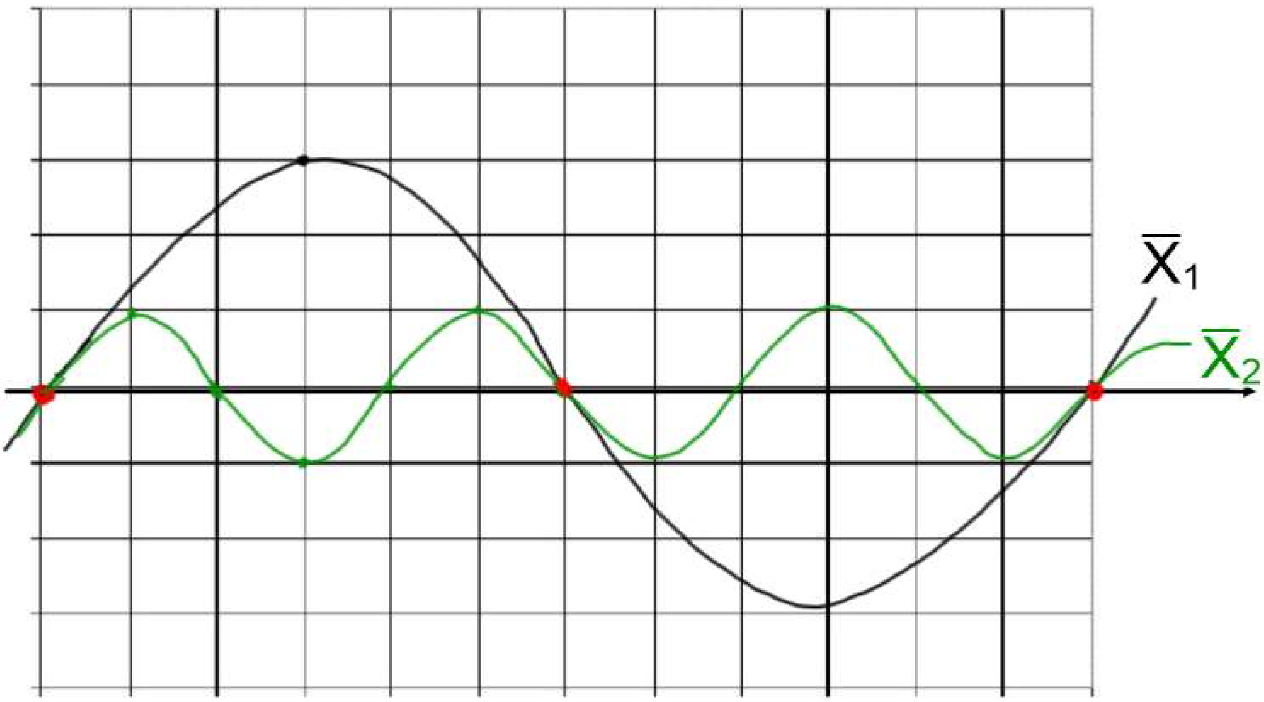
ESIMERKKI 1 Vahvistava interferenssi



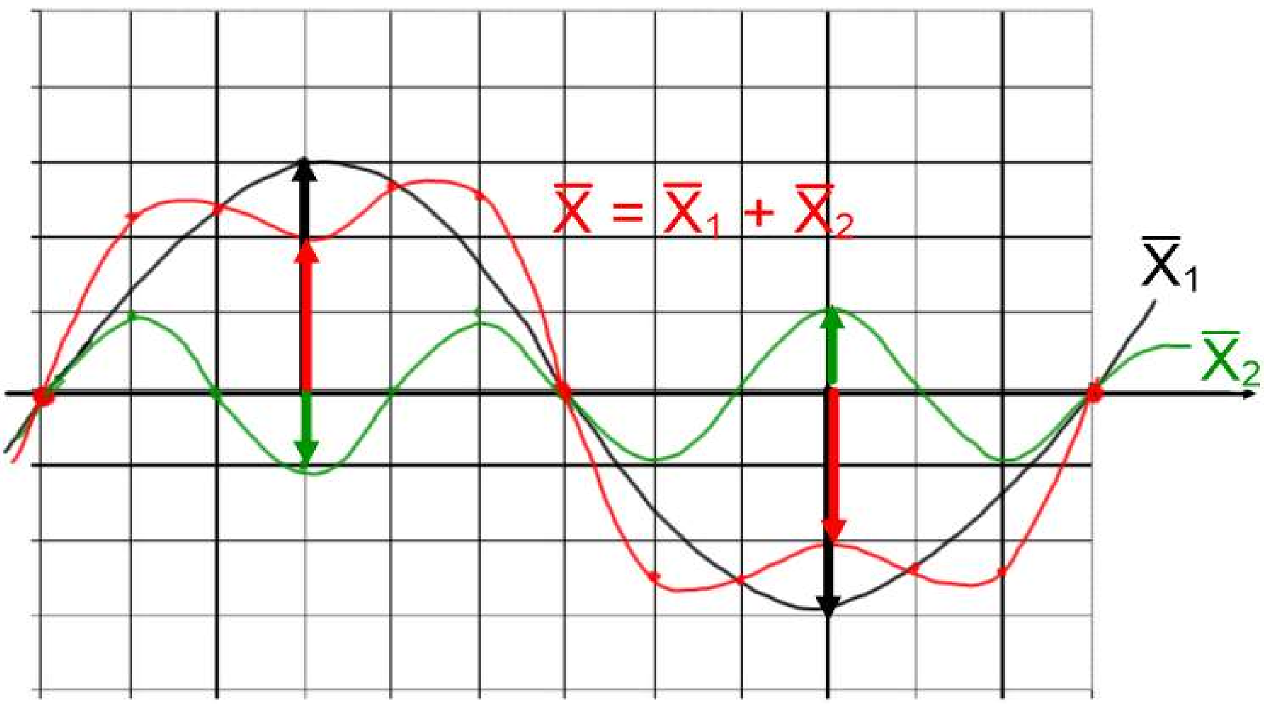
ESIMERKKI 2 Vaimentava interferenssi



ESIMERKKI 3 Eri taajuudet ja amplitudit



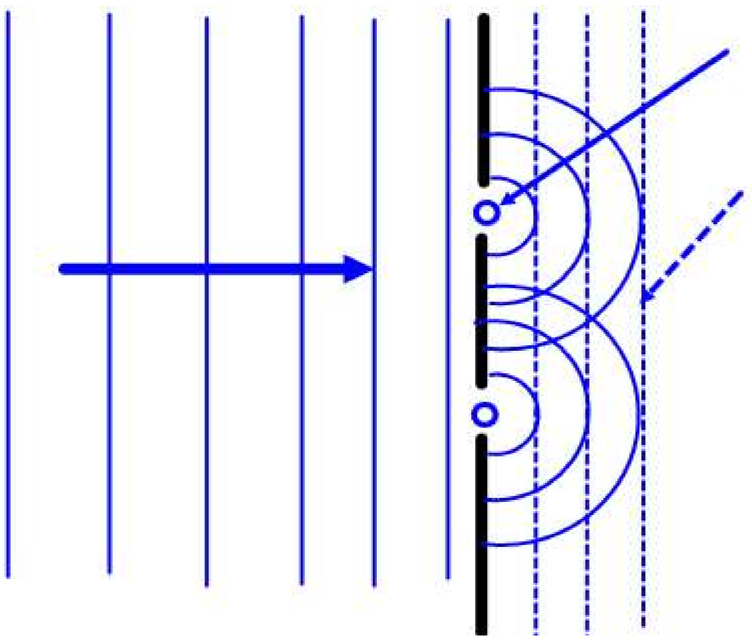
Eri taajuudet ja amplitudit, summakäyrä



Aaltojen diffraktio

Diffraktiolla tarkoitetaan aaltojen TAIPU-MISTA eli vähittäistä suunnanmuutosta.

Diffraktion perustana on HUYGENSIN PERIAATE:

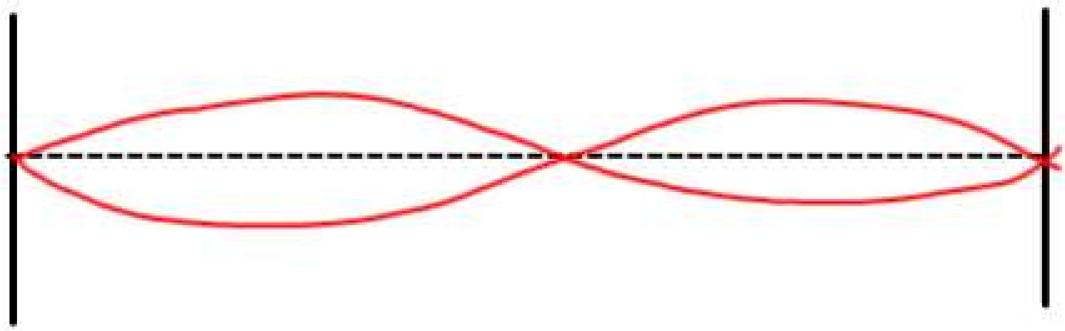


1. Jokainen aaltorintaman piste on uuden alkeis-aallon keskus.

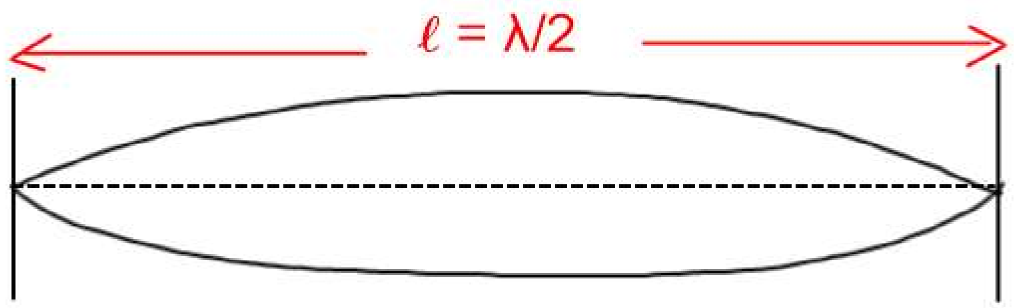
2. Uusi aaltorintama on näiden alkeisaaltojen yhteinen tangenttipinta.

12 Seisova aaltoliike

Kahden samanlaisen, mutta vastakkaisiin suuntiin etenevän aallon yhteisvaikutus.



Tutkimus: Jännitetty kuminauha



$\ell = 1{,}0$ m

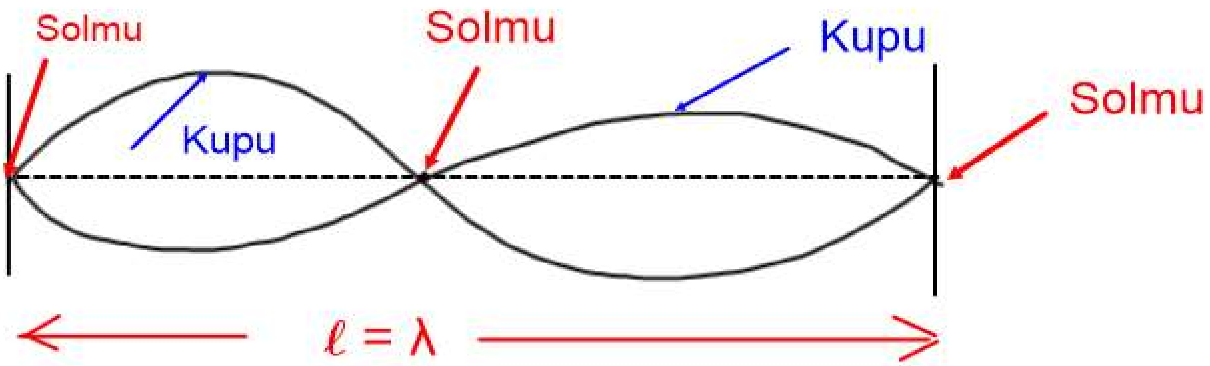
Perusvärähtely: Taajuus $f = f_o = 12{,}0$ 1/s.

$\ell = \lambda/2$ eli $\lambda = \lambda_o = 2 \cdot \ell = 2 \cdot 1{,}0$ m $= 2{,}0$ m.

Perusyhtälö:

$v_o = \lambda_o f_o = 2{,}0 \text{ m} \cdot 12{,}0 \text{ 1/s} = 24 \text{ m/s}.$

Ensimmäinen ylätaajuus:



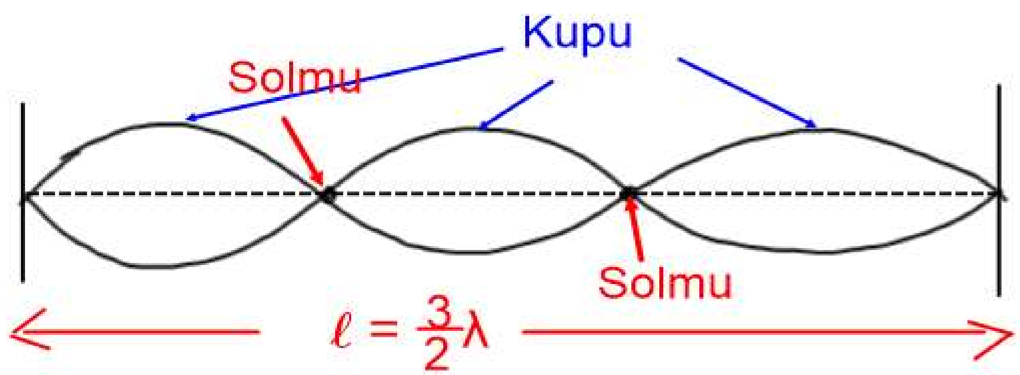
Aallonpituus $\lambda = \lambda_1 = l = 1{,}0$ m.

Taajuus $f = f_1 = 24$ Hz $= 24$ 1/s.

Aaltojen etenemisnopeus

$v_1 = \lambda_1 f_1 = 1{,}0\text{m}\cdot 24\ 1/\text{s} = 24\text{m/s} = v_o$.

Toinen ylätaajuus:



Aallonpituus: $\lambda = \lambda_2 = 2/3\cdot\ell = 2/3\cdot 1{,}0$ m $\approx 0{,}667$m.

Taajuus $f = f_2 = 36$ Hz $= 36$ 1/s.

Aaltojen etenemisnopeus

$v_2 = \lambda_2 f_2 = 0{,}667\ \text{m}\cdot 36\ 1/\text{s} \approx 24\ \text{m/s} = v_1 = v_o$.

13 Ääni aaltoliikkeenä

Ääni on

- väliaineessa etenevää
- pitkittäistä aaltoliikettä, joka
- aiheuttaa kuuloaistimuksen

Ihminen kuulee ääniä, joiden taajuus on noin 20 Hz - 20 kHz.

Ääniaallot voivat aaltoliikkeen yleisten ominaisuuksien mukaisesti

- heijastua (KAIKU)
- taittua ja
- kokonaisheijastua

Kokonaisheijastus voi syntyä esimerkiksi ilman ja veden rajapinnasta, kun ääni tulee ilmasta veteen.

Äänen nopeuden lämpötilariippuvuus

Kaasumaisessa aineessa, kuten ilmassa, äänen etenemisnopeus on suoraan verrannollinen absoluuttisen lämpötilan neliöjuureen, ts.

Lämpötilassa T_1 nopeus $v_1 = k\sqrt{T_1}$, k = vakio

Lämpötilassa T_2 nopeus $v_2 = k\sqrt{T_2}$

Nopeus määräytyy molekyylien keskimää-räisesta, nopeudesta, joka on verrannollinen absoluuttisen lämpötilan neliöjuureen

Verranto: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\cancel{k}\sqrt{T_1}}{\cancel{k}\sqrt{T_2}}$ eli $\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$ $\quad | \cdot v_2$

eli $\boxed{v_1 = v_2\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}}$ MAOL s. 129

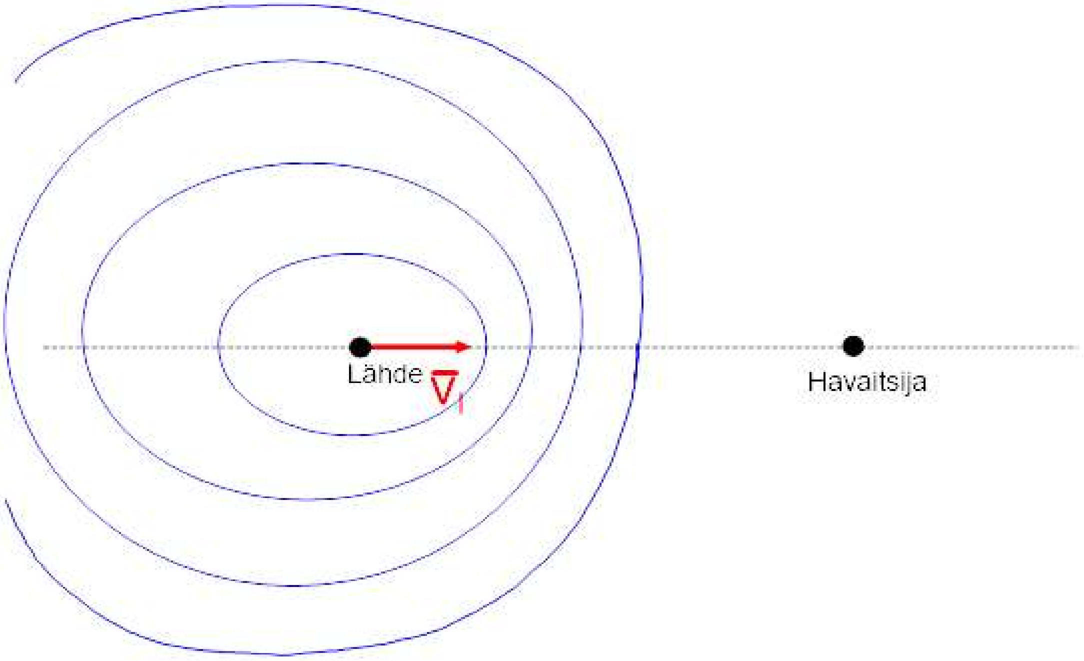
Dopplerin ilmiö

IDEA: Havaittava taajuus muuttuu, jos aaltolähde ja havaitsija liikkuvat toistensa suhteen (eli etääntyvät tai lähestyvät, suoraan tai vinosti).

Oletetaan, että aaltolähde lähestyy havaitsijaa nopeudella v_l. Jos $v_l = 0$, aaltoliikkeen perusyhtälö on

$$\boxed{c_o = \lambda_o f_o}$$

c_o = aallon etenemisnopeus
λ_o = aallonpituus
f_o = taajuus



Etenemisnopeus säilyy: $c = c_o$.
Aallonpituus pienenee: $\lambda = \lambda_o - v_l T_o$.
Havaittava taajuus

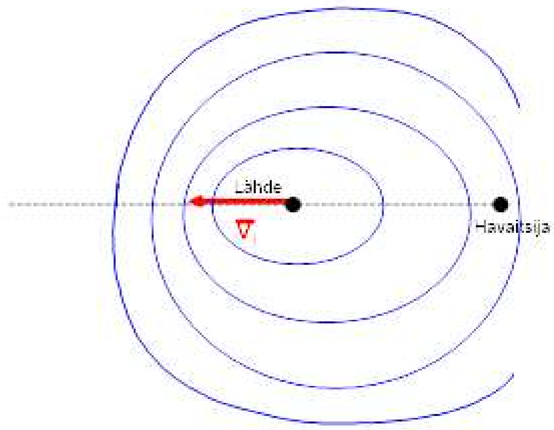
$$f = \frac{c}{\lambda} \overset{f_o\,)}{=} \frac{c_o}{\lambda_o - v_l T_o} = \frac{c_o f_o}{\underbrace{\lambda_o f_o}_{c_o} - v_l \underbrace{T_o f_o}_{1}}$$

$$= \underbrace{\frac{c_o}{c_o - v_l}}_{\geqq 1} f_o \geqq f_o$$

Siis $f \geqq f_o$ eli taajuus SUUREENEE.

Jos vastaavasti aaltolähde loittonee nopeudella v_l, vastaavanlainen tarkastelu antaa tuloksen

$$\boxed{f = \underbrace{\frac{c_o}{c_o + v_l}}_{\leq 1} f_o \leq f_o}$$



eli havaittava taajuus PIENENEE.

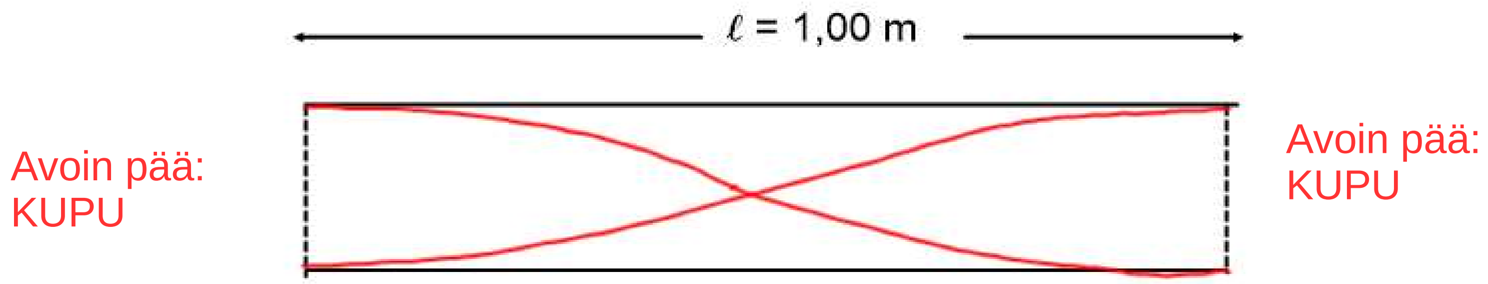
Doppler-ilmiö voidaan havaita myös sähkö-magneettisilla aalloilla, kuten valolla.

Tähtitieteessä havaitaan tähden lähettämän valon PUNASIIRTYMÄ, kun tähti loittonee maapallosta, ja SINISIIRTYMÄ, kun kaukainen tähti tulee meitä kohti.

PUNASIIRTYMÄSSÄ tähden lähettämän näkyvän valon spektriviivojen aallonpituudet ovat siirtyneet punaiseen päin eli pitemmän aallonpituuden suuntaan, SINISIIRTYMÄSSÄ muutos on päinvastainen.

14 Ääniaallot vuorovaikuttavat
Seisova aaltoliike ilmapatsaassa

Tutkimus: Molemmista päistä avoin urkupilli



Perusvärähtely: $\ell = \lambda/2$ eli

$\lambda = \lambda_o = 2\ell = 2 \cdot 1{,}0\ \text{m} = 2{,}0\ \text{m}$

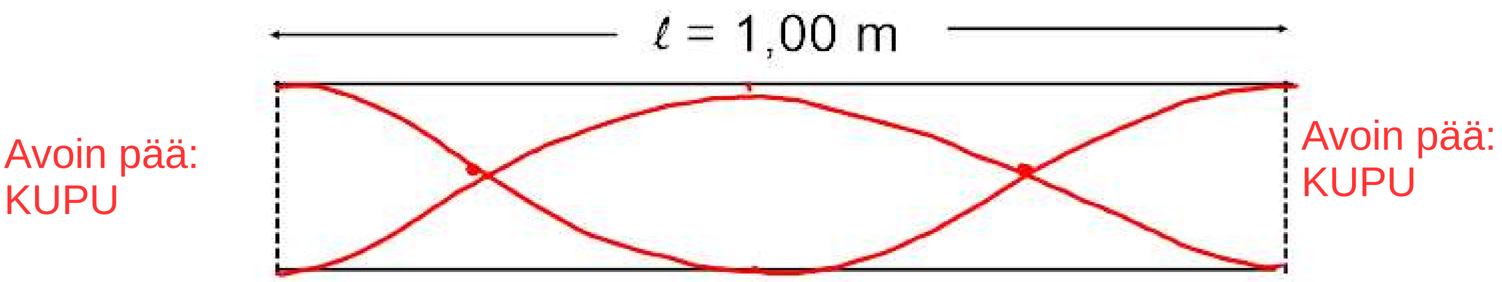
Perustaajuus $f_o = 170\ \text{Hz} = 170\ 1/\text{s}$

Perusyhtälö:

$v_o = \lambda_o f_o = 2{,}0\ \text{m} \cdot 170\ 1/\text{s} = 340\text{m/s}$

$v = 343\ \text{m/s}$, kun $T = 293\ \text{K} = +20\ ^o\text{C}$

Ensimmäinen ylätaajuus:



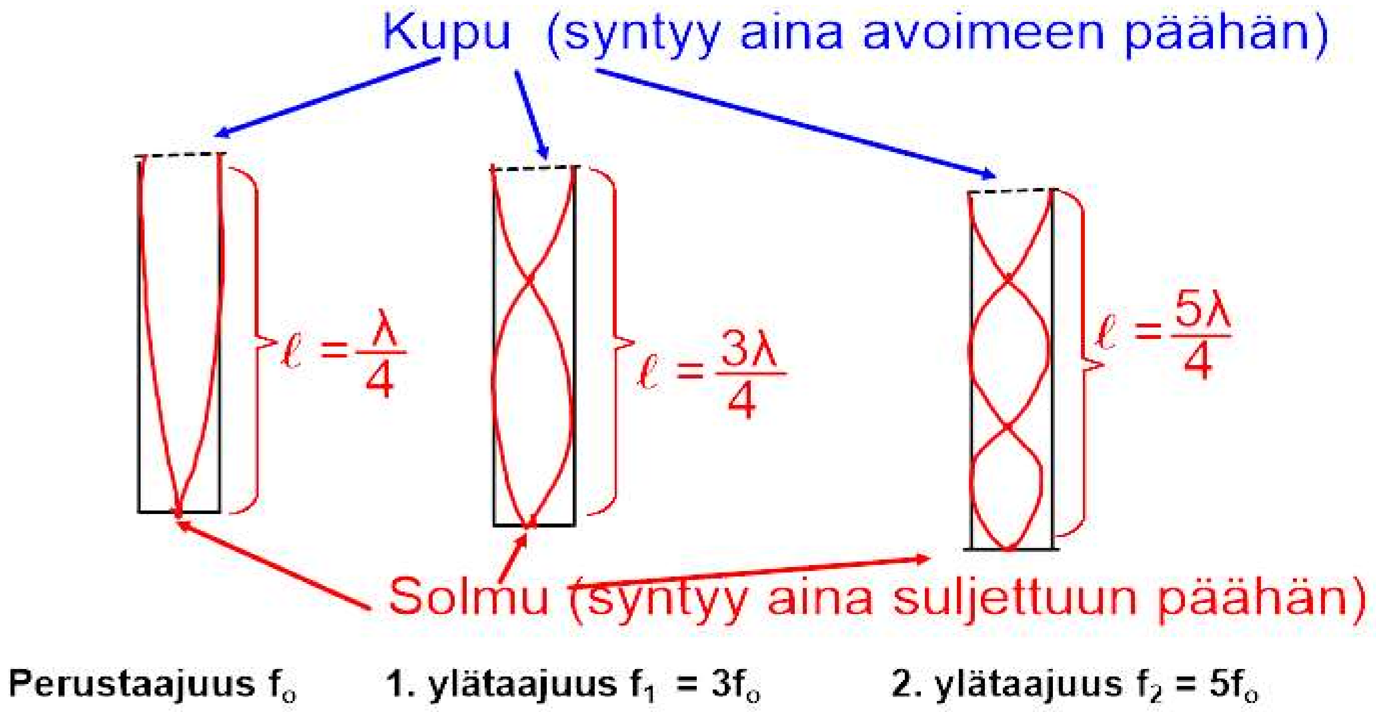
$\ell = \lambda$ eli $\lambda = \lambda_1 = \ell = 1{,}00\ \text{m}$

Etenemisnopeus säilyy eli $v_1 = v_o = 340\ \text{m/s}$.

Silloin $v_1 = \lambda_1 f_1$ ja vastaava taajuus

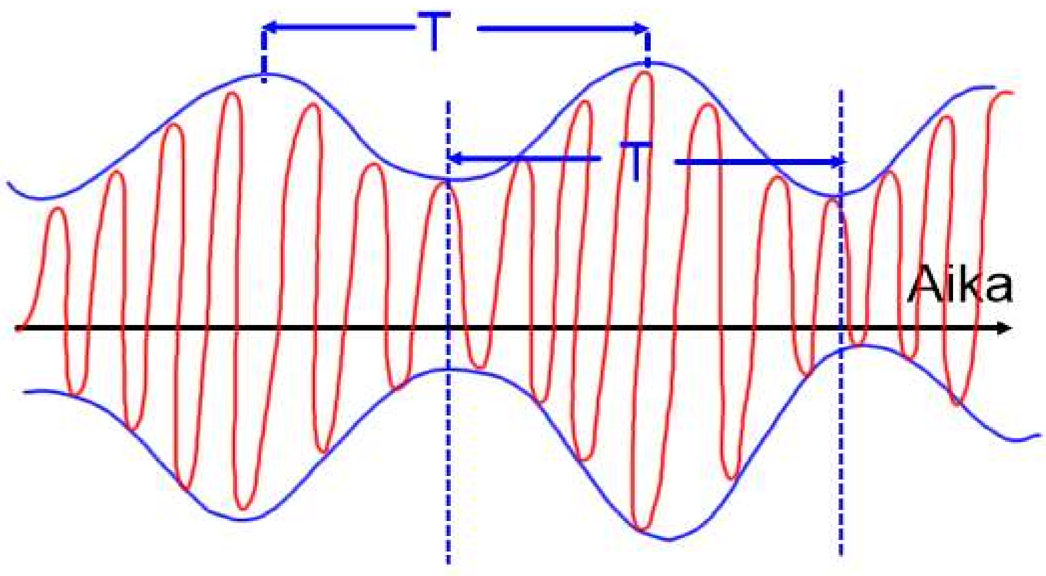
$$f_1 = \frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{340\ \text{m/s}}{1{,}00\ \text{m}} = 340\ 1/\text{s} = 340\ \text{Hz} = 2f_o.$$

Entä jos urkupilli on vain toisesta päästä avoin? Ks. ESIMERKKI 1 s. 130



Huojunta

-kahden lähes samantaajuisen ääniaallon yhteisvaikutus (INTERFERENSSI- ILMIÖ)



-alkuperäiset taajuudet ovat f_1 ja f_2

-punainen käyrä: taajuuksien keskiarvo $= \frac{f_1 + f_2}{2}$

-sininen käyrä: huojuntataajuus $f = |f_1 - f_2|$

T = huojunnan jaksonaika $= \frac{1}{f}$

15 Äänen havaittu voimakkuus ilmaistaan desibeleinä

Intensiteetti

$$\text{Intensiteetti} = \frac{\text{Teho}}{\text{Pinta-ala}}, \text{ ts.} \qquad \boxed{I = \frac{P}{A}}$$

Intensiteetin yksikkö: $[I] = \frac{[P]}{[A]} = \frac{1\text{W}}{1\text{m}^2} = 1\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Ihmisen kuulokynnyksen intensiteetti

$$\boxed{I_o = 10^{-12}\frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$$

Intensiteettitaso ("Desibeliasteikko")

Intensiteettitaso

$$\boxed{L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_o}\right)\ \mathrm{dB}}$$

I = äänen intensiteetti
I_o = kuulokynnyksen intensiteetti = $10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$

lg(x) = log(x) = 10-kantainen logaritmi luvusta x, x>o

Laskuesimerkkejä:

$\lg 100 = \lg 10^{2} = \underline{2}$

$\lg 100000 = \lg 10^{5} = \underline{5}$

$\lg 10^{2,75} = \underline{2,75}$

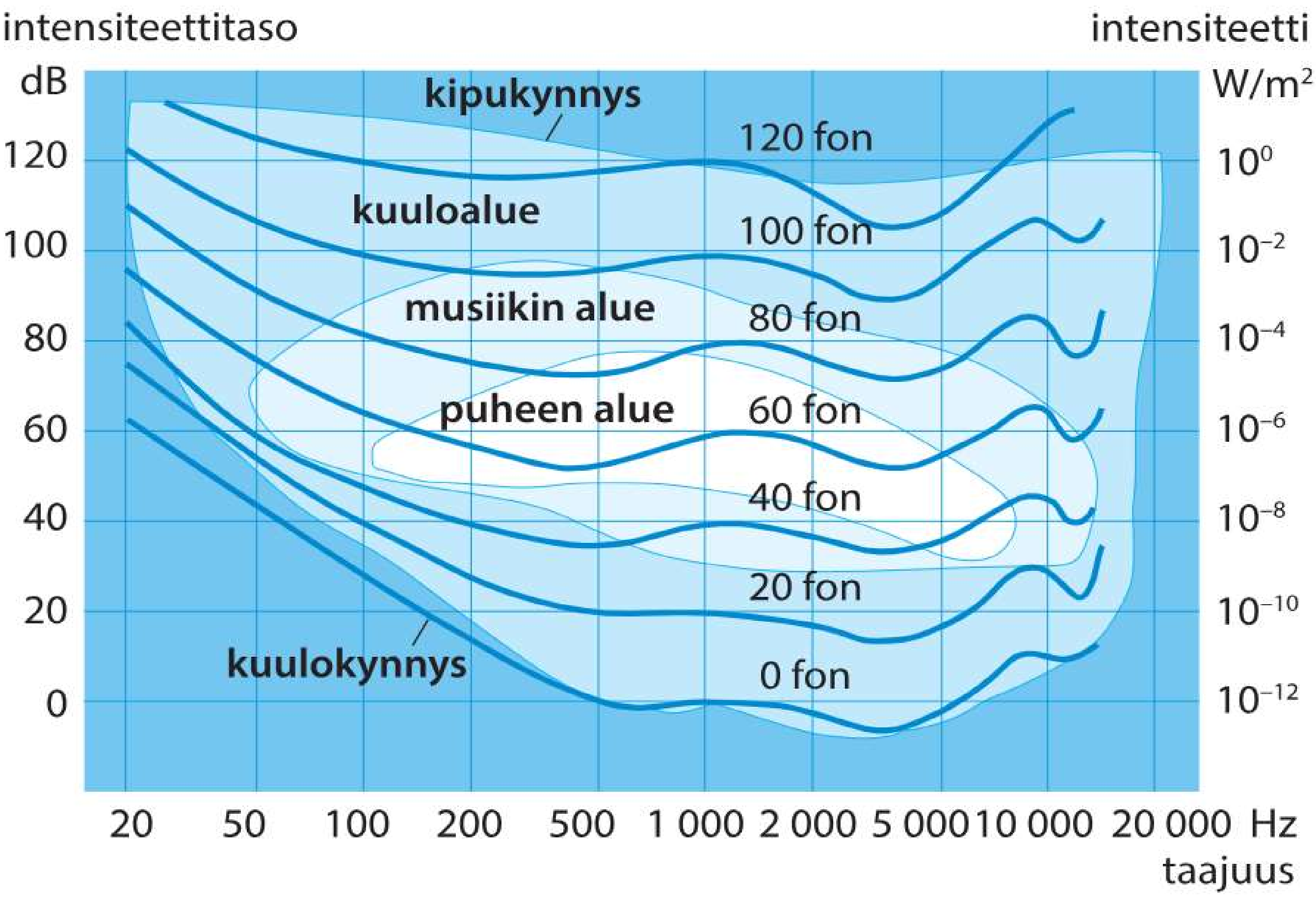
ESIMERKKI

Äänen intensiteetti $I = 10^{-4}$ W/m². Vastaava intensiteettitaso on

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_o}\right) = 10 \cdot \log \frac{10^{-4}\,\cancel{W/m^2}}{10^{-12}\,\cancel{W/m^2}} = 10 \cdot \log 10^{8}$$

$$= 10 \cdot 8 = 80 \text{ (dB)}$$

FONIASTEIKKO on **FYSIOLOGINEN**



16 Äänellä on monia sovelluksia

Ultraääni

- taajuusalue: 20 kHz < f < 1000 MHz

Tuotto:

- mekaaninen värähtelijä
- sähköstriktio (kiteen muoto muuttuu vaihtojännitteen tahdissa)

Käyttö:

- materiaalitutkimus
- kaikuluotaus
- lääketieteen diagnostiikka (korvaa röntgensäteilyä ja on turvallisempaa)
- puhdistus ja desinfiointi
- nesteiden sekoittaminen

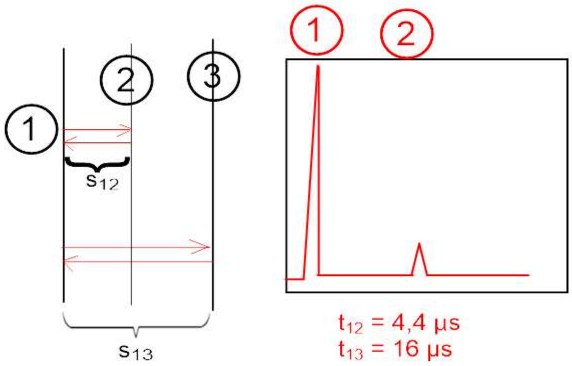
Ultraäänikuva 12-viikkoisesta sikiöstä

Lähde: https://fi.wikipedia.org/wiki/Radiologia#/media/File:Embryo_at_12_weeks.JPG

Infraääni

- väliaineessa etenevää pitkittäistä aaltoliikettä, jonka taajuus on alle 20 Hz
- ihmisen korva ei pysty tunnistamaan infraääntä
- jotkut eläimet viestittävät infraäänellä
- infraäänen kantama on hyvä, koska pitkä aallonpituus vaikeuttaa absorboitumista

16.10



$$2 \cdot s_{13} = v \cdot t_{13} \text{ eli}$$
$$s_{13} = v \cdot t_{13}/2 = (5250\,\text{m/s} \cdot 16 \cdot 10^{-6}\,\text{s})/2$$
$$= 0{,}042\,\text{m} = 42\,\text{mm}.$$

$$2 \cdot s_{12} = v \cdot t_{12} \text{ eli}$$
$$s_{12} = v \cdot t_{12}/2 = (5250\,\text{m/s} \cdot 4{,}4 \cdot 10^{-6}\,\text{s})/2$$
$$= 0{,}01155\,\text{m} \approx 12\,\text{mm}.$$