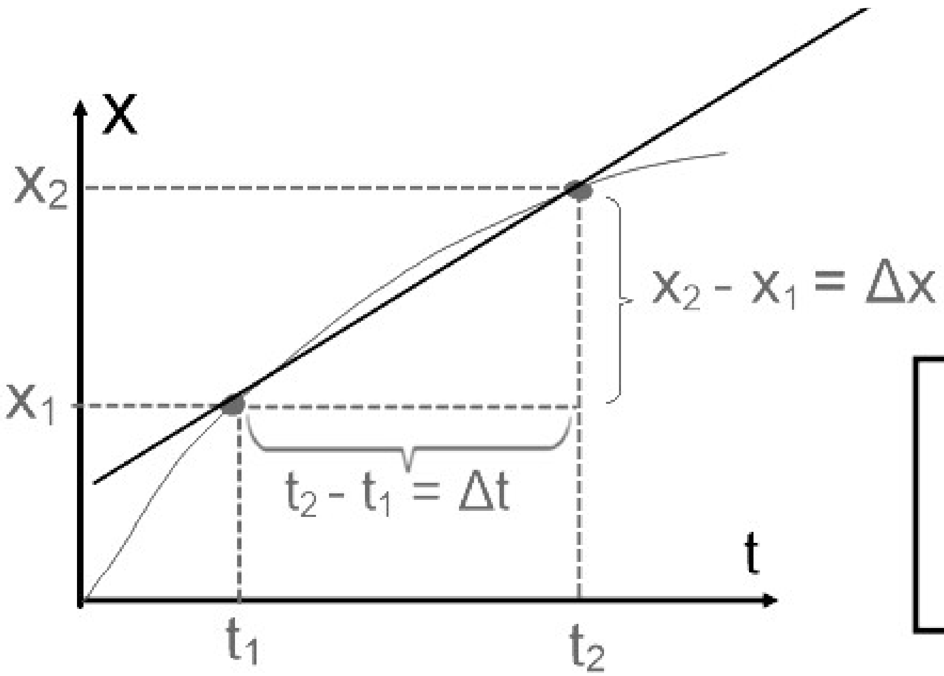
# 1. Nopeus ja vauhti tarkoittavat fysiikassa eri asiaa

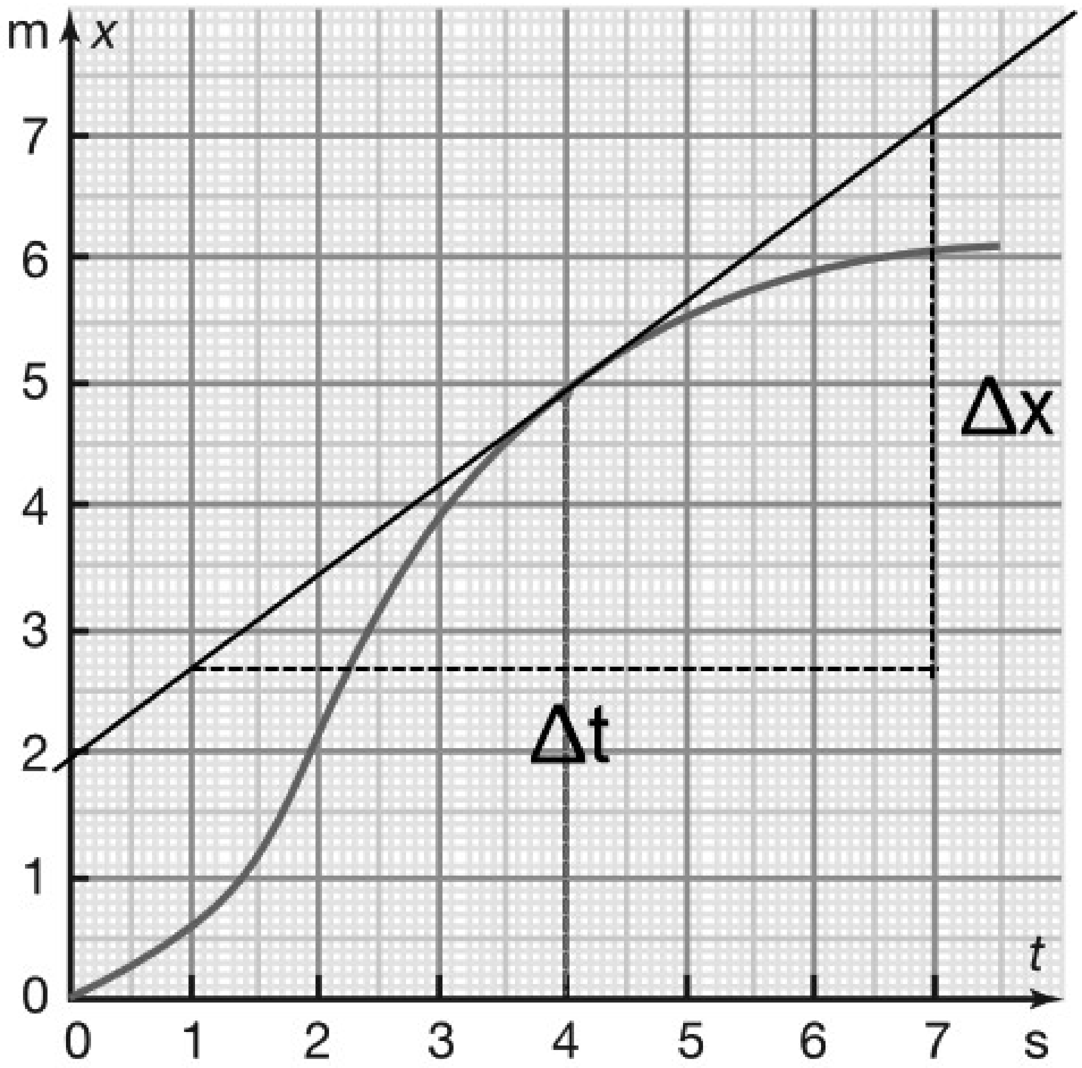
$$\text{Keskinopeus} = \frac{\text{Siirtymä}}{\text{Käytetty aika}}$$

Siirtymä = PAIKAN MUUTOS




$$v_k = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

# Hetkellinen nopeus

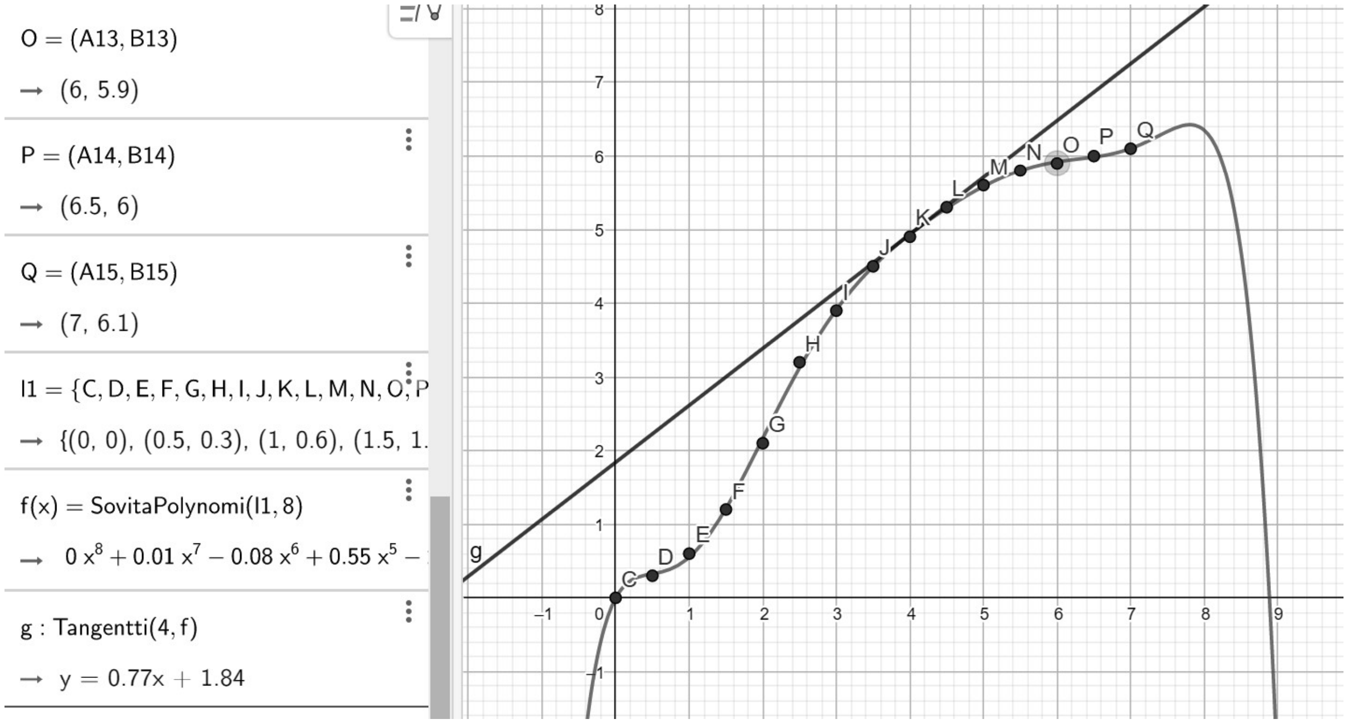



$$v(t = 4{,}0\ \text{s}) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4{,}5\ \ \text{m}}{6{,}0\ \ \text{s}}$$

$$\approx\ 0{,}75\ \text{m/s}$$

# Tehdään Geogebralla...

| t(s) | x(m) |
|---|---|
| 0,50 | 0,30 |
| 1,00 | 0,60 |
| 1,50 | 1,10 |
| 2,00 | 2,10 |
| 2,50 | 3,10 |
| 3,00 | 3,90 |
| 3,50 | 4,50 |
| 4,00 | 4,90 |
| 4,50 | 5,30 |
| 5,00 | 5,60 |
| 6,00 | 5,90 |

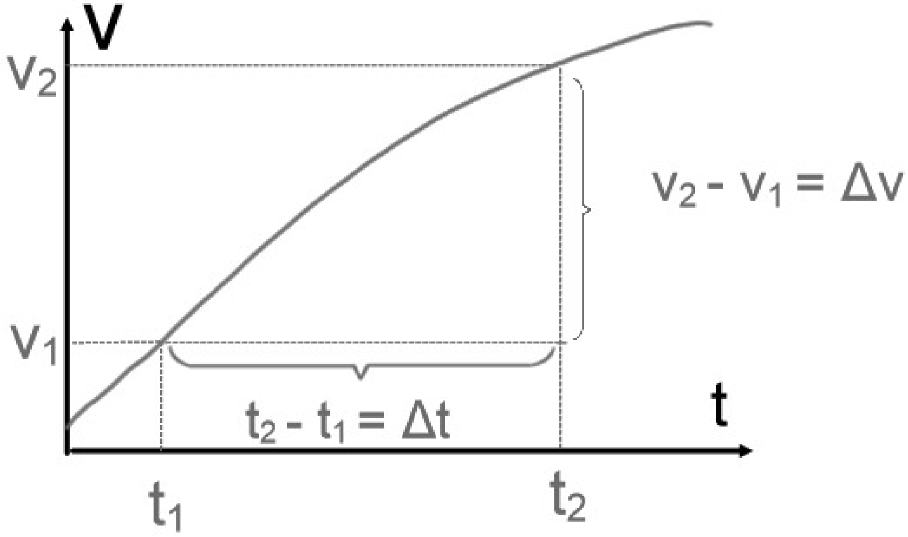



Siis v ≈ 0,77 m/s.

- Luo pistelista ----->l1
- SovitaPolynomi(l1,asteluku) ----→ käyrä f:
- tangentti(muuttujan arvo,f)

# Keskikiihtyvyys

$$\text{Keskikiihtyvyys} = \frac{\text{Nopeuden muutos}}{\text{Käytetty aika}}$$

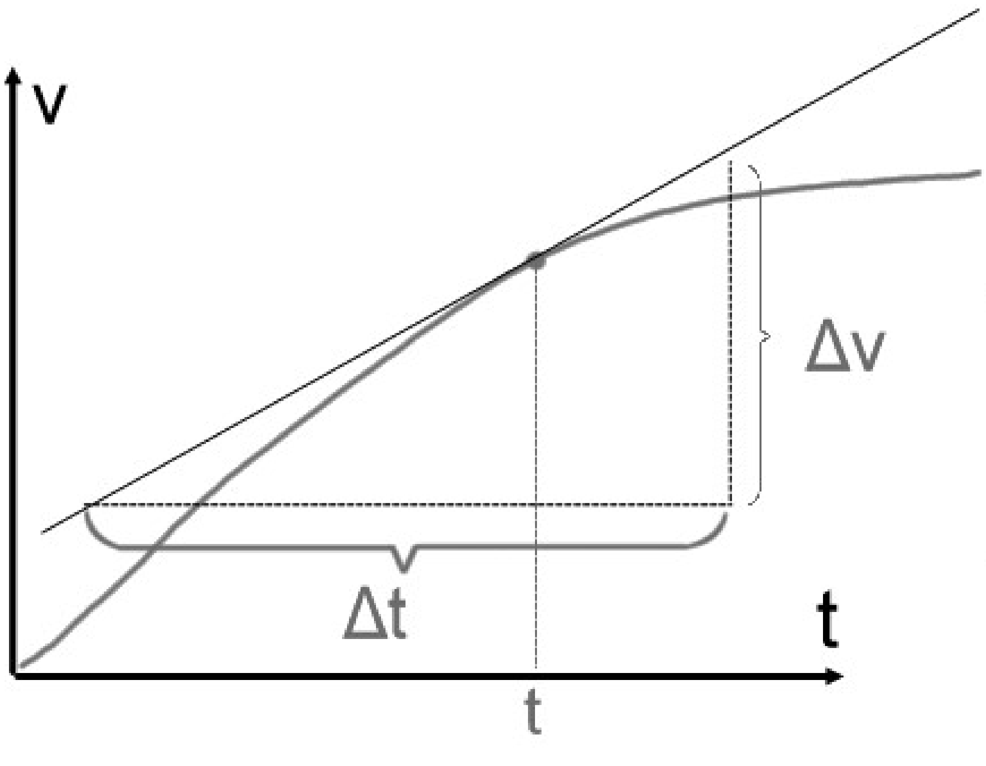



Keskikiihtyvyys aikavälillä $t_1 \ldots t_2$ on

$$\boxed{a_k = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

**Hetkellinen kiihtyvyys**

IDEA: Määritetään tangenttisuoran kulma-kerroin (t,v)-koordinaatistoon piirretylle kuvaajalle.




$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

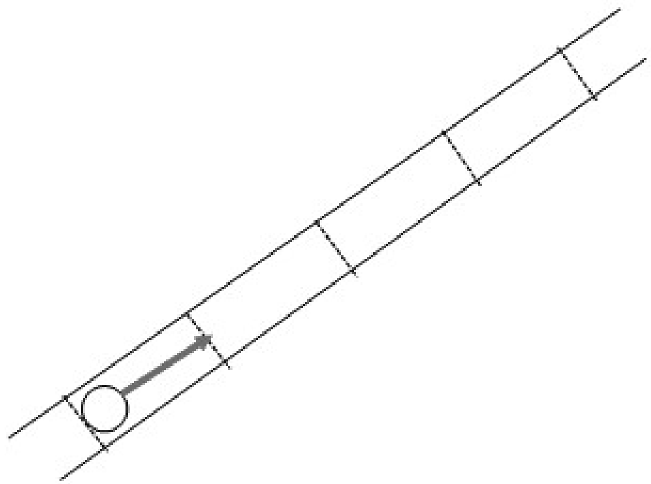
Keskikiihtyyyyyden ja kiihtyvyyden yksikkö:

$$\boxed{[a_k] = [a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{1\text{m/s}}{1\text{s}} = \frac{1\text{m}}{\text{s}\cdot\text{s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

# 2 Tasaisessa liikkeessä nopeus on vakio

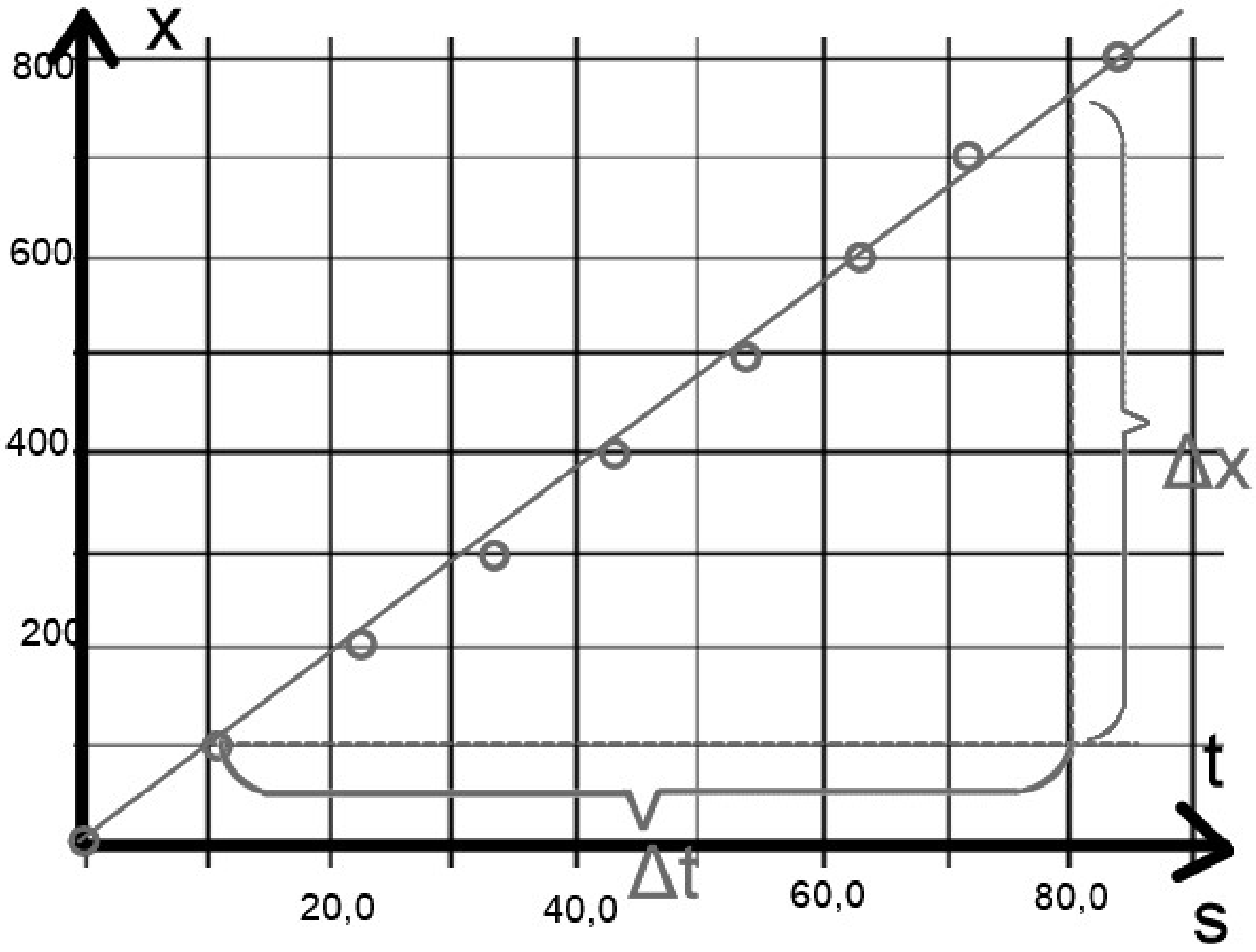
Tutkimus: Ilmakuplan liike

Merkitään:
t = aika
x = ilmakuplan paikka



Tasaisessa suoraviivaisessa liikkeessä
- Kappale liikkuu vakionopeudella
- Kappaleen siirtymä eli paikkakoordinaatin muutos on samanpituisilla aikaväleillä aina yhtä suuri

| t(s) | x(mm) |
|---|---|
| 0,00 | 0 |
| 10,8 | 100 |
| 21,8 | 200 |
| 32,8 | 300 |
| 42,8 | 400 |
| 52,8 | 500 |
| 63,1 | 600 |
| 71,2 | 700 |
| 83,6 | 800 |
| | |




Sovitus: $v = 9{,}696$ mm/s

Määritelmä: Liike on tasaista, jos keskinopeus

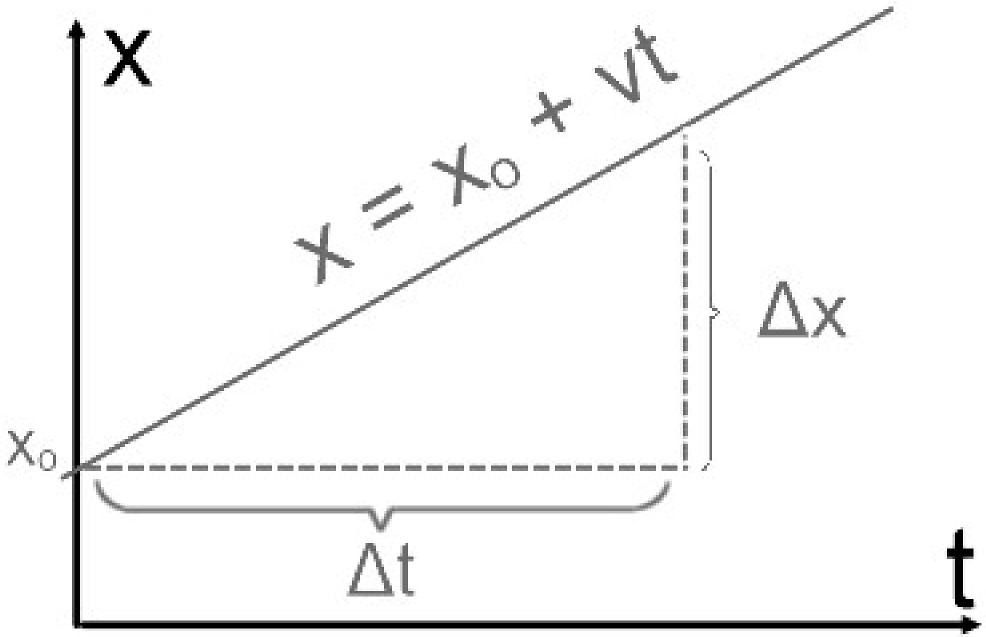
$$v_k = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

on riippumaton aikavälin $\Delta t$ valinnasta. Kuvassa

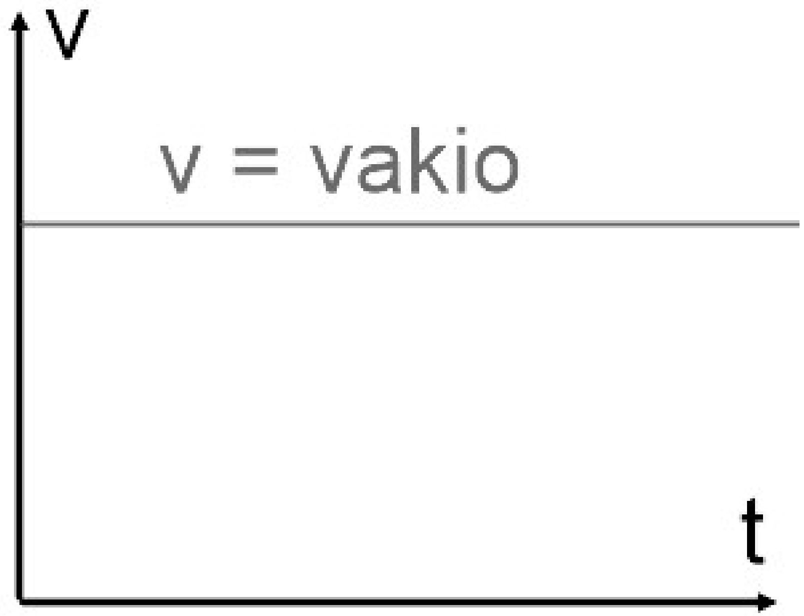
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{670\text{mm}}{70\text{s}} = 9{,}571\ldots\text{mm/s} \approx 9{,}6\text{mm/s}.$$

# Tasainen liike

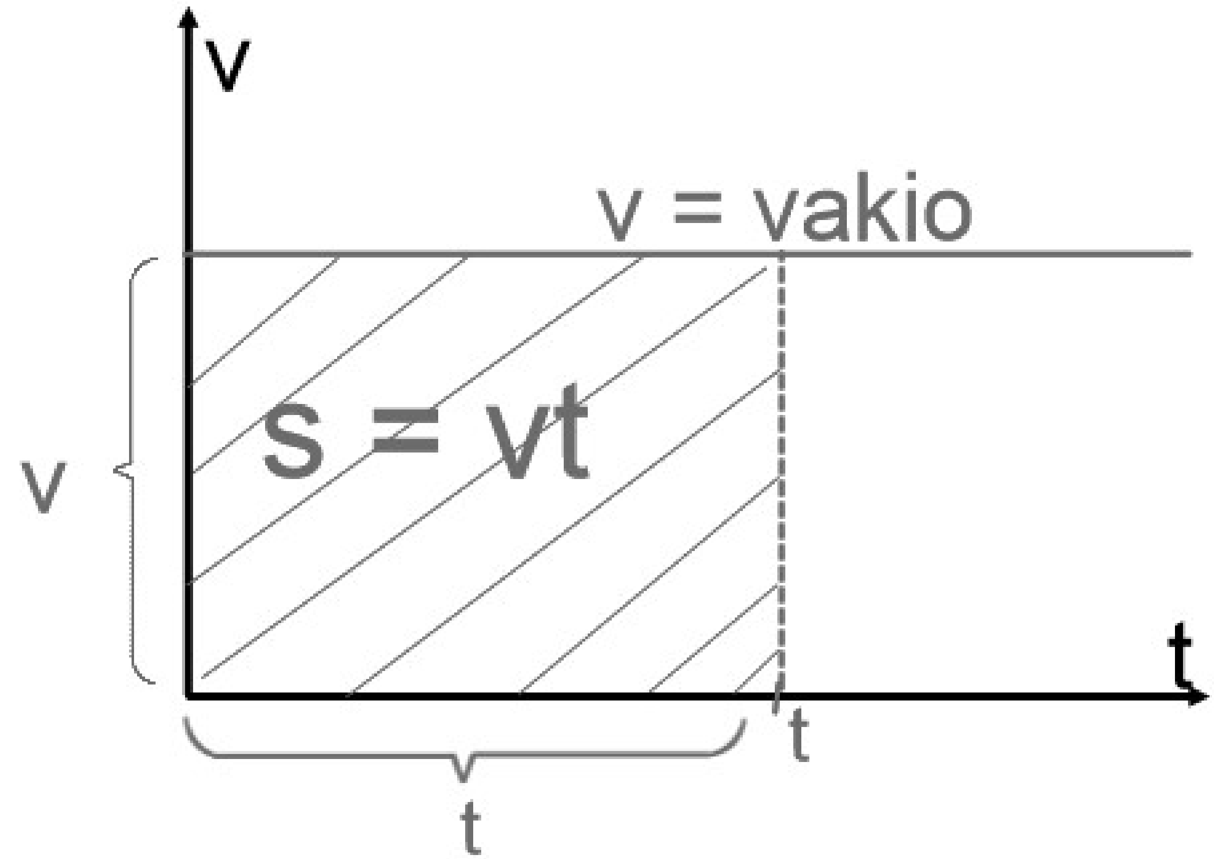
(t,x)-koordinaatisto:

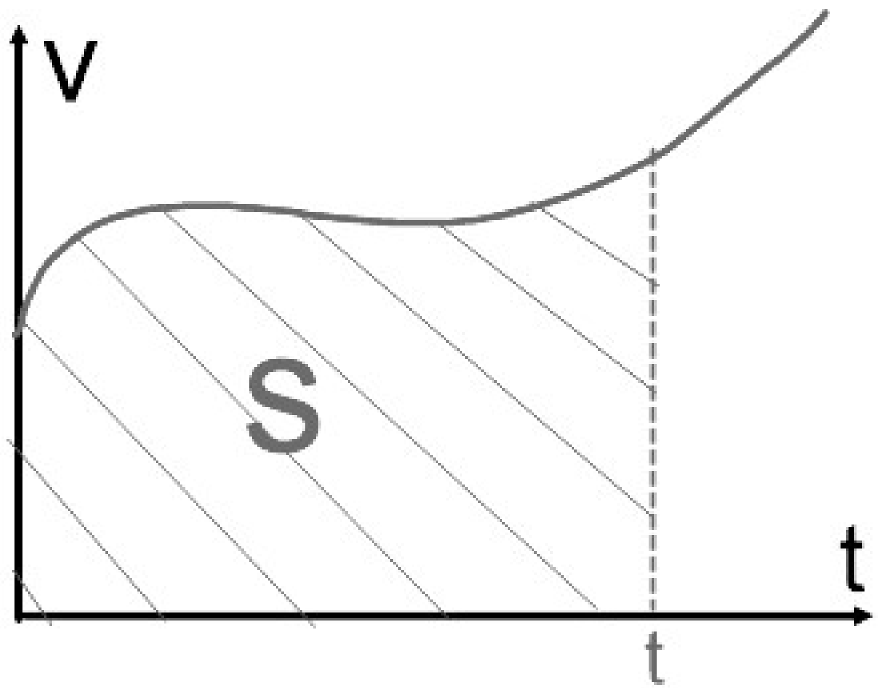



(t,v)-koordinaatisto:



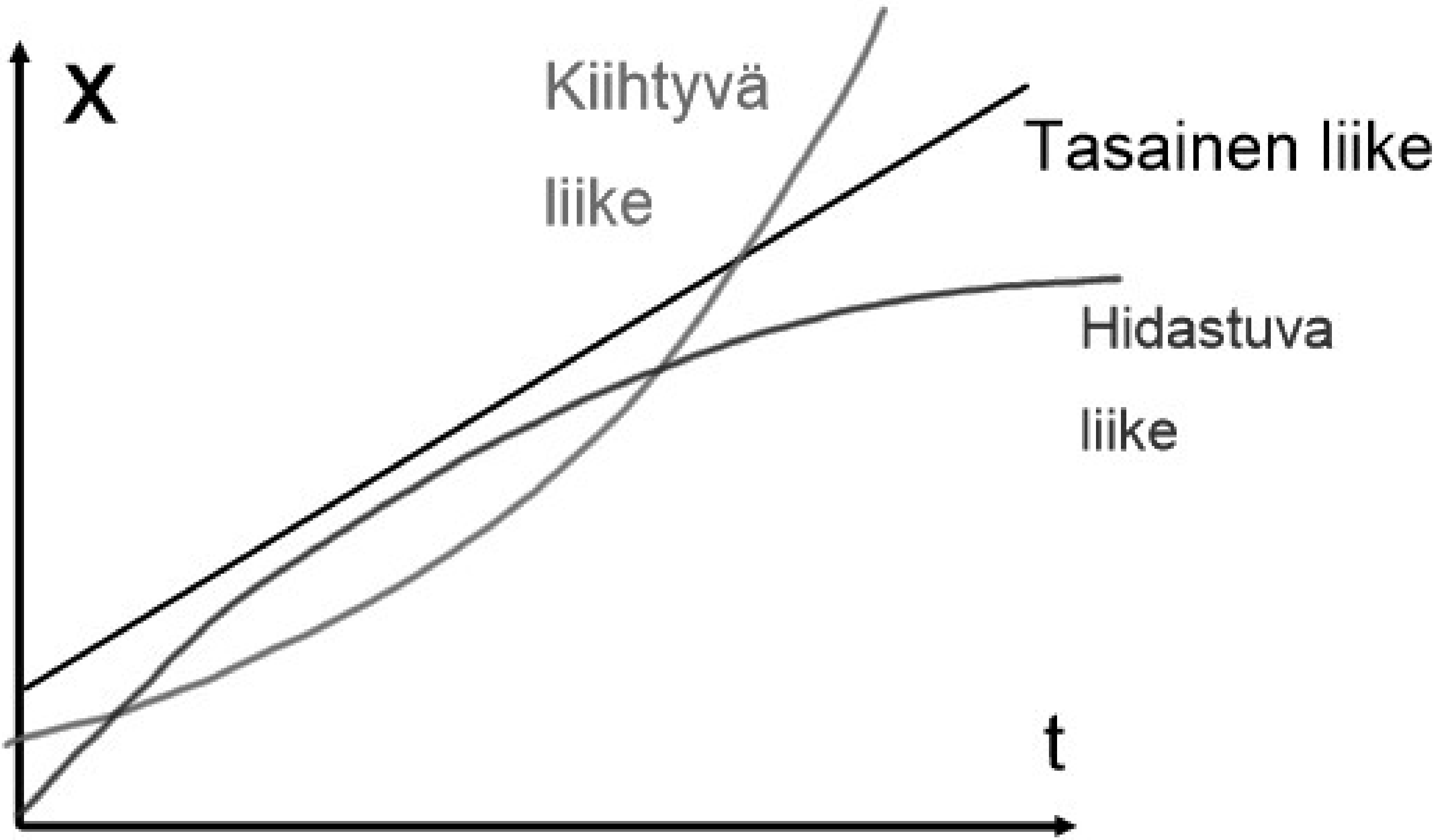
# Kuljetun matkan pinta-alatulkinta:



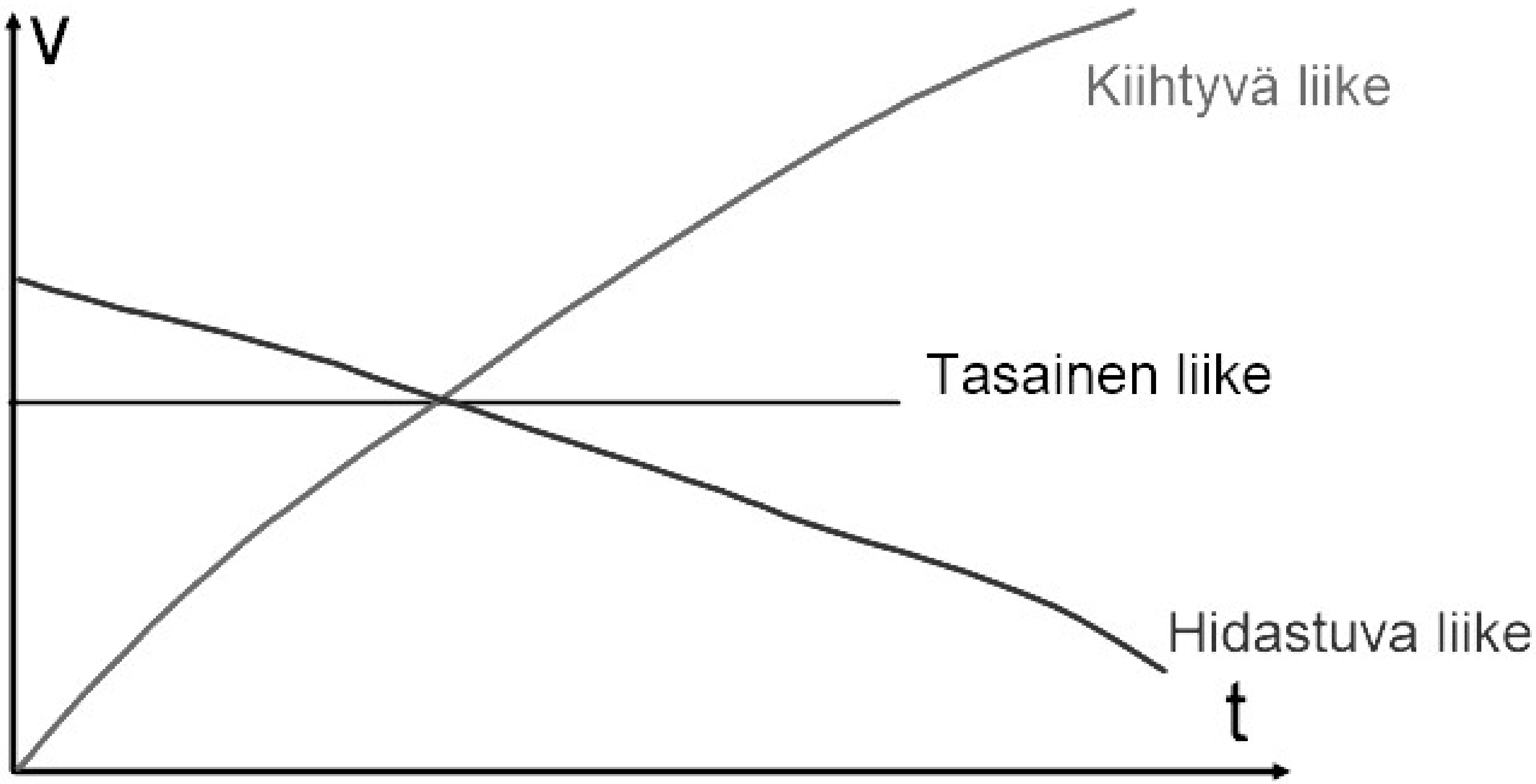



Yleistys:
Kuljettu matka saadaan fysikaalisena pinta-alana (t,v)-koordinaatistossa

# 3 Muuttuva suoraviivainen liike

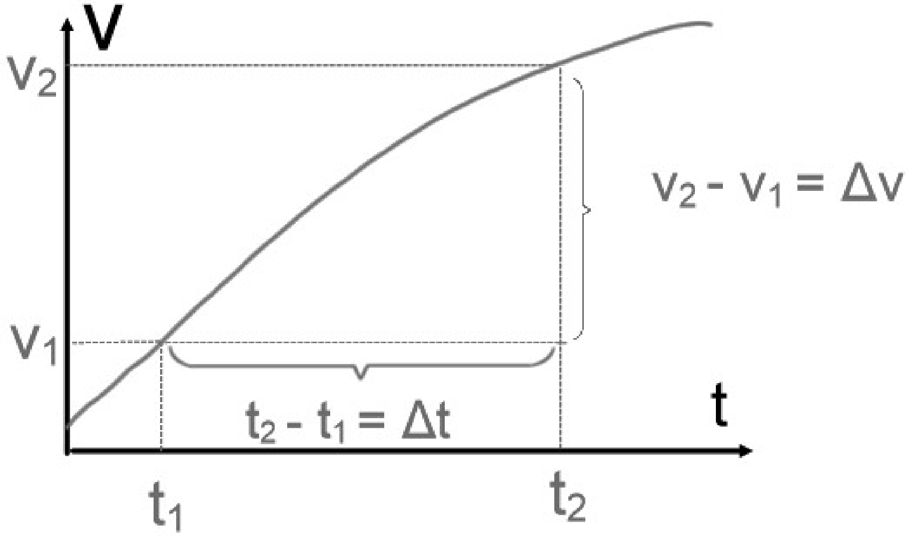


# Nopeus kiihtyvässä liikkeessä



# Keskikiihtyvyys

$$\text{Keskikiihtyvyys} = \frac{\text{Nopeuden muutos}}{\text{Käytetty aika}}$$

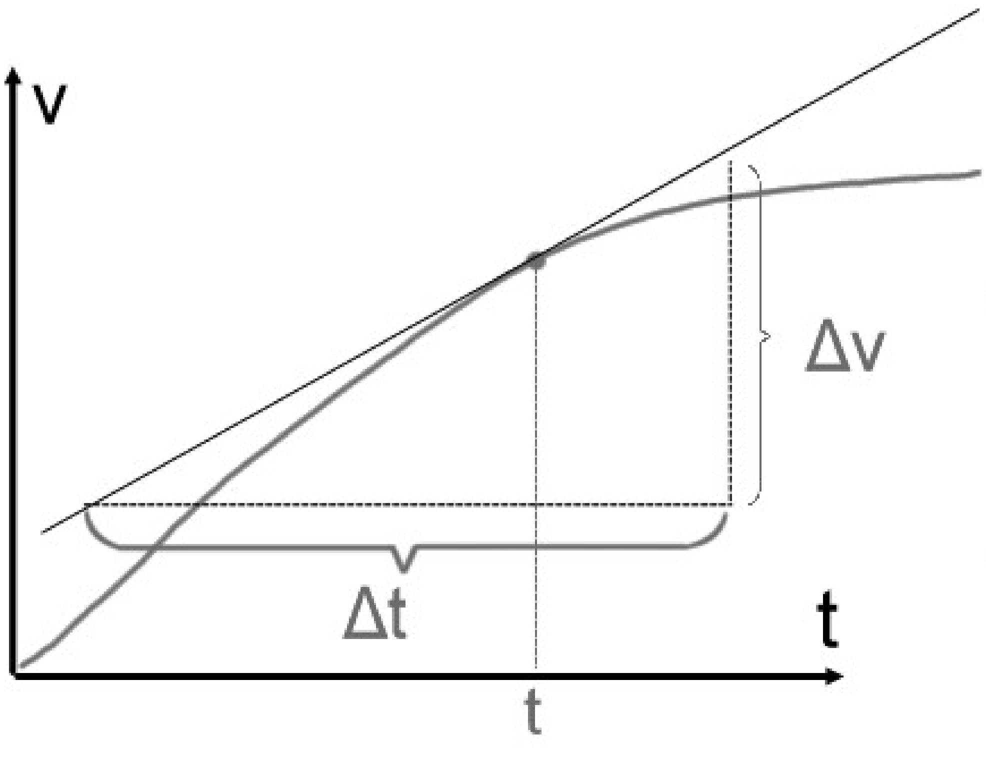



Keskikiihtyvyys aikavälillä $t_1 \ldots t_2$ on

$$\boxed{a_k = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

**Hetkellinen kiihtyvyys**

IDEA: Määritetään tangenttisuoran kulmakerroin (t,v)-koordinaatistoon piirretylle kuvaajalle.



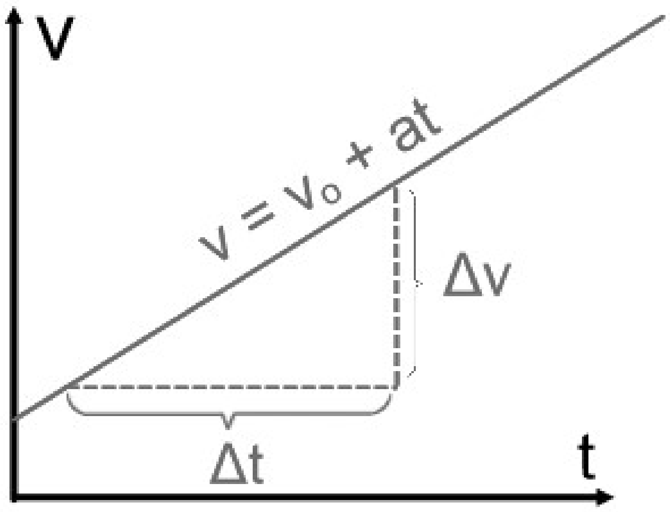

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Keskikiihtyyyyden ja kiihtyvyyden yksikkö:

$$[a_k] = [a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{1\text{m/s}}{1\text{s}} = \frac{1\text{m}}{\text{s}\cdot\text{s}} = 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

# 4 Muuttuvan liikkeen matemaattinen mallintaminen

## Tasaisesti kiihtyvä liike



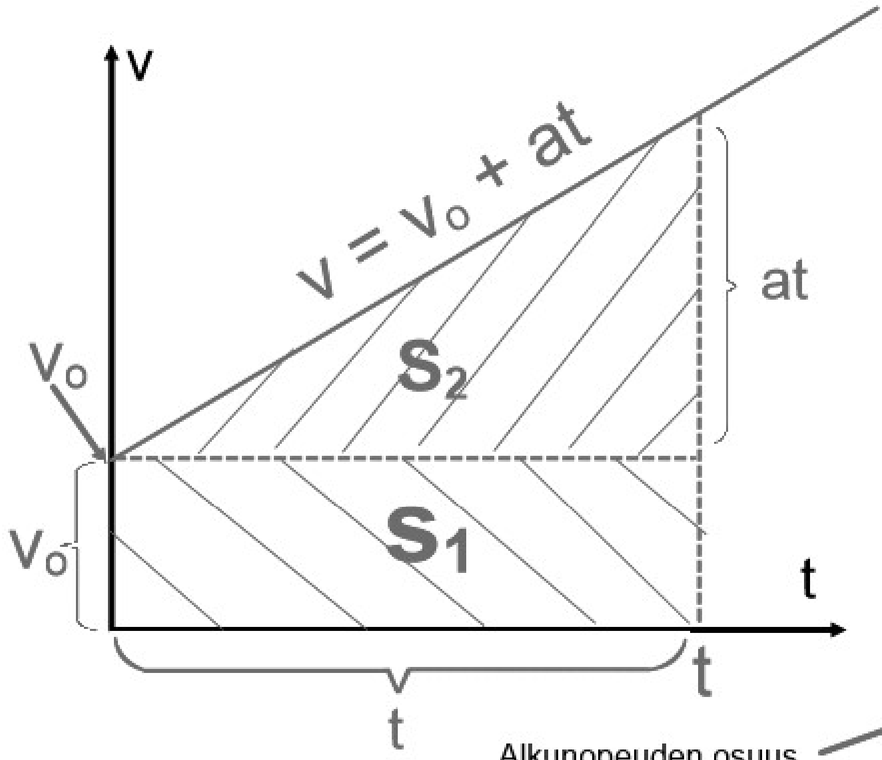

Määritelmä:
Keskikiihtyvyys

$$\boxed{a_k = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

ei riipu aikavälistä Δt.

Seuraus: Kuvaaja (t,v)-koordinaatistossa on silloin SUORA.

# Paikka tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä:




Kuljetun matkan pinta-alatulkinta:

$$s = s_1 + s_2$$
$$= tv_o + \frac{t \cdot at}{2}$$
$$= v_o \cdot t + \tfrac{1}{2} \cdot at \cdot t$$
$$= v_o t + \tfrac{1}{2} \cdot at^2$$

Alkunopeuden osuus

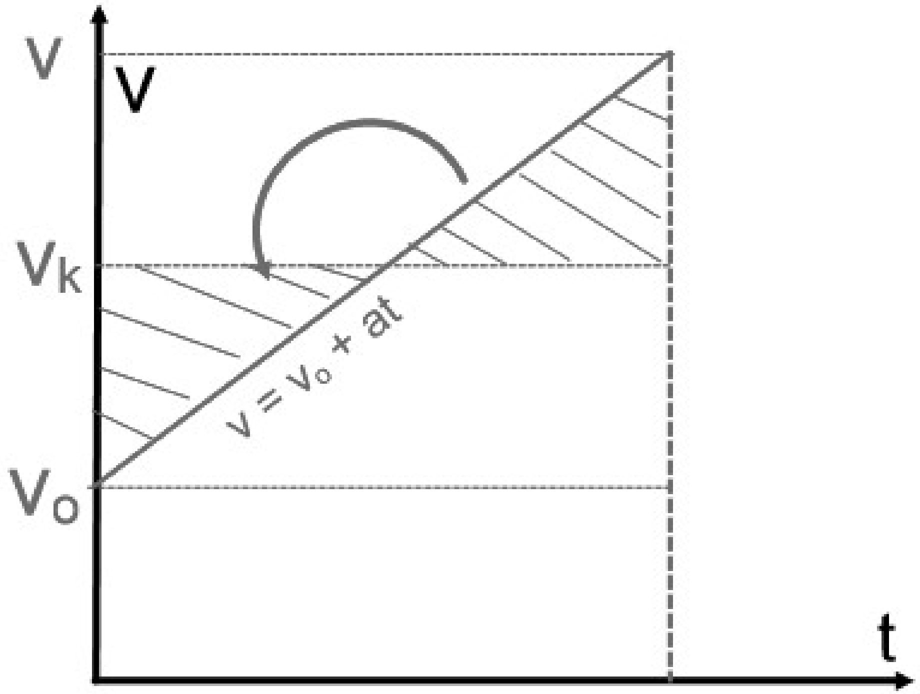
Kiihtyvyydestä (tai hidastuvuudesta) aiheutuva lisäys (tai vähennys).

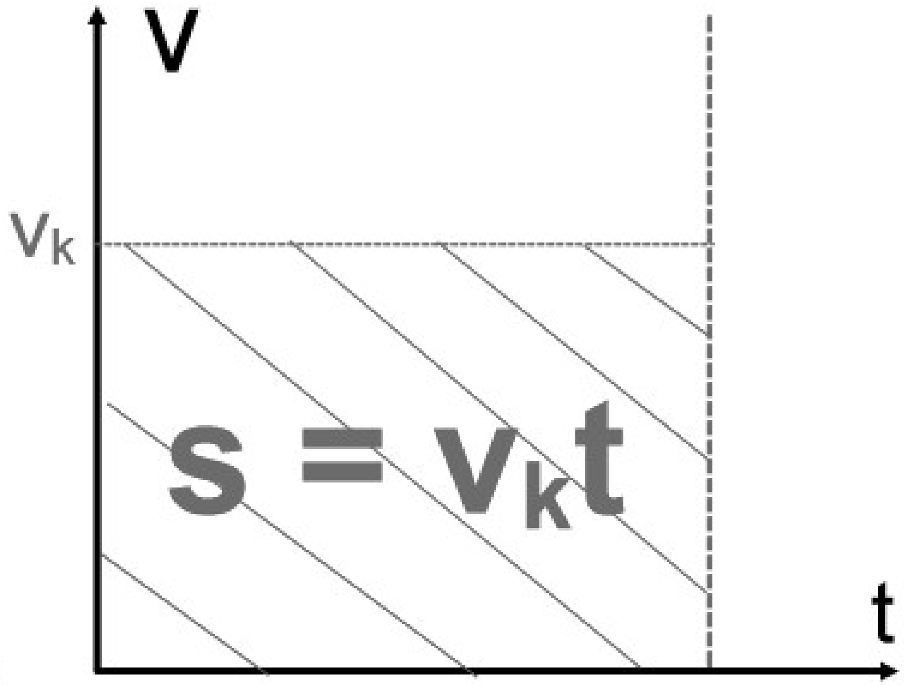
Toisaalta $s = x - x_o$ eli $x = x_o + s$ eli

$$\boxed{x = x_o + v_o t + \frac{1}{2} at^2}$$

MAOL s.124

# Keskinopeus tasaisesti kiihtyvässä liikkeessä



Jos halutaan määritellä, että kaavat $s = v_k \cdot t$ ja $v_k = s/t$ ovat yleispäteviä, niin keskinopeuden määritelmä on

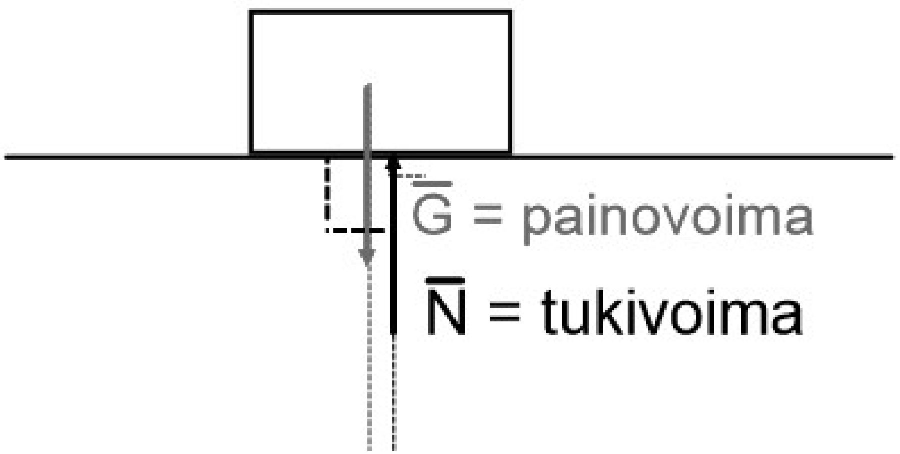
$$\boxed{v_k = \frac{v_o + v}{2}}$$

Pätee vain tasaisesti kiihtyvässä tai hidastuvassa liikkeessä.

# 5 Voimat syntyvät vuorovaikutuksessa

- **Painovoima ja tukivoima**

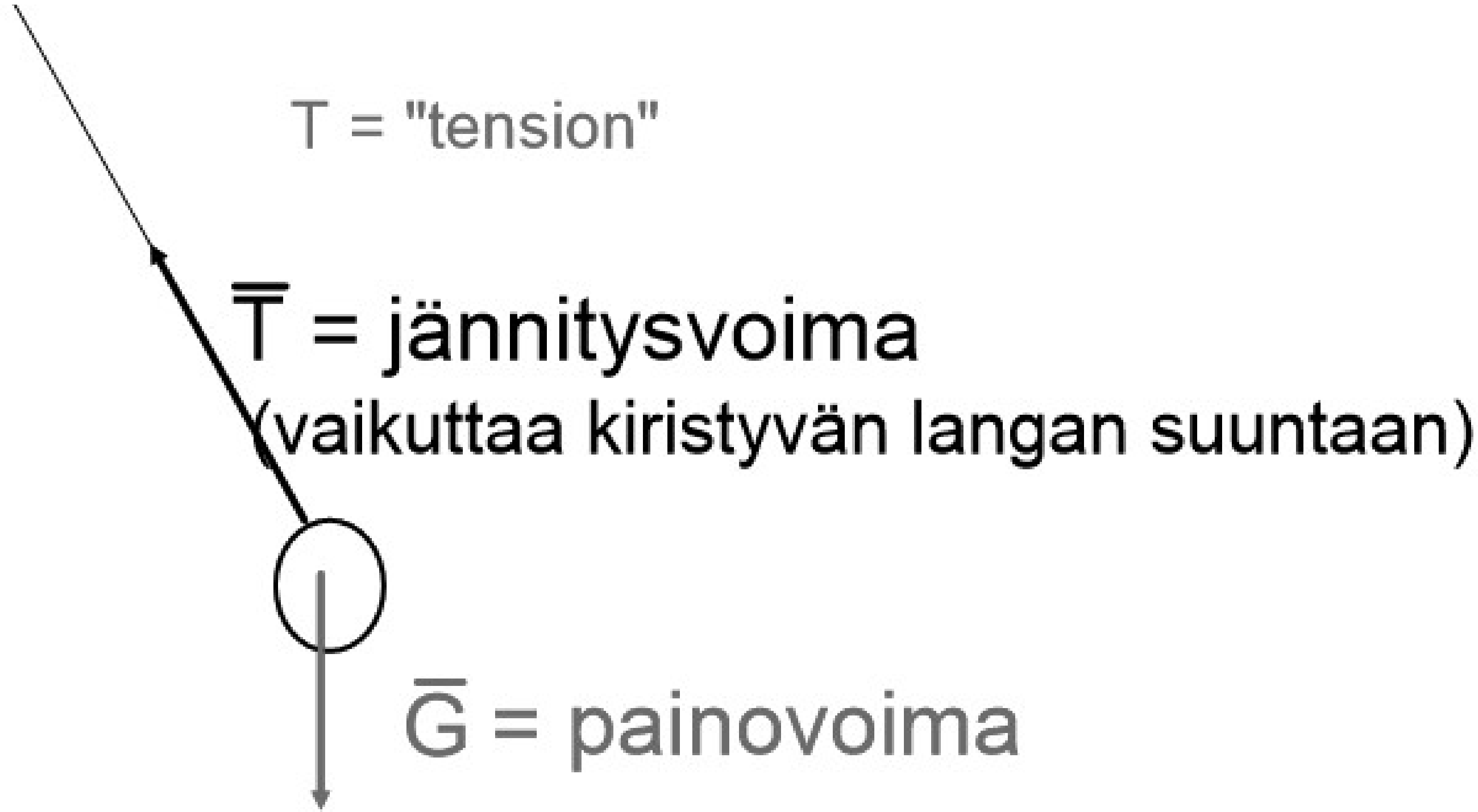
-painovoiman suunta: luotisuoraan ALASPÄIN
-tukivoima vaikuttaa pinnan NORMAALIN suuntaan




Huomaa: $G = mg$, $[G] = 1$ N

$g = 9{,}81$ m/s$^2$

# Langan jännitysvoima

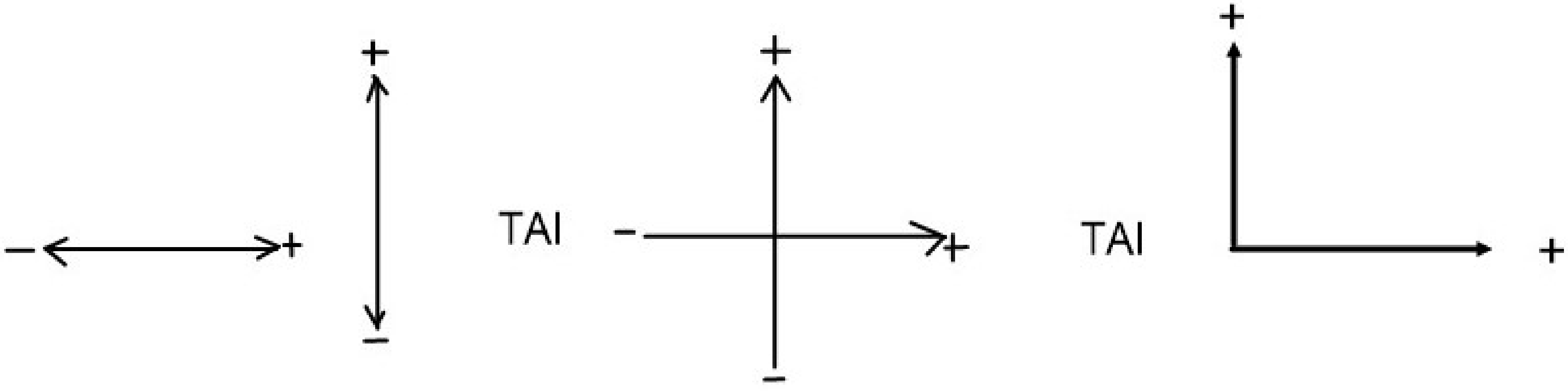


# Vapaakappalekuva eli voimakuvio

-piirretään kaavio
-piirretään kappaleet erillisinä
-piirretään kuhunkin kappaleeseen vaikuttavat voimat

- KAIKKI voimat
- voimien suuruudet ja suunnat oikein
- kappaleiden vuorovaikutukset kuvataan voimapareilla (NIII = voiman ja vastavoiman laki)

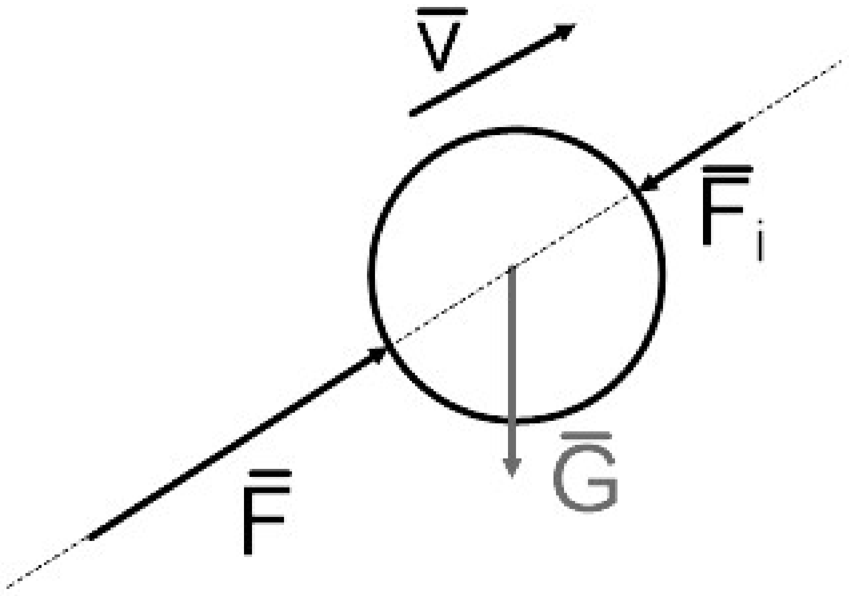
- sovitaan koordinaatisto ja positiivisten akselien suunnat




- merkitään kappaleiden viereen nopeuden ja kiihtyvyyden suunnat

# ESIMERKKI 4

a) palloa lyödään mailalla



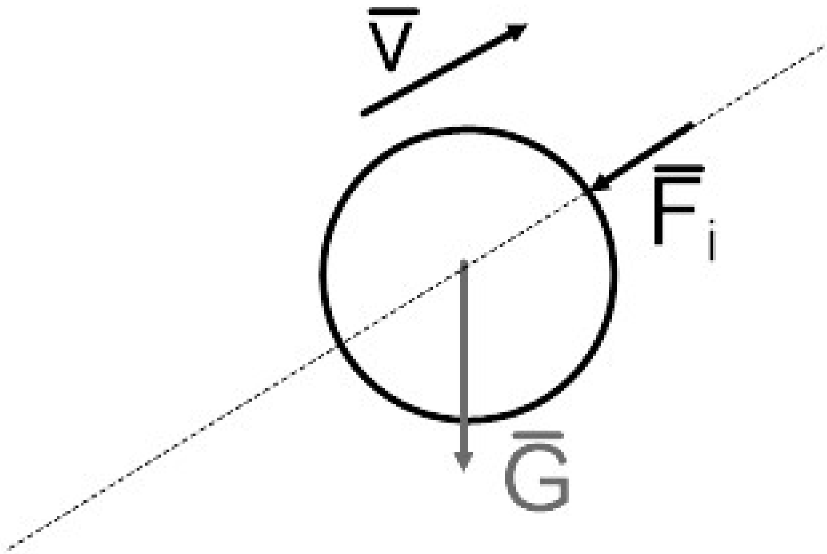

$\overline{v}$ = nopeus

$\overline{F}$ = mailan lyöntivoima

$\overline{F}_i$ = ilman vastus

$\overline{G}$ = painovoima

# b) Pallo lentää ilmassa lyönnin jälkeen

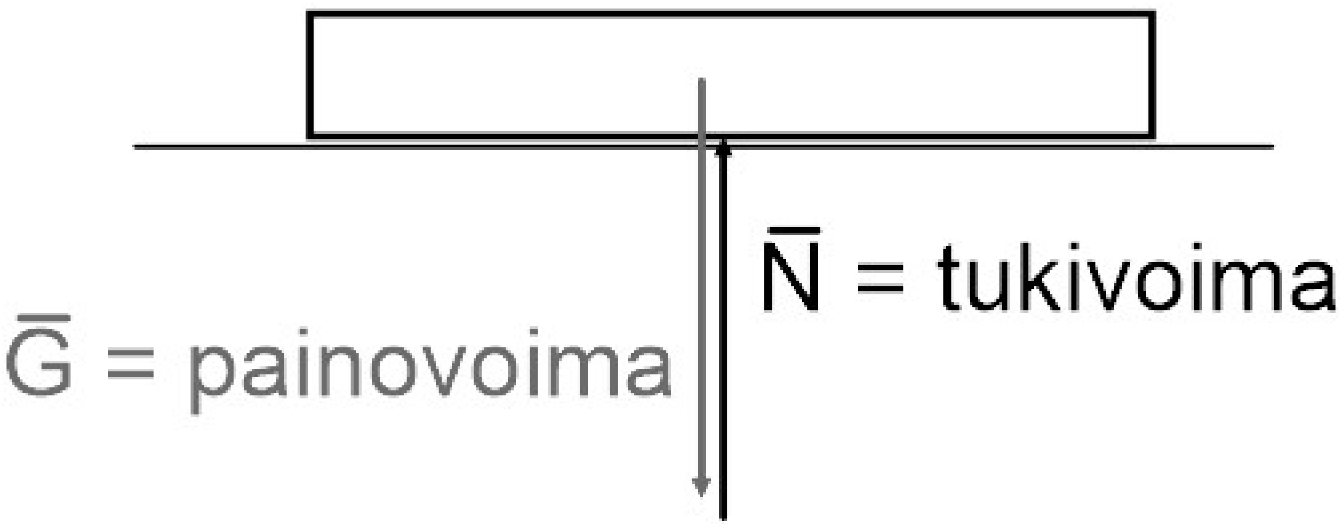



$\bar{v}$ = nopeus

$\bar{F}_i$ = ilman vastus

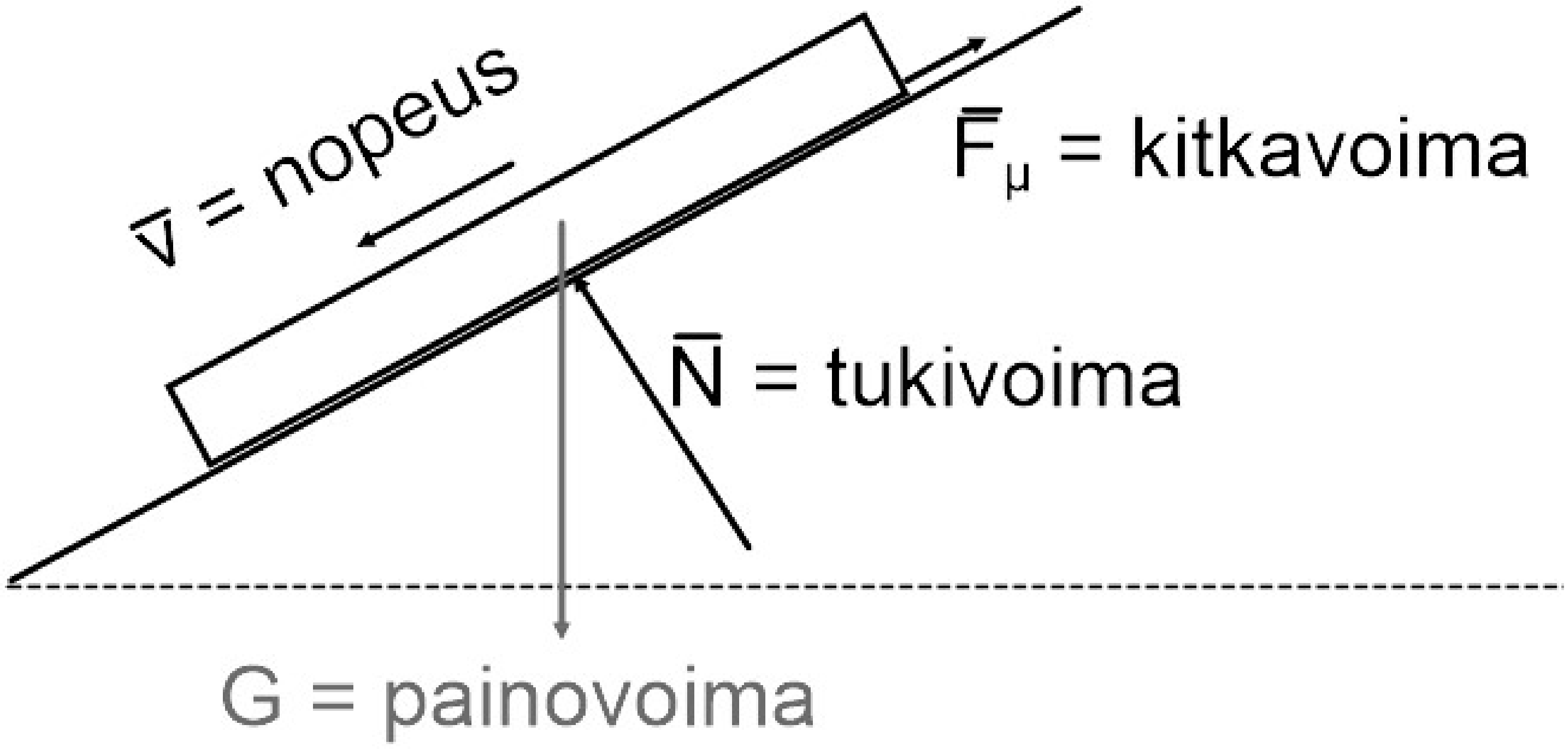
$\bar{G}$ = painovoima

c) Puhelin vaakasuoralla pöydällä

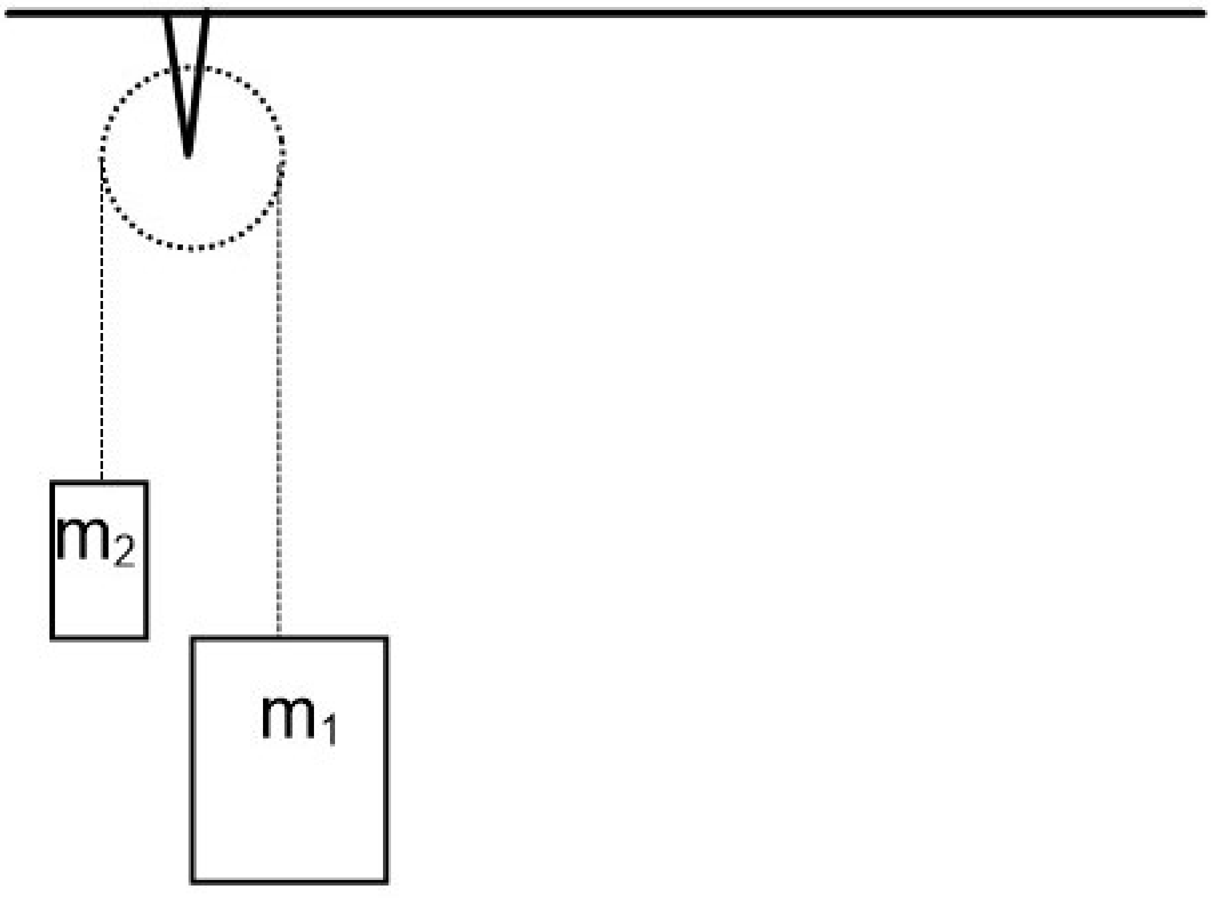


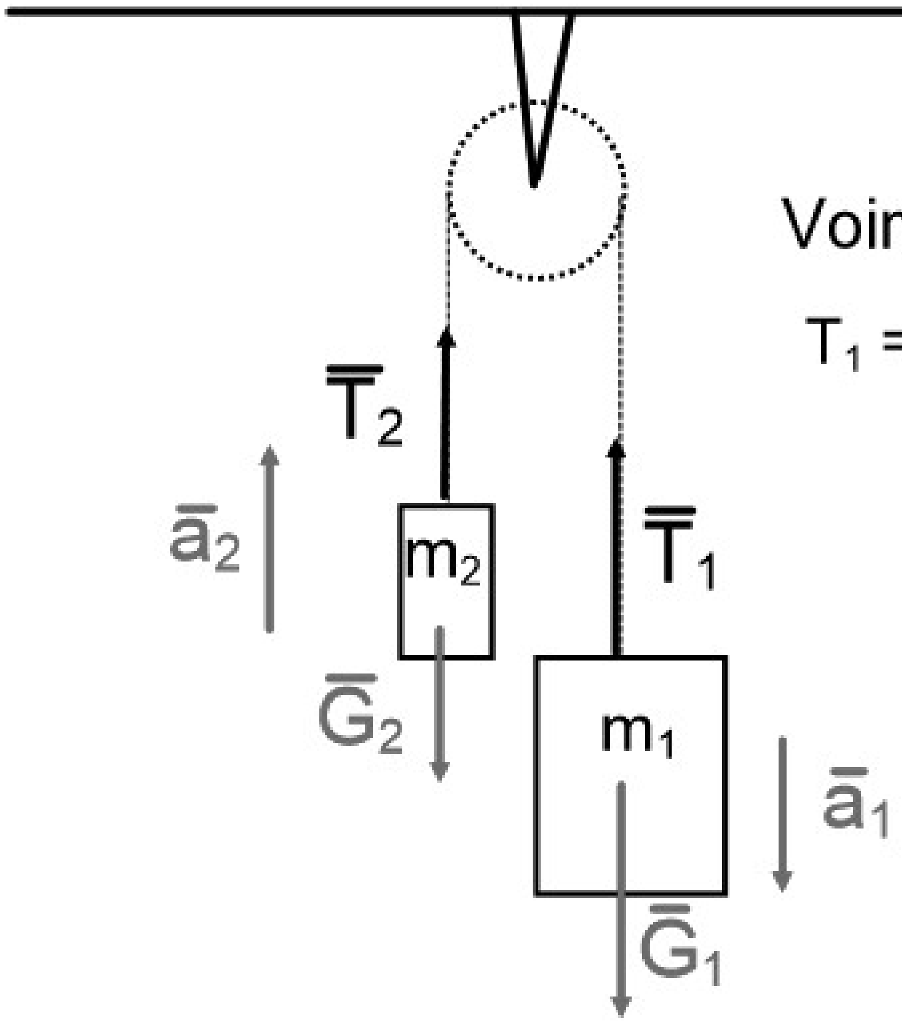

**Painovoima ja tukivoima**
-painovoiman suunta: luotisuoraan ALASPÄIN
-tukivoima vaikuttaa pinnan NORMAALIN suuntaan

## d) Puhelin kaltevalla tasolla



# Esimerkki ekstra: Punnuspari väkipyörän yli (Atwoodin kone)






Voiman ja vastavoiman laki:

$T_1 = T_2 = T$

Lanka ei veny:

$a_1 = a_2 = a$

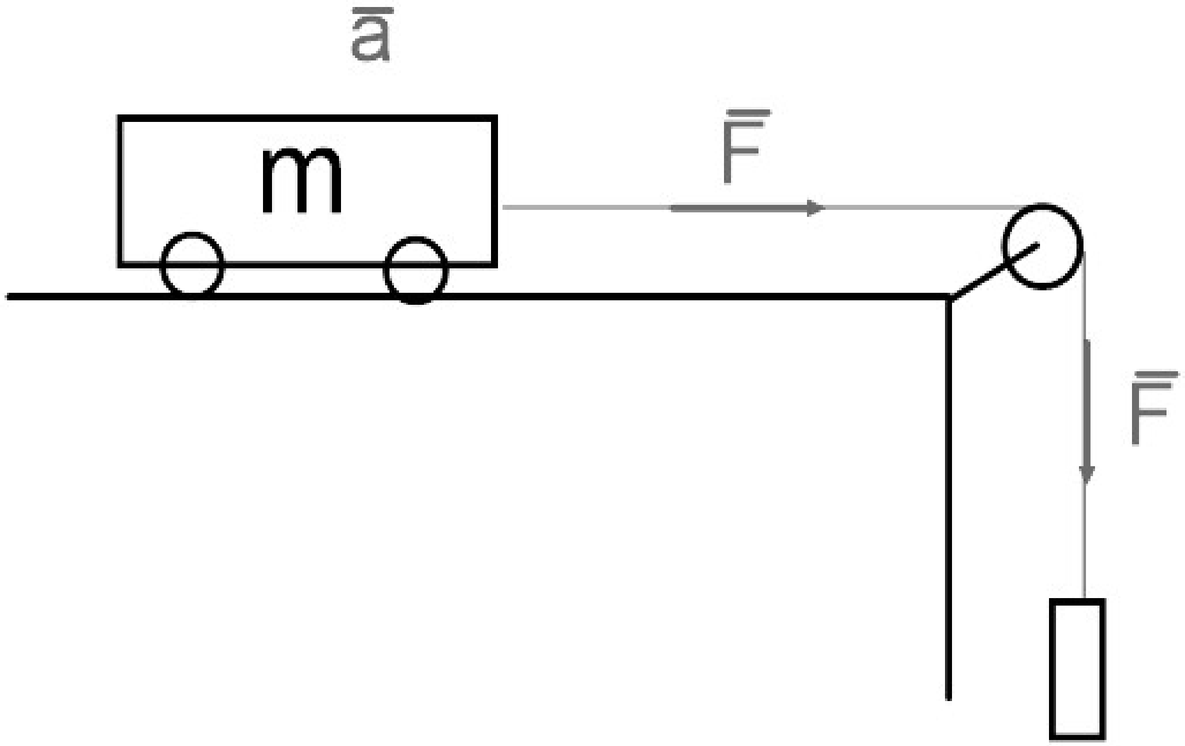
## 6 Voiman ja liikkeen muutoksen yhteys

## NI: Jatkavuuden laki

Jos kappale ei ole vuorovaikutuksessa muiden kappaleiden kanssa, se on levossa tai jatkaa tasaista ja suoraviivaista liikettä.

# NII: Dynamiikan peruslaki

Kokonaisvoima antaa massalle kiihtyvyyden:



Matematiikka: $x = At^2 + Bt + C$

Fysiikka: $x = 1/2at^2 + v_o t + x_o$

Tulkinta: $a = 2A$, $v_o = B$ ja $x_o = C$

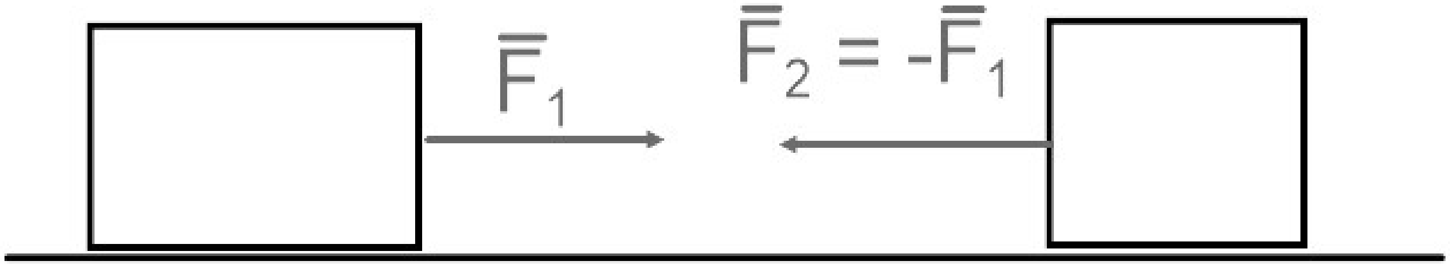
| A(m/s$^{2)}$ | a = 2A (m/s$^2$) | F(N) |
|---|---|---|
| 0,00959 | 0,019 | 0,10 |
| 0,0251 | 0,050 | 0,20 |
| 0,0525 | 0,105 | 0,30 |
| 0,074 | 0,148 | 0,40 |
| 0,0954 | 0,191 | 0,50 |

Johtopäätös: Kokonaisvoima antaa kiihtyvyyden eli

$$\Sigma \bar{F} = m\bar{a}$$

# NIII: Voiman ja vastavoiman laki

Ei voi olla voimaa ilman vastavaikutusta:



# 7 Liikeyhtälö on kappaleen liikkeen matemaattinen malli

NII: Dynamiikan peruslaki

Oleellista: Voiman ja kiihtyvyyden yhteys

$$\boxed{\Sigma \bar{F} = m\bar{a}}$$

"Sigma"= summa" = voimien VEKTORISUMMA eli kokonaisvaikutus.

# Voiman ja liikkeen muutoksen yhteys

- pohdi fysikaaliset ilmiöt
- alkuarvot (esim. alkunopeus)
- voimakuvio
- kirjoita liikeyhtälö VEKTORIMUODOSSA, esim.

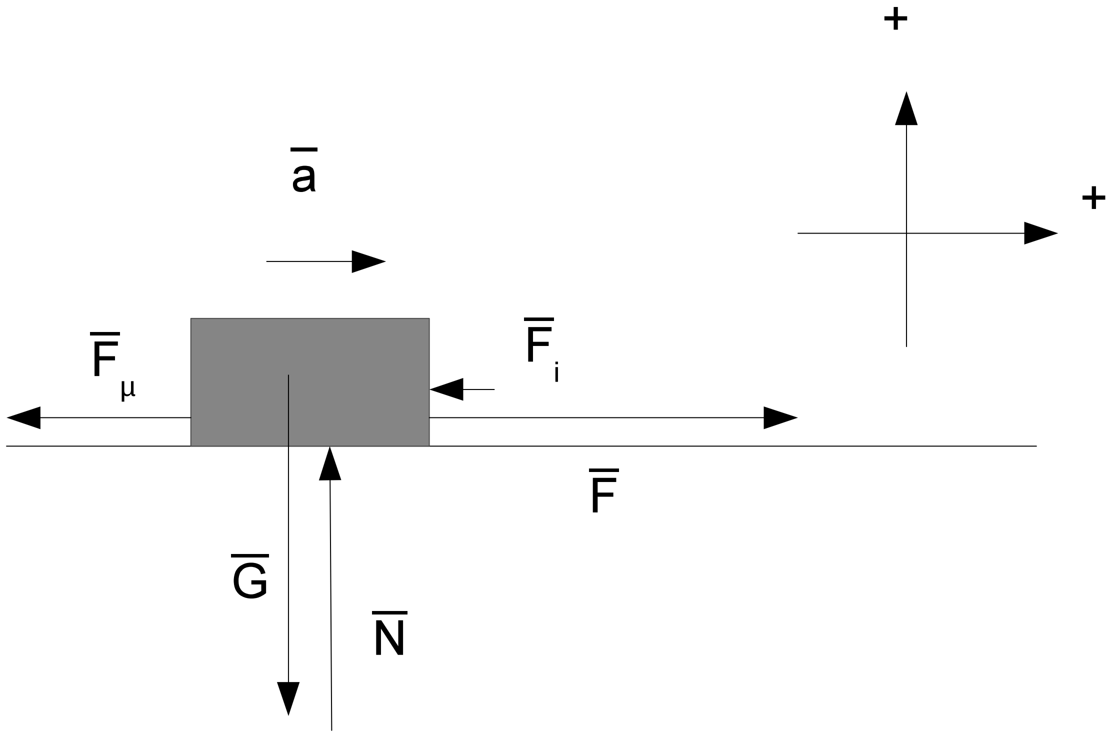
$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 = m\overline{a}$$

- kirjoitetaan liikeyhtälöt skalaariyhtälöinä (esim. vaakasuorassa suunnassa ja pystysuorassa suunnassa) ottamalla huomioon suuntasopimus

- ratkaistaan liikeyhtälöstä esim. kysytty kiihtyvyys

# LUKU 7, ESIMERKKI 1

Vaakasuoralla pinnalla liukuvan laatikon nopeus kasvaa:



Merkinnät:

$\overline{G}$ = painovoima

$\overline{N}$ = tukivoima

$\overline{F}$ = vetovoima

$\overline{F}_i$ = ilman vastus

$\overline{F}_\mu$ = liukukitkavoima

$\overline{a}$ = kiihtyvyys

a) Kokonaisvoima:

$$\Sigma\bar{F} = \bar{F} + \bar{F}_i + \bar{F}_\mu + \bar{N} + \bar{G}.$$

b) Liikeyhtälö vektorimuodossa:

$$\bar{F} + \bar{F}_i + \bar{F}_\mu + \bar{N} + \bar{G} = m\bar{a}.$$

c) Liikeyhtälö pystysuorassa suunnassa:

$$\overline{N} + \overline{G} = \overline{0}$$

eli skalaariyhtälönä N - G = 0 eli N = G = mg.

Liikeyhtälö vaakasuorassa suunnassa:

$$\overline{F} + \overline{F}_{\bar{i}} + \overline{F}_{\mu} = m\overline{a}.$$

Suuntasopimuksen mukaan

$F - F_i - F_\mu = ma \;|:m$

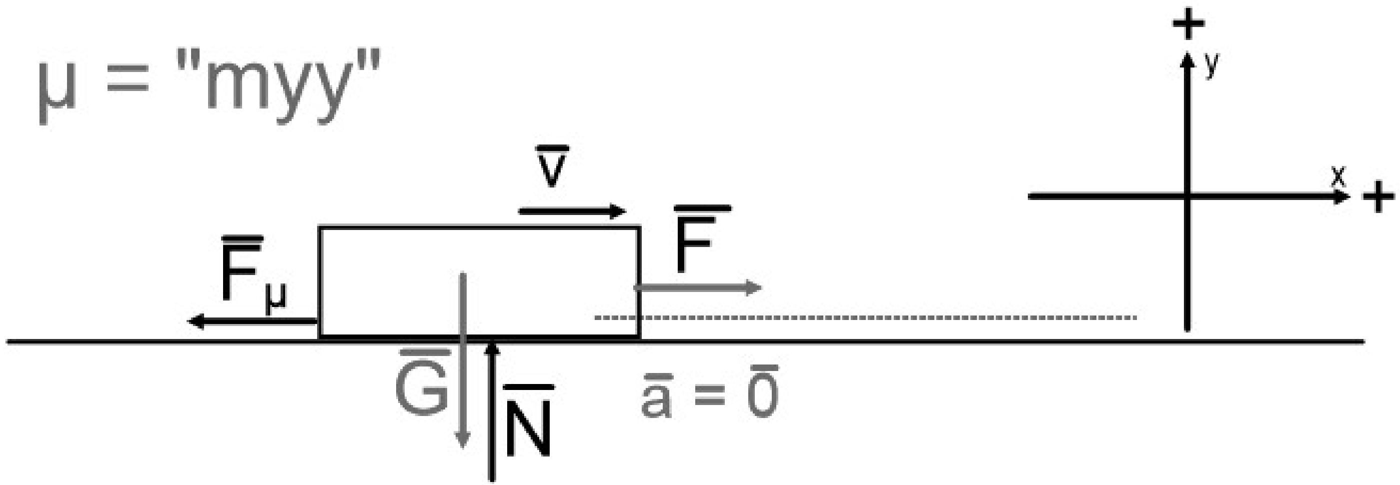
$$a = \frac{F - F_i - F_\mu}{m} = \ldots$$

Suunta: Vetovoiman $\overline{F}$ suuntaan eli kuvassa OIKEALLE.

# 8 Kitka on liukumista vastustava voima

- kitka on kappaleiden välinen kosketus-voima
- LEPOKITKA pyrkii pitämään kappaleen paikallaan
- lepokitkavoiman suurin mahdollinen arvo on LÄHTÖKITKA eli täysin kehittynyt lepokitka
- liikkuvaan kappaleeseen kohdistuu LIUKUKITKA tai VIERIMISKITKA
- yleensä liukukitka on pienempi kuin lähtökitka

# Liukukitkakertoimen määrittäminen




Vedetään taakkaa vaakasuoralla pinnalla VAKIONOPEUDELLA. Silloin $\bar{a} = \bar{0}$ eli $\Sigma\bar{F} = \bar{0}$.

Liikeyhtälöt:

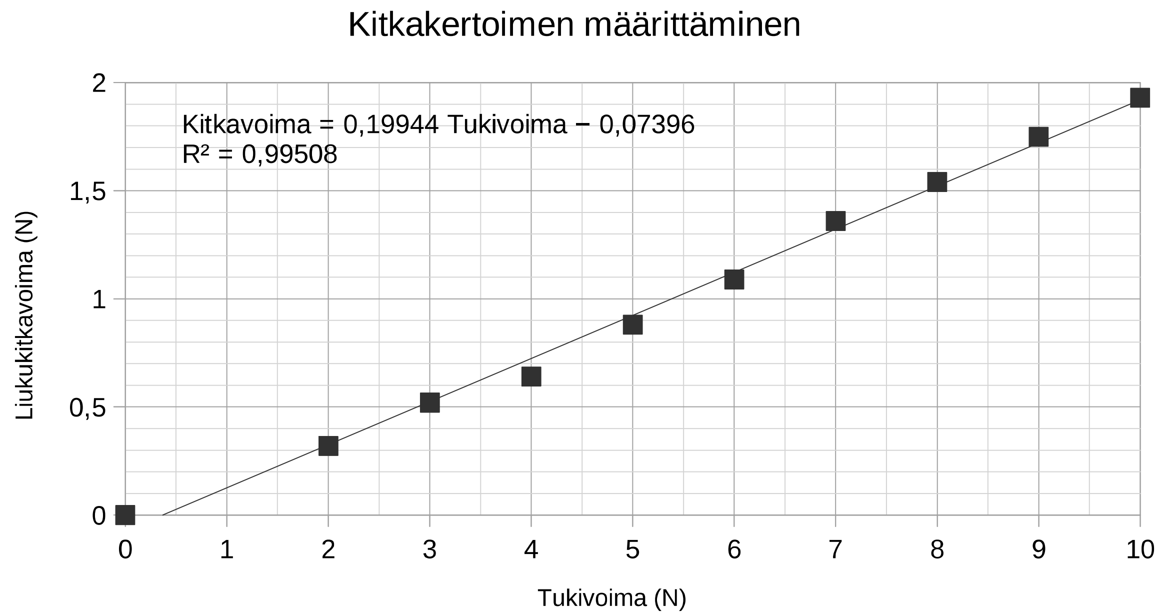
Vaakasuora suunta: $\overline{F} + \overline{F}_\mu = \overline{0}$.

Suuntasopimuksen mukaan $F - F_\mu = 0$ eli $F = F_\mu$.

Pystysuora suunta: $\overline{G} + \overline{N} = \overline{0}$.

Suuntasopimuksen mukaan $N - G = 0$ eli $N = G = mg$.

| N(N) | $F_\mu$(N) |
|---|---|
| 0,00 | 0,00 |
| 2,00 | 0,32 |
| 3,00 | 0.52 |
| 4,00 | 0,64 |
| 5,00 | 0,88 |
| 6,00 | 1,09 |
| 7,00 | 1,36 |
| 8,00 | 1,54 |
| 9,00 | 1,75 |
| 10,00 | 1,93 |
| | |




Mitattu 29.8.2022

Johtopäätös: $F_{\mu}$ = VAKIO·N eli

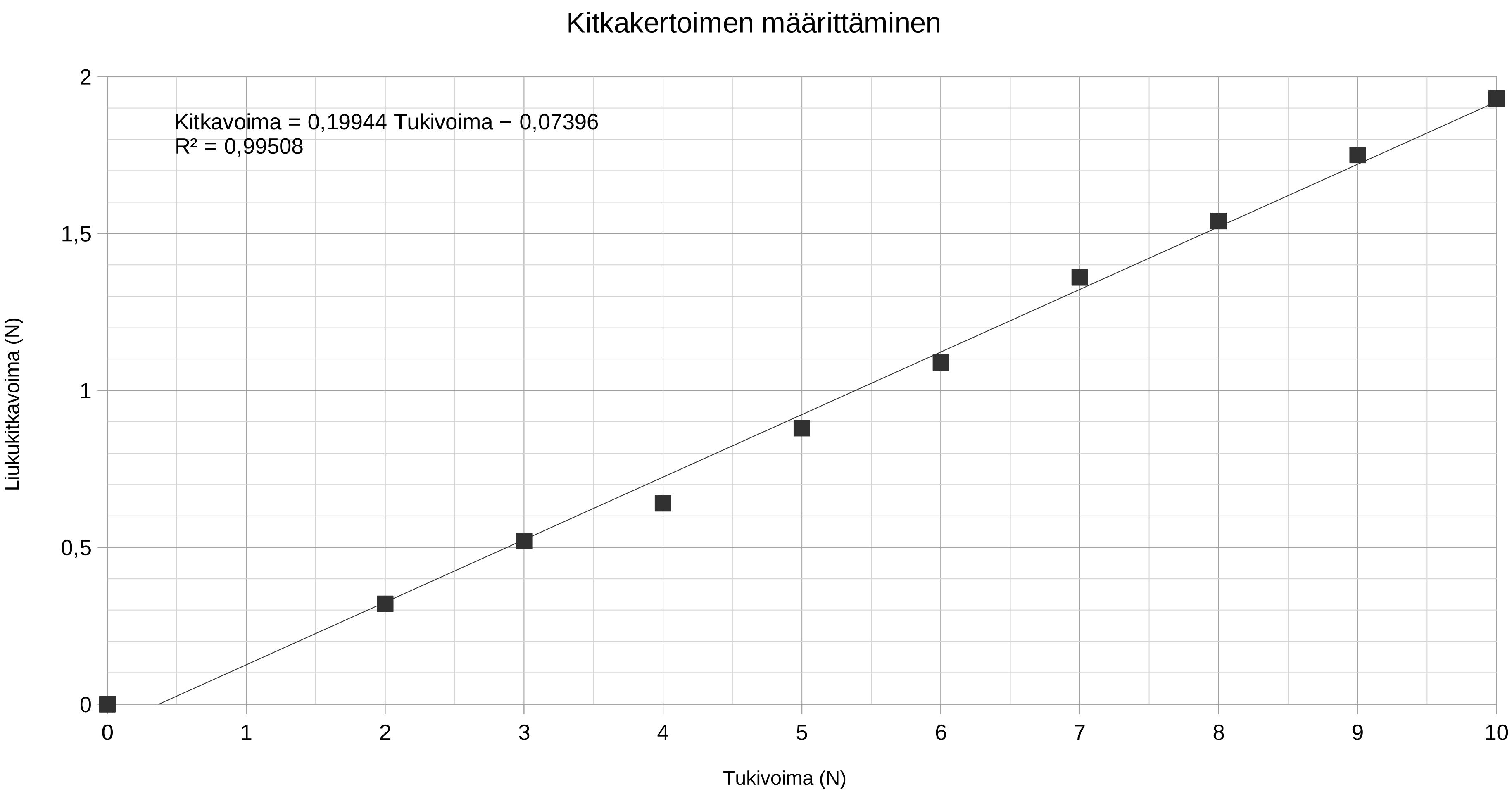
$$F_{\mu} = \mu N$$

μ = liukukitkakerroin ( = laaduton luku)

Liukukitkakerroin μ voidaan määrittää suoran fysikaalisena kulmakertoimena:

$$\mu = \frac{\Delta F}{\Delta N} \approx 0{,}19944 \approx 0{,}20.$$

# Sovitus Librellä: μ = 0,199.



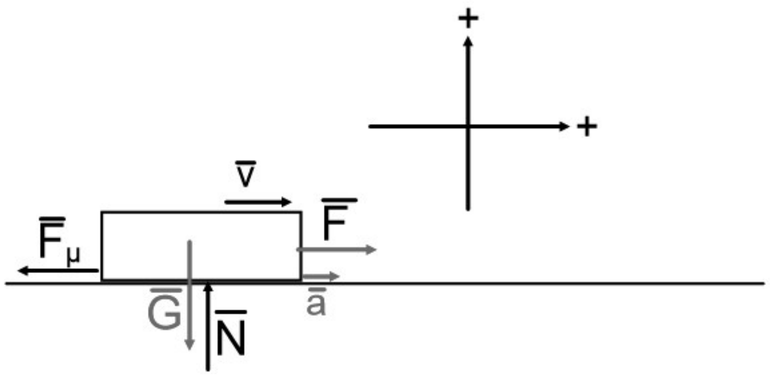
# ESIMERKKI 2

$F = 8{,}0\ \text{N}$

$m = 2{,}0\text{kg}$

$\mu = 0{,}20$

$\mu_o = 0{,}30$




a) Lähteekö kappale liikkeelle?

Lasketaan lähtökitkavoima:

$$F_{\mu o} = \mu_o mg = 0{,}30 \cdot 2{,}0\ \text{kg} \cdot 9{,}81\text{m/s}^2$$
$$= 5{,}886\ \text{N} \approx 5{,}9\ \text{N}.$$

$F > F_{\mu o}$, joten lähtee....

Liikeyhtälö vaakasuorassa suunnassa:

$$\overline{F} + \overline{F}_\mu = m\overline{a}$$

Suuntasopimuksen mukaan

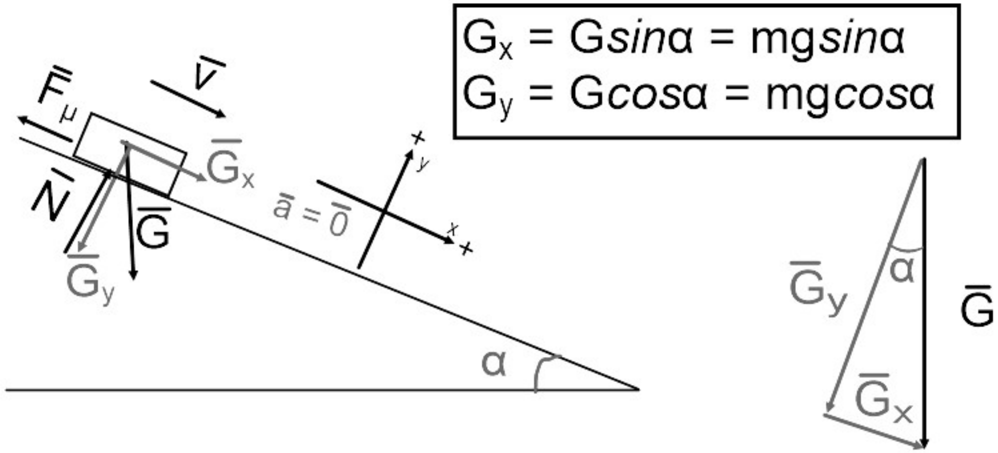
$$F - F_\mu = ma \mid F_\mu = \mu N = \mu mg$$

$$F - \mu mg = ma \mid :m$$

$$a = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{8{,}0\ \cancel{\text{kg}}\text{m/s}^2 - 0{,}20 \cdot 2{,}0\ \cancel{\text{kg}} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2{,}0\ \cancel{\text{kg}}}$$

$$\approx 2{,}03\ \text{m/s}^2 \approx \underline{2{,}0\ \text{m/s}^2}.$$

# ESIMERKKI 3




Painovoiman komponentit kaltevalla tasolla:

$G_x = G\mathit{sin}\alpha = mg\mathit{sin}\alpha$

$G_y = G\mathit{cos}\alpha = mg\mathit{cos}\alpha$

a) Liikeyhtälö pinnan normaalin suunnassa: $\overline{N} + \overline{G}_y = \overline{0}$.

Suuntasopimus: $N - G_y = 0$

eli $N = G_y = mg\mathit{cos}\alpha$.

Liikeyhtälö pinnan suunnassa:

$\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$ | $\overline{a} = \overline{0}$

Suuntasopimus:

$G_x - F_\mu = 0$ | $G_x = mg\,sin\alpha$

$F_\mu = G_x = mg\,sin\alpha$
$= 0{,}275\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot sin21^{o}$
$\approx 0{,}97\ \text{kgm/s}^2 \approx 0{,}97\ \text{N}.$

b) Kitkakerroin:

$\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$ eli suuntasopimuksen mukaan

$G_x - F_\mu = 0 \mid G_x = mg\,sin\alpha,\ F_\mu = \mu N$

$mg\,sin\alpha - \mu N = 0 \mid N = mg\cos\alpha$

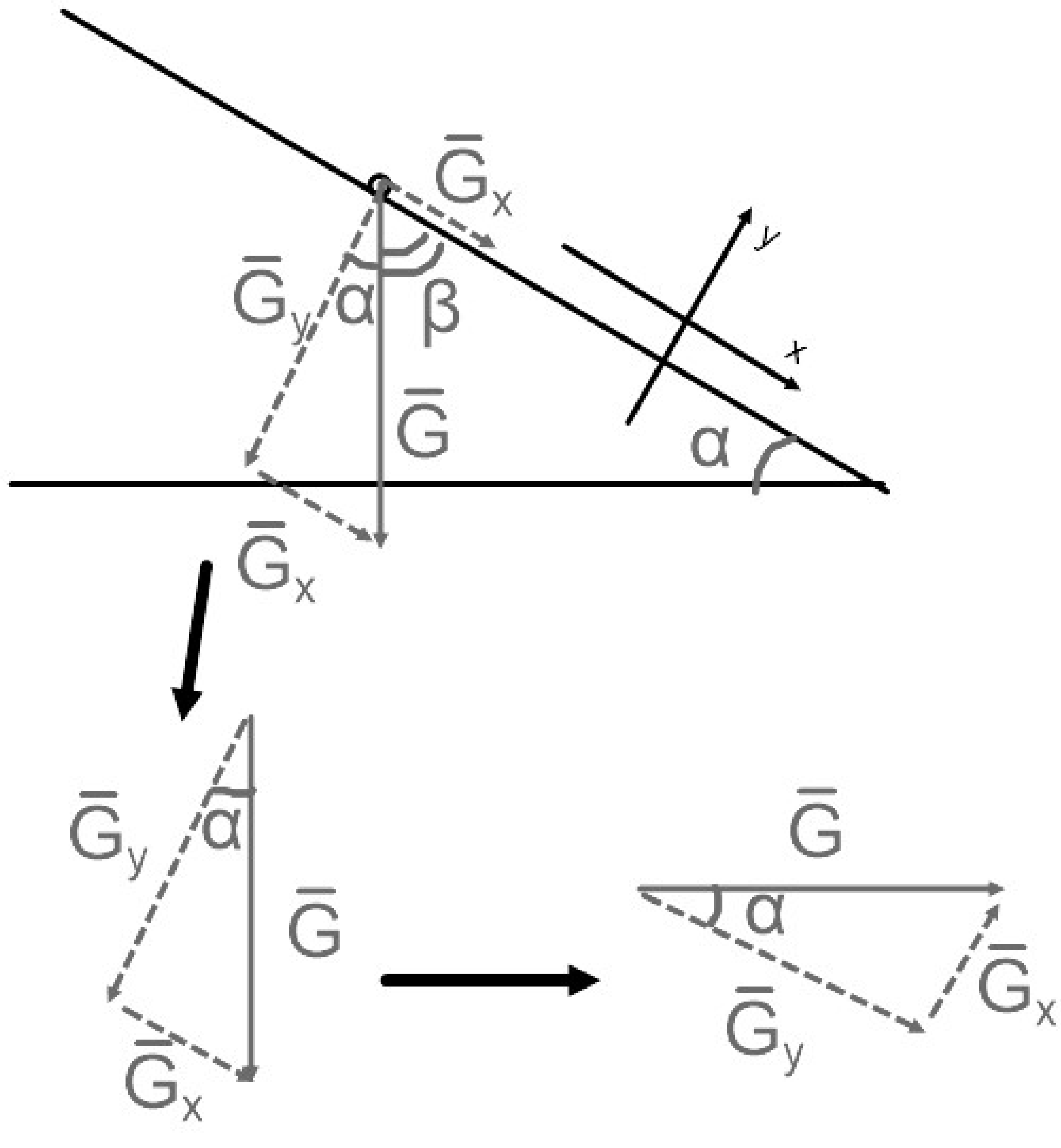
$\cancel{m}\cancel{g}\sin\alpha - \mu \cancel{m}\cancel{g}\,cos\alpha = 0 \mid :mg$

$sin\alpha - \mu\,cos\alpha = 0$

$\mu\,cos\alpha = sin\alpha \mid :\ cos\alpha$

$$\mu = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tan\alpha = tan21^\circ \approx 0{,}38.$$

# Painovoiman komponentit kaltevalla tasolla



$$\sin \alpha = \frac{G_x}{G} \quad \text{eli} \quad \boxed{G_x = G\sin \alpha = mg\sin \alpha}$$

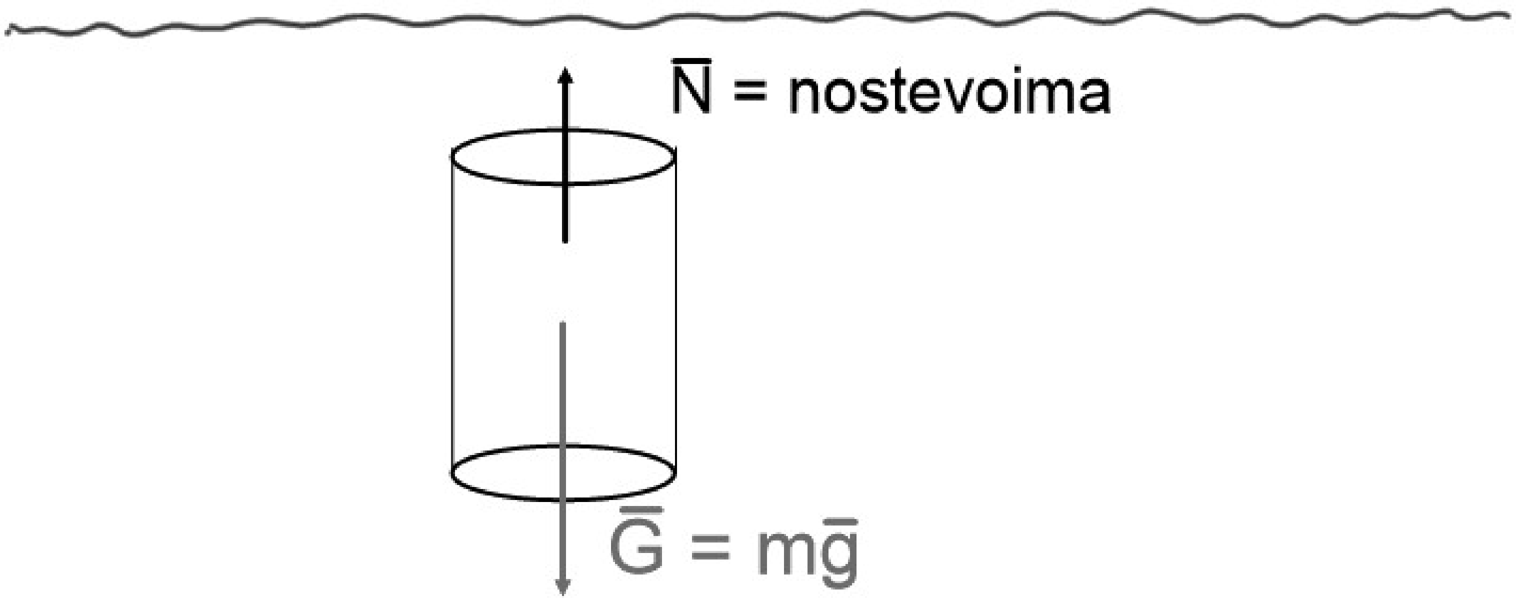
$$\cos \alpha = \frac{G_y}{G} \quad \text{eli} \quad \boxed{G_y = G\cos \alpha = mg\cos \alpha}$$

Komponentti $G_x$ kiihdyttää pinnan suunnassa.

Komponentti $G_y$ on oltava tasapainossa tukivoiman kanssa ja se vaikuttaa kitkavoiman suuruuteen.

# 9 Noste ja väliaineen vastus

IDEA: Nesteeseen upotettu kappale kevenee.

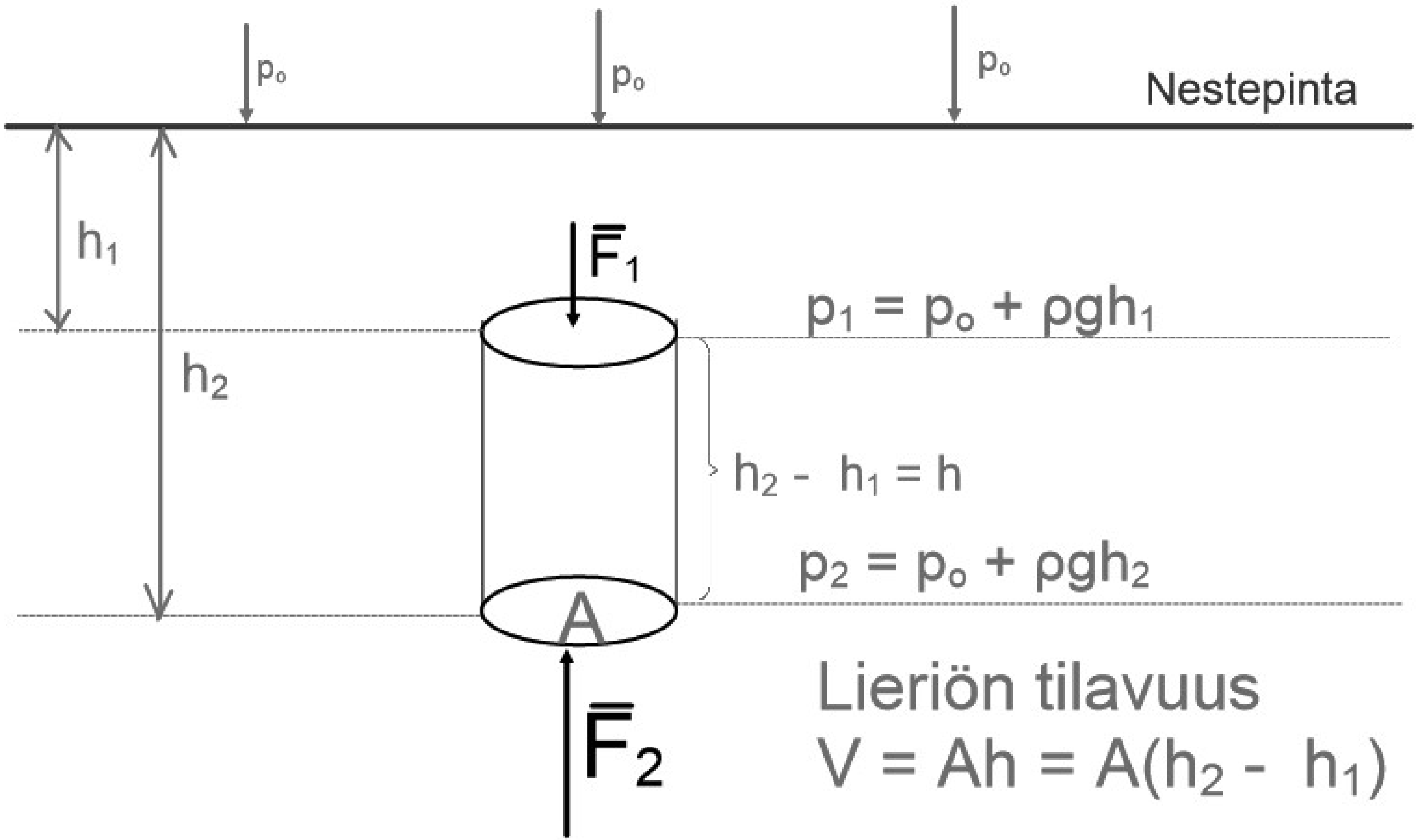


Nesteeseen tai kaasuun upotettuun kappaleeseen kohdistuu nostevoima

$N = \rho g V$ MAOL s. 127

$N$ = nostevoima, $[N] = 1N$
$\rho$ = ympäröivän väliaineen tiheys, $[\rho] = 1\ kg/m^3$
$g$ = putoamiskiihtyvyys = $9{,}81 m/s^2$
$V$ = kappaleen tilavuus, $[V] = 1m^3$

# MIKSI?



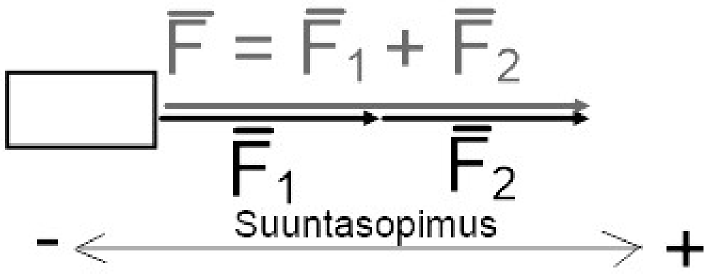
$p_o$
$p_o$
$p_o$
Nestepinta
$h_1$
$h_2$
$\bar{F}_1$
$p_1 = p_o + \rho g h_1$
$h_2 - h_1 = h$
$p_2 = p_o + \rho g h_2$
A
$\bar{F}_2$
Lieriön tilavuus
$V = Ah = A(h_2 - h_1)$

Nostevoima aiheutuu hydrostaattisen paineen erosta:

$$
\begin{aligned}
N &= F_2 - F_1 = p_2A - p_1A \\
&= (p_o + \rho g h_2)A - (p_o + \rho g h_1)A \\
&= \cancel{p_o}A + \rho g h_2 A - \cancel{p_o}A - \rho g h_1 A \\
&= \rho g h_2 A - \rho g h_1 A = \rho g A\underbrace{(h_2 - h_1)}_{h} \\
&= \rho g \underbrace{Ah}_{V} = \rho g V.
\end{aligned}
$$

# 10 Voimien yhteisvaikutus ja komponentit

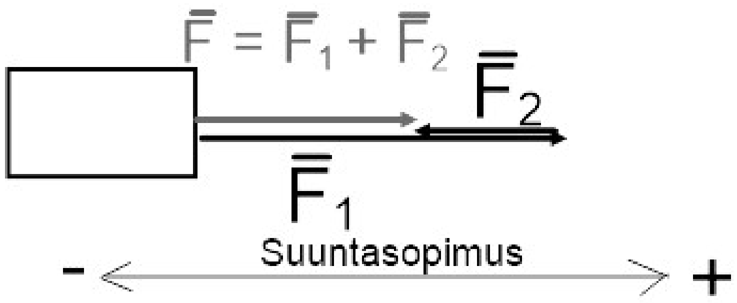
1. Voimat ovat samansuuntaisia




Voiman suuruus:

$F = F_1 + F_2$

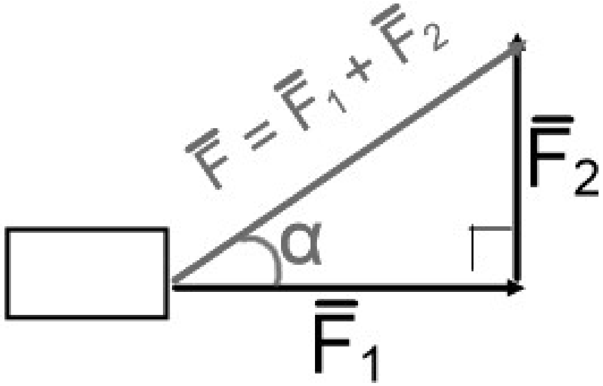
2. Voimat ovat vastakkaissuuntaisia




Voiman suuruus:

$F = F_1 - F_2$

# 3. Voimat ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden




Voiman suuruus:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

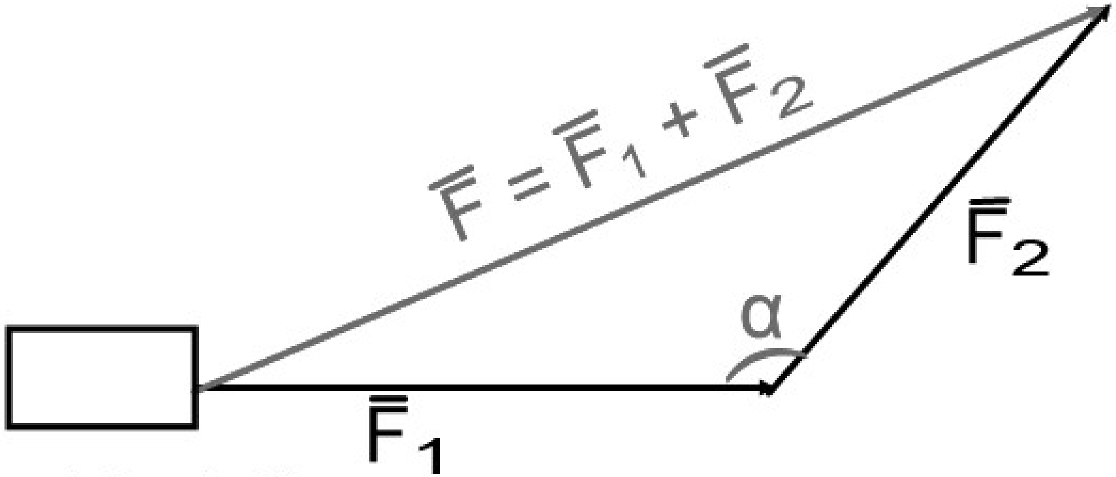
(Pythagoraan lause)

Suuntakulma:

$$\tan \alpha = \frac{F_2}{F_1}$$

Muista suuntakulma!

# 4. Vinojen voimien kokonaisvaikutus



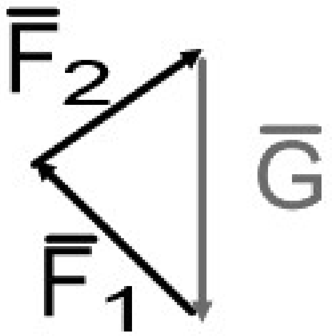

Kosinilause:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Usein tällainen tehtävä ratkaistaan jakamalla voima $\overline{F}_2$ vaakasuoraan ja pystysuoraan komponenttiin.
Ks. kosinilause MAOL s. 25

## **Tasapaino** (= ETENEVÄN LIIKKEEN TASAPAINO)

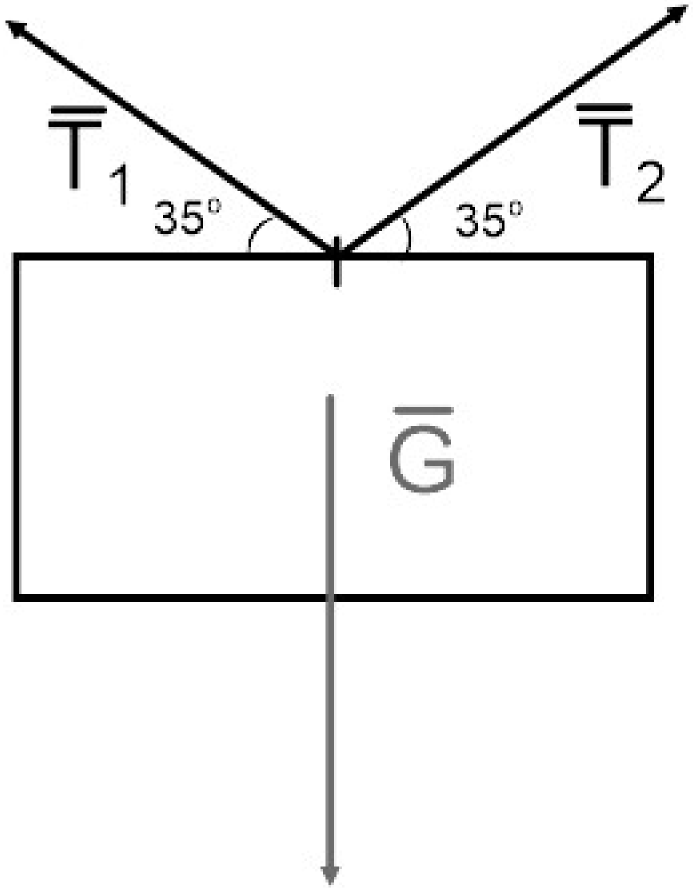
Kappale on tasapainossa etenevän liikkeen suhteen kun sen kiihtyvyys on nolla eli $\overline{a} = \overline{0}$, jolloin Newtonin II lain mukaan $\Sigma\overline{F} = \overline{0}$.

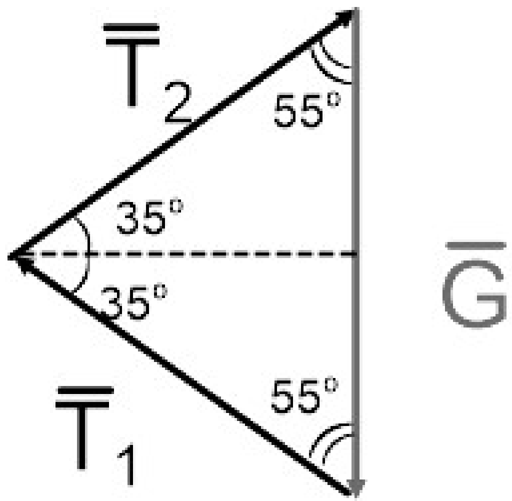



$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} = \overline{0}$$

Voimat voidaan usein koota sulkeutuvaksi monikulmioksi, esimerkiksi kolmioksi.

# ESIMERKKI 3 Taulun ripustus



Symmetria: $|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| = T.$

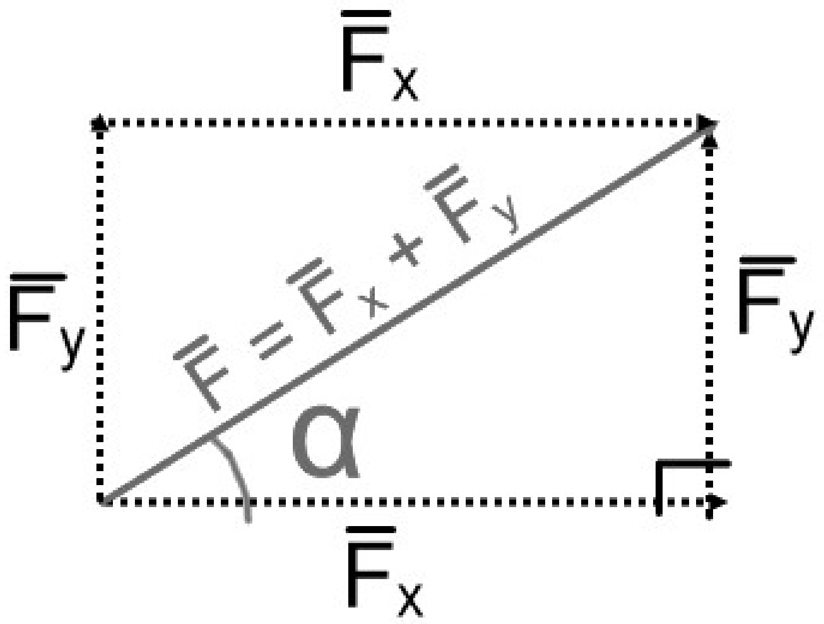
Sinilause: $$\frac{T}{\sin 55^o} = \frac{G}{\sin 70^o}$$

Ratkaistaan jännitysvoima (G = mg):

$$T = \frac{G \sin 55^o}{\sin 70^o} = \frac{mg \sin 55^o}{\sin 70^o}$$

$$\frac{15\,kg \cdot 9{,}81\,m/s^2 \sin 55^o}{\sin 70^o} \approx 130\,N.$$

# Voiman jakaminen komponentteihin



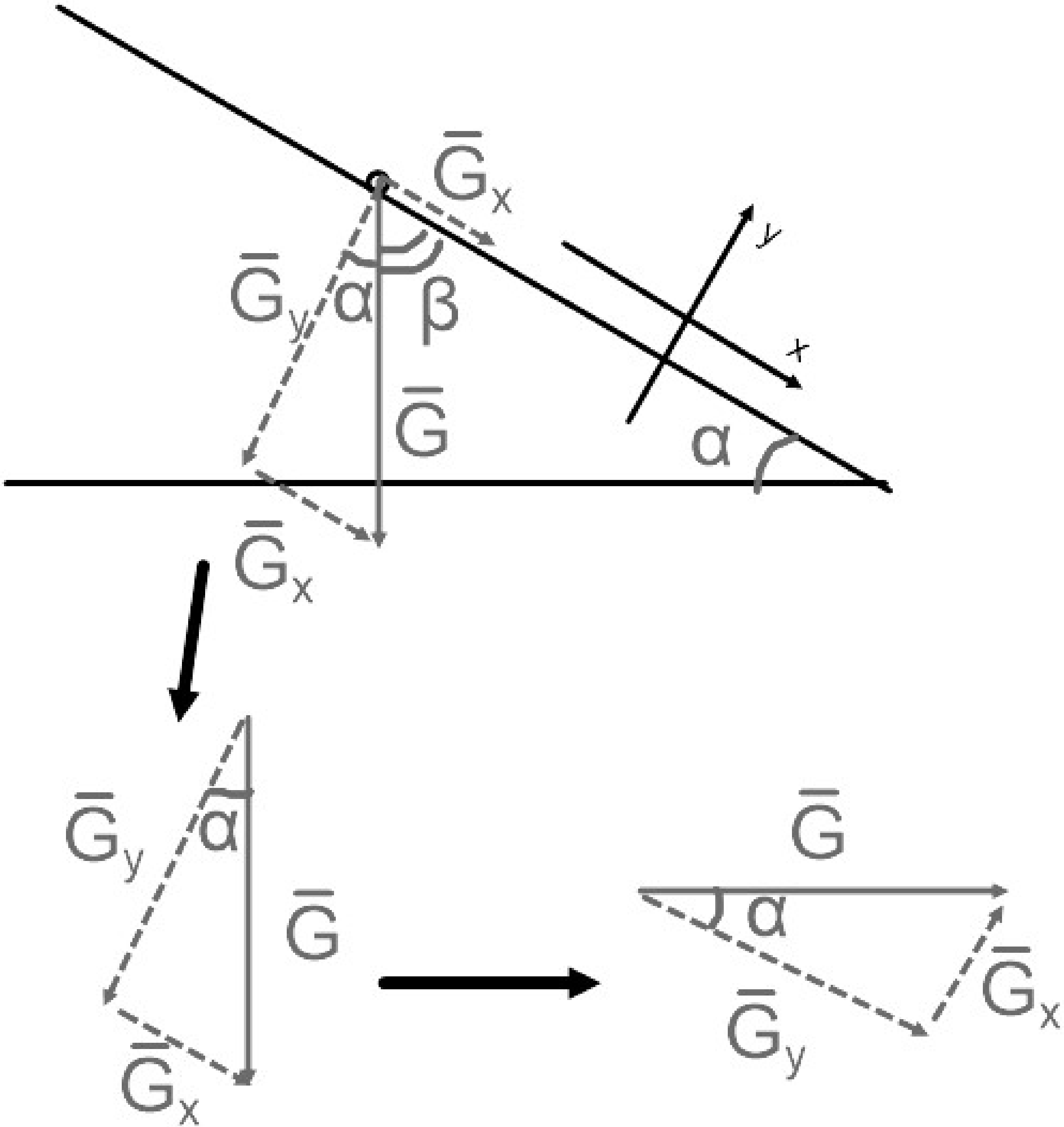

$$cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$

$$sin\alpha = \frac{F_y}{F}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} F_x = F cos\alpha \\ F_y = F sin\alpha \end{array}}$$

*Suuntakulma:* $tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}$

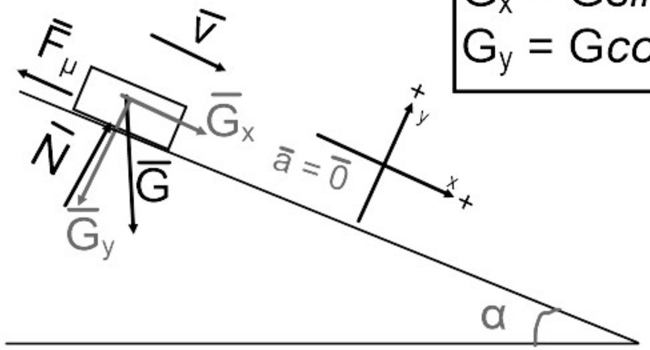
# Painovoiman komponentit kaltevalla tasolla



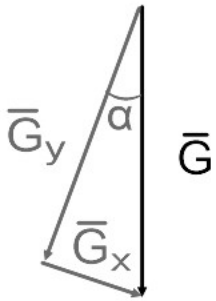

$$\sin\alpha = \frac{G_x}{G}$$

$$\cos\alpha = \frac{G_y}{G}$$

# ESIMERKKI 6 Liukuminen kaltevalla tasolla




$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$
$G_y = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$




Painovoiman komponentit kaltevalla tasolla:

$G_x = G\sin\alpha = mg\sin\alpha$
$G_y = G\cos\alpha = mg\cos\alpha$

a) Liikeyhtälö pinnan normaalin suunnassa: $\overline{N} + \overline{G}_y = \overline{0}$.

Suuntasopimus: $N - G_y = 0$
eli $N = G_y = mg\cos\alpha$.

Liikeyhtälö pinnan suunnassa:

$\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0} \mid \overline{a} = \overline{0}$

Suuntasopimus:

$G_x - F_\mu = 0 \mid G_x = mg\,sin\alpha$

$$F_\mu = G_x = mg\,sin\alpha$$
$$= 0{,}275 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot sin21^o$$
$$\approx 0{,}97 \text{ kgm/s}^2 \quad \approx 0{,}97 \text{ N.}$$

b) Kitkakerroin:

$\overline{G}_x + \overline{F}_\mu = \overline{0}$ eli suuntasopimuksen mukaan

$G_x - F_\mu = 0 \mid G_x = mg\sin\alpha,\ F_\mu = \mu N$

$mg\sin\alpha - \mu N = 0 \mid N = mg\cos\alpha$

$\cancel{m}\cancel{g}\sin\alpha - \mu \cancel{m}\cancel{g}\cos\alpha = 0 \mid :mg$

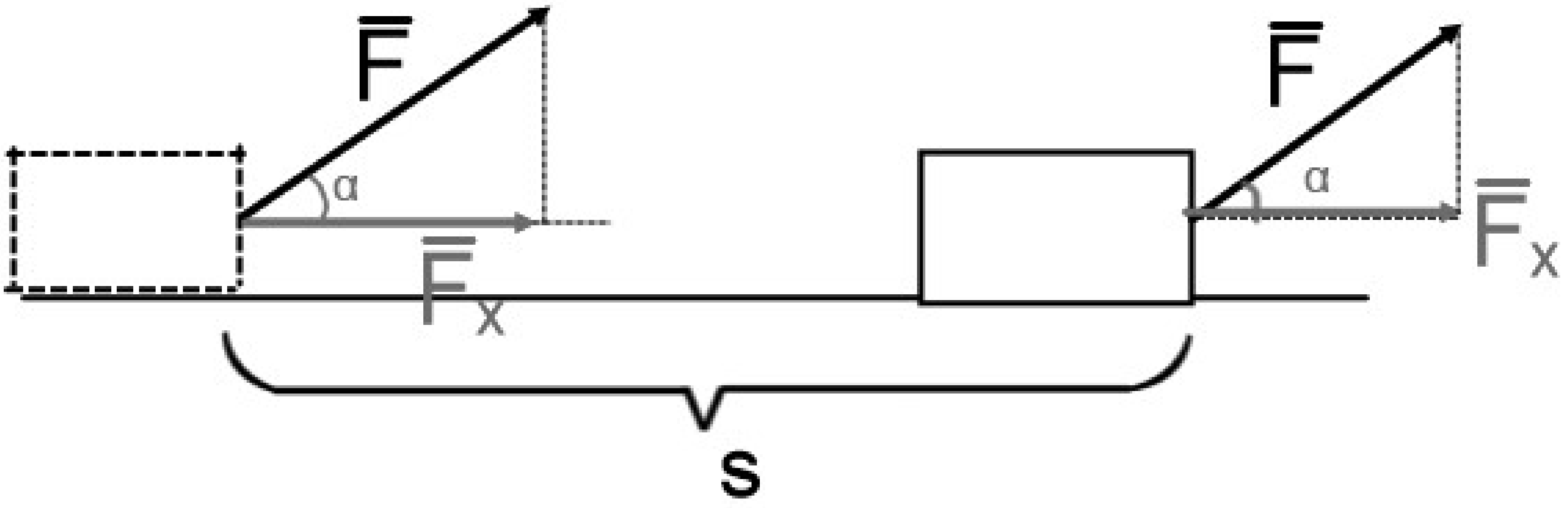
$\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0$

$\mu\cos\alpha = \sin\alpha \mid : \cos\alpha$

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 21^\circ \approx 0{,}38.$$

# 11 Fysiikassa voima tekee työtä

Voiman tekemä  työ



Työ = Voima × Siirtymä

Voiman on oltava siirtymän suuntainen.

$$W = F_x \cdot s = F\cos\alpha \cdot s$$

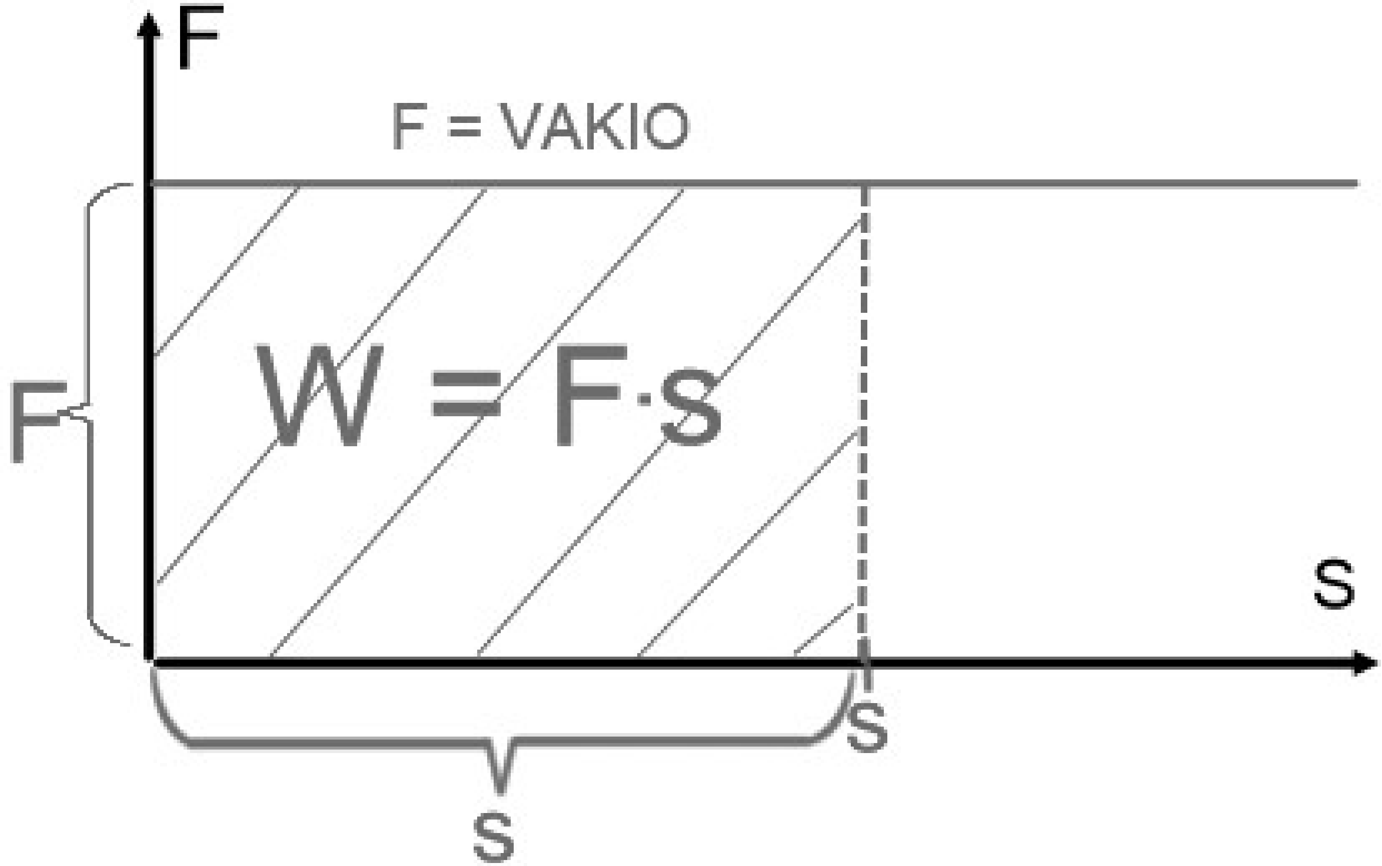
Työn yksikkö:

$$[W] = [F_x]\cdot[s] = 1\ \mathrm{N}\cdot 1\ \mathrm{m} = 1\,\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^2}\cdot 1\ \mathrm{m}$$

$$= 1\,\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\ \mathrm{J}\ (\text{joule})$$

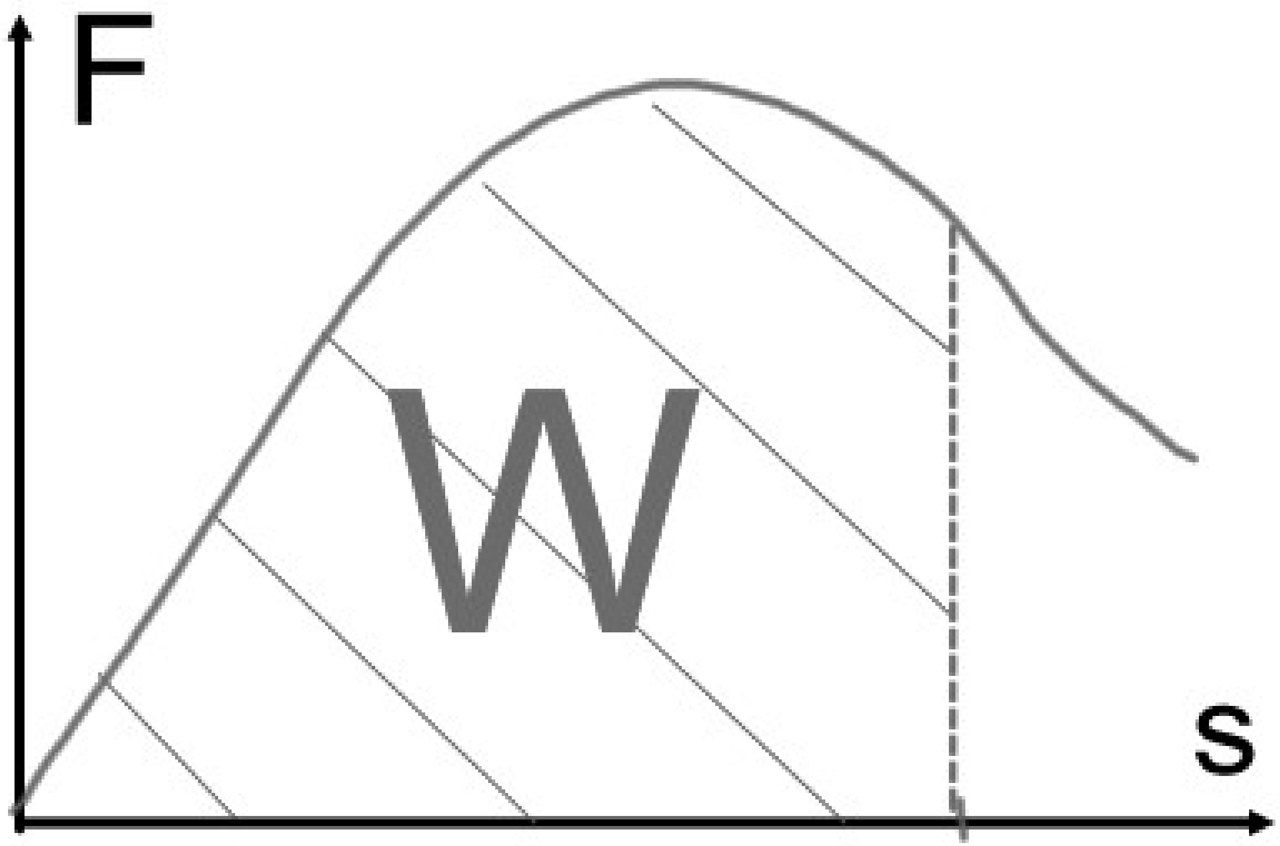
# Työn graafinen määrittäminen

Vakiovoiman tekemä työ:



# Muuttuvan voiman tekemä työ:

Pinta-alatulkinta:



**Teho**

$$\text{Teho} = \frac{\text{Tehty työ}}{\text{Käytetty aika}} \quad \text{eli kaavana} \quad \boxed{P = \frac{W}{t}}$$

Tehon yksikkö:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}} = 1\ \text{W (watti)}$$

Toisaalta

$$[P] = 1\ \text{W} = \frac{1\ \text{J}}{1\ \text{s}} = \frac{1\ \text{kgm}^2/\text{s}^2}{1\ \text{s}} = 1\ \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}$$

# Voiman teho

Voiman keskimääräinen teho

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot \underbrace{\frac{s}{t}}_{v} = F \cdot v.$$

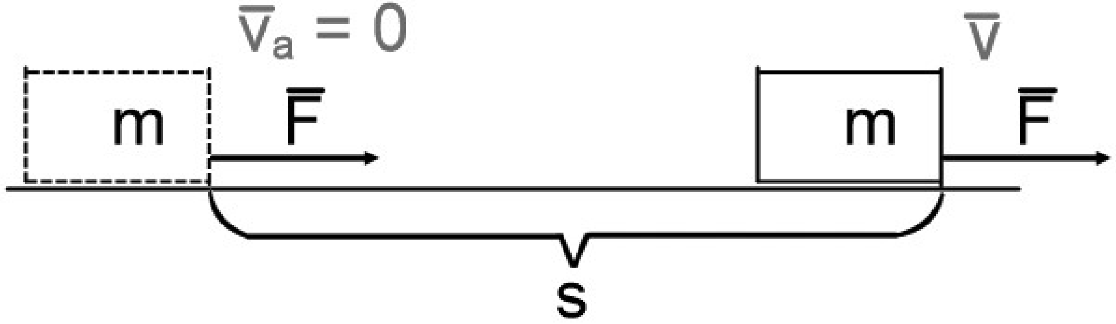
Voima F voi olla esim. liikevastuksien voittamiseen tarvittava ulkoinen voima.

# 12 Kokonaisvoiman tekemä työ muuntaa kappaleen liike-energiaa

(Aik. Kineettinen energia $E_k$ engl. Kinetic Energy )

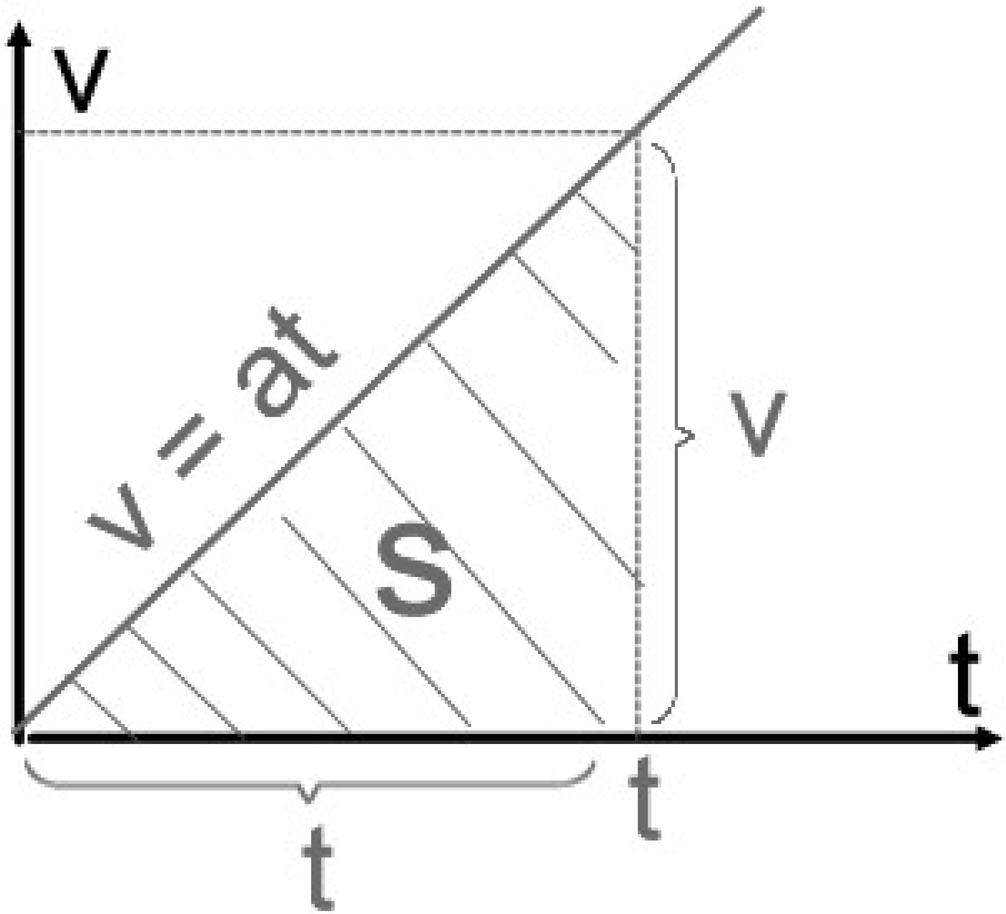
-riippuu kappaleen NOPEUDESTA

Kiihdytystyö:




Kappale, jonka massa = m, kiihdytetään levosta loppunopeuteen $\overline{v}$. Kiihdyttävä vakiovoima = $\overline{F}$ ja kiihdytysmatka = s.

# Siis: Tasaisesti kiihtyvä liike!




$$F = ma$$

$$a = \frac{v}{t}$$

$$s = \frac{t \cdot v}{2} = \tfrac{1}{2}vt$$

Kiihdytystyö muuttuu liike-energiaksi:

$$E_k = W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s = m \cdot \frac{v}{\cancel{t}} \cdot \frac{1}{2} \cdot v\cancel{t}$$

$$= m \cdot v \cdot \frac{1}{2} \cdot v = \frac{1}{2} m \cdot \underbrace{v \cdot v}_{= v^2} = \frac{1}{2} m v^2$$

Siis $\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$

MAOL s. 125

Huomaa: $v^2$ -riippuvuus on hyvin voimakas...

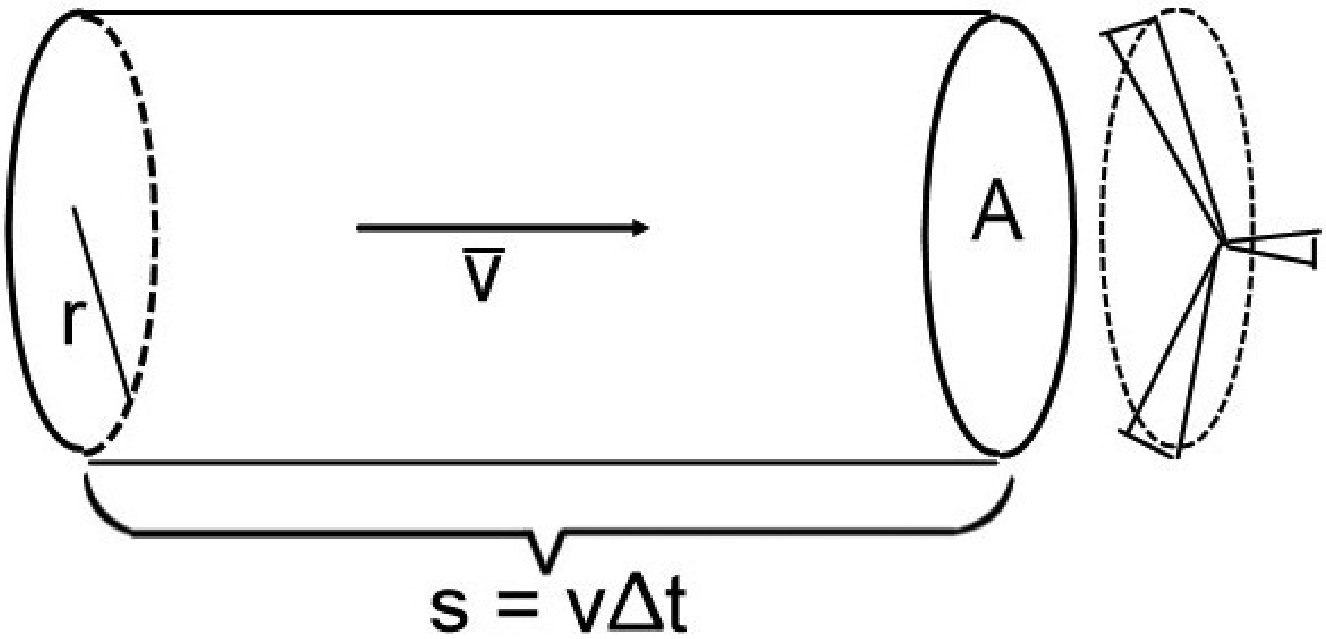
Liike-energian yksikkö:

$$[E_k] = [m][v^2] = 1\ \mathrm{kg} \cdot \left(1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 1\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2} = 1\ \mathrm{J}$$

Muunna nopeus SI-yksikköön!

# Tuulivoimalan teho

IDEA: Ilmamassan liike-energia muuttuu osittain sähköenergiaksi.




$A = \pi r^2$

$V = As = \pi r^2 s$

Ilmapatsaan massa

$m = \rho V = \rho As = \rho\pi r^2 s = \rho\pi r^2 v\Delta t$

$\rho$ = ilman tiheys

## Sähköteho

$$m = \rho\pi r^2 v\Delta t$$

$$P = \eta\frac{E_k}{\Delta t} = \frac{\eta\tfrac{1}{2}mv^2}{\Delta t} = \frac{\tfrac{1}{2}\eta\boxed{\rho\pi r^2 v\cancel{\Delta t}}\cdot v^2}{\cancel{\Delta t}} = \underline{\tfrac{1}{2}\eta\rho\pi r^2 v^3}$$

$\eta$ = hyötysuhde = 0,30 (aika pieni, miksi...?)

$\rho$ = ilman tiheys 1,29 kg/m$^3$

r = roottorin siiven pituus

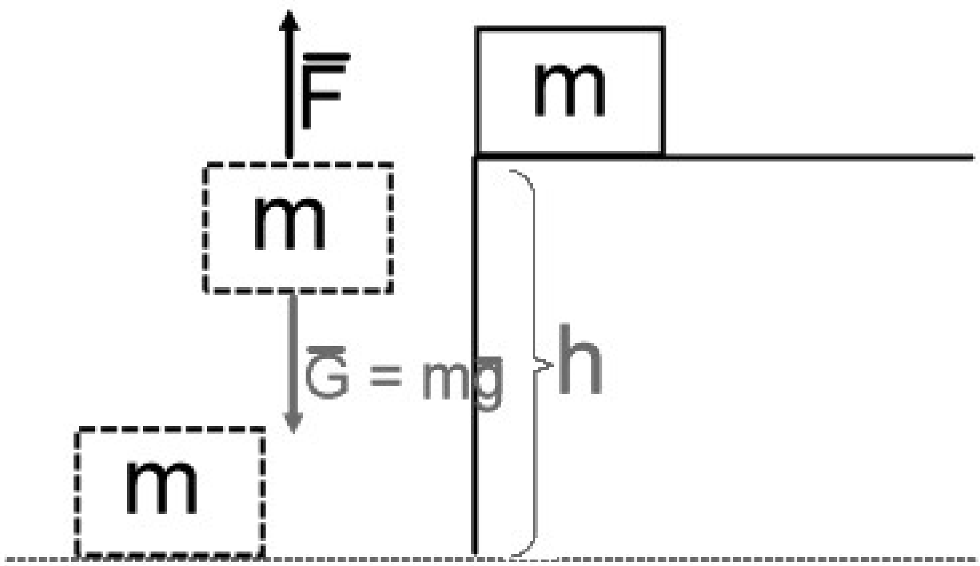
v = tuulen nopeus,  [v] = 1m/s

Teho kasvaa rajusti tuulen nopeuden kasvaessa!

# 13 Potentiaalienergia gravitaatiovuorovaikutuksessa

- riippuu kappaleen PAIKASTA

Nostotyö:



Tehty työ muuttuu potentiaalienergiaksi:

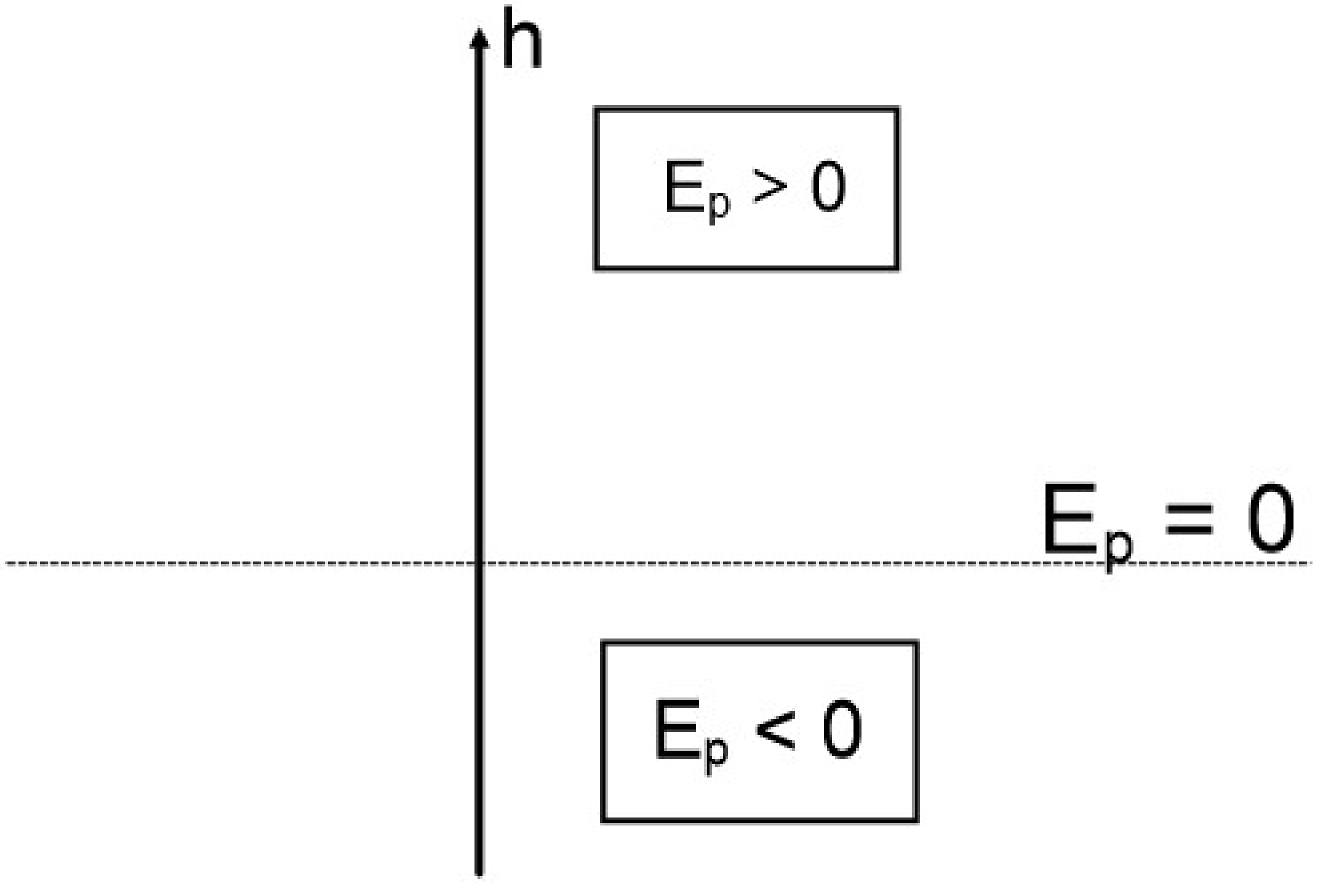
$E_p = W = F \cdot s = mgh.$

Siis $E_p = mgh.$ MAOL s. 125

Potentiaalienergian yksikkö:

$$E_p = [m][g][h] = 1\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m/s}^2 \cdot 1\ \text{m} = 1\ \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 1\ \text{J}$$

# Potentiaalienergian nollataso voidaan valita:



**Vesivoimalan teho** (Sovellus)
Periaate:
Vesimassojen potentiaalienergia muuttuu osittain sähköenergiaksi. Sähköteho

$$P = \underset{\text{Hyötysuhde}}{\eta}\frac{E_p}{t} = \eta\frac{mgh}{t} \quad |m = \rho V$$

$$= \eta\frac{\rho Vgh}{t} = \eta\rho gh\frac{V}{t}$$

Siis $\boxed{P = \eta\rho gh\frac{V}{t}}$

$P$ = sähköteho, $[P] = 1\ W = 1\ kgm^2/s^3$

$\eta$ = hyötysuhde = 0,90

$\rho$ = veden tiheys = $1000\ kg/m^3$

$g$ = putoamiskiihtyvyys = $9{,}81\ m/s^2$

$h$ = pudotuskorkeus, $[h] = 1\ m$

$V/t$ = virtaama eli tilavuusvirta, $[\ V/t\ ] = 1\ m^3/s$

# Konservatiivinen voima

voima, jonka avulla voidaan varastoida energiaa
konservatiivisen voiman tekemä työ on tiestä eli siirtymäreitistä riippumaton
suljetulla reitillä (alkupiste = päätepiste) tehty työ on nolla
konservatiiviseen voimaan liittyvä potentiaalienergian muutos on yhtä suuri mutta vastakkaismerkkinen kuin tietyssä siirrossa tämän voiman tekemä työ

# 14 Mekaanisen energian säilymislaki ja mekaniikan energiaperiaate

Oletus:

Liikettä vastustavat voimat ovat hyvin pieniä.
Silloin mekaaninen energia säilyy eli

$$\boxed{E_p + E_k = \text{VAKIO}}$$

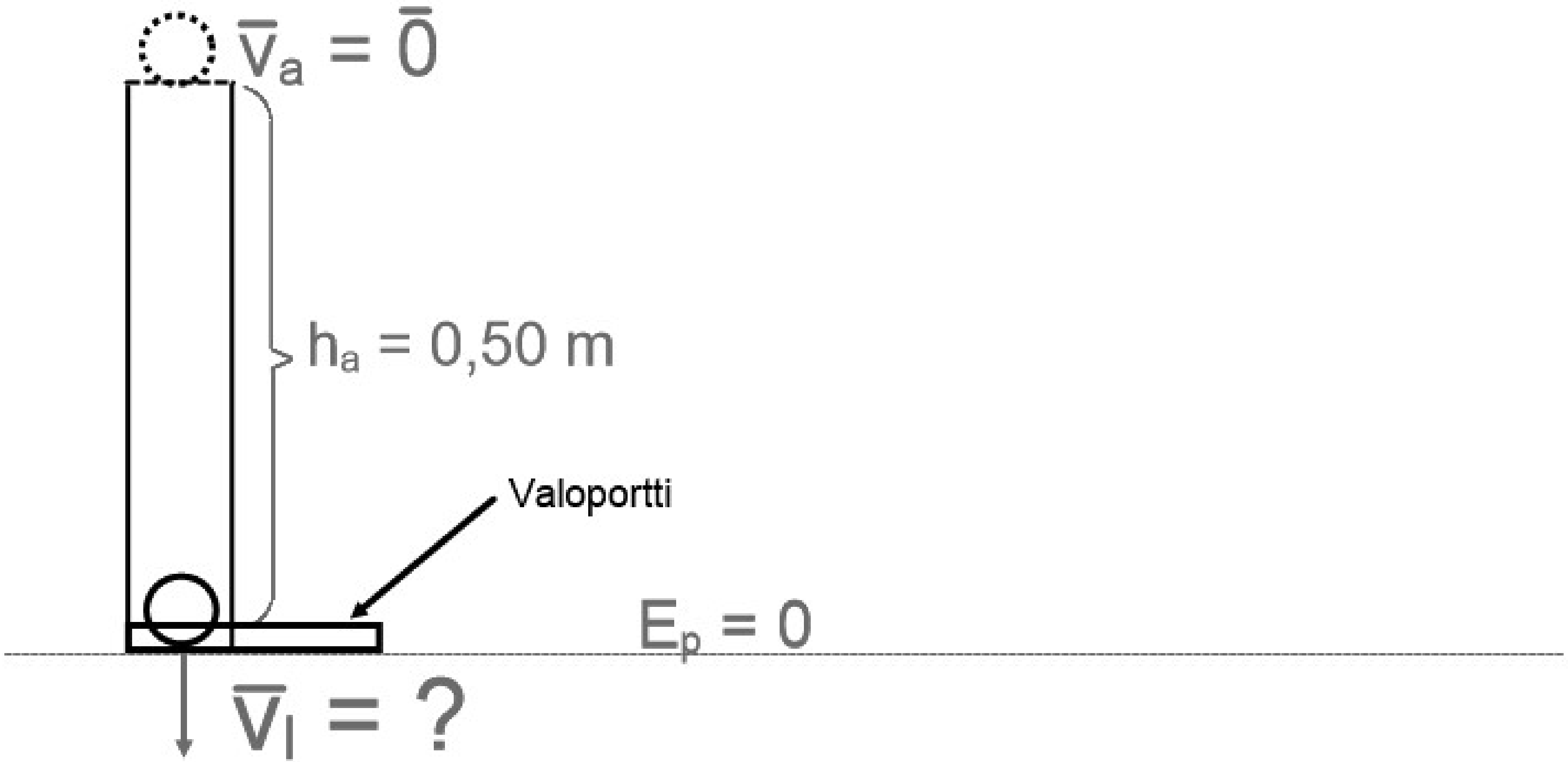
Mekaanisen energian määrä tarkastelun alussa ja lopussa on aina yhtä suuri:

$$E_{p,a} + E_{k,a} = E_{p,l} + E_{k,l}$$

Yhtälö yleensä yksinkertaistuu, sillä jokin energiatermeistä on tyypillisesti nolla mm. valitun potentiaalienergian nollatason vuoksi.

# Ongelma

Metallikuula (φ = 25,4mm) lähtee levosta ja putoaa 0,50 m alaspäin. Määritä kuulan loppunopeus.



## Ratkaisu 1: Mitataan se...

Valoportin ohitusaika $\Delta t = \dfrac{81{,}0\ \text{ms}}{10} = 8{,}10\ \text{ms}$

$= \underline{8{,}10 \cdot 10^{-3}\ \text{s}}.$

$\varphi = 25{,}4\ \text{mm} = 25{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$

$v = \dfrac{\varphi}{\Delta t} = \dfrac{25{,}4 \cdot \cancel{10^{-3}}\ \text{m}}{8{,}10 \cdot \cancel{10^{-3}}\ \text{s.}} \approx 3{,}135\ldots\ \text{m/s} \approx \underline{3{,}1\ \text{m/s}}.$

Ratkaisu 2: Energian säilymislaki

$$E_{p,a} + \underbrace{\cancel{E_{k,a}}}_{v_a = 0} = \underbrace{\cancel{E_{p,l}}}_{= 0} + E_{k,l} \quad \text{eli} \quad E_{p,a} = E_{k,l}$$

$$mgh_a = ½\, mv_l^2 \quad |\cdot 2 \qquad \cancel{m}v_l^2 = 2\cancel{m}gh_a \;|:m$$

$$v_l^2 = \frac{2\cancel{m}gh_a}{\cancel{m}} = 2gh_a \;|\, \sqrt{}$$

$$v_l = \sqrt{2gh_a} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}50\ \text{m}} \approx 3{,}13\text{m/s}$$

$$\approx \underline{3{,}1\text{m/s.}}$$

Ratkaisu 3: Kyseessä on levosta lähtevä TASAISESTI KIIHTYVÄ LIIKE eli $v(t = 0) = 0$.

Kaavat: $v = gt$ ja $h = \frac{1}{2}gt^2$. Ensimmäisen kaavan mukaan $t = v/g$. Sijoitetaan jälkimmäiseen yhtälöön:

$h = \frac{1}{2}g(v/g)^2$ eli $h = \dfrac{v^2}{2g}$ eli

$v^2 = 2gh \quad |\sqrt{}$

$v = \sqrt{2gh} = \ldots = 3{,}13 \text{m/s}.$

# Mekaniikan energiaperiaate

IDEA: Vuorovaikutus ympäristöön otetaan huomioon **fysikaalisena työnä.**
Mekaniikan energiaperiaate:

$$E_{p,a} + E_{k,a} + W = E_{p,l} + E_{k,l}$$

$W > 0$, kun tehty työ LISÄÄ systeemin mekaanista energiaa.
$W < 0$, kun systeemin mekaaninen energia PIENENEE esim. kitkavoiman tekemän työn vuoksi.

# Usein työ esitetään keskimääräisen voiman $F_k$ avulla:

$$\boxed{W = F_k \cdot s}$$

Etu: VAKIOVOIMA on aina helppo käsitellä.

Toisaalta tällainen menetelmä soveltuu huonosti ajan suhteen muuttuvan liikevastusvoiman (esim. ilman vastuksen) kuvaamiseen.

# ESIMERKKI 3 s.152: Auto ”rullaa”

Auto "rullaa"...


$v_a$ = 35km/h, $v_l$ = 15 km/h,
s = 150 m, m = 1500 kg

a) Liike-energia rullauksen alussa:

$$E_{k,a} = \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} \cdot 1400\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{35}{3,6}\right)^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$= 66165,1\,\mathrm{J} \approx 66\,\mathrm{kJ}.$$

Liike-energia lopussa:

$$E_{k,l} = \frac{1}{2} m v_l^2 = \frac{1}{2} \cdot 1400\,\mathrm{kg} \cdot \left(\frac{15}{3,6}\right)^2 \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

$$= 12152,8\,\mathrm{J} \approx 12\,\mathrm{kJ}.$$

b) Mekaniikan energiaperiaate:

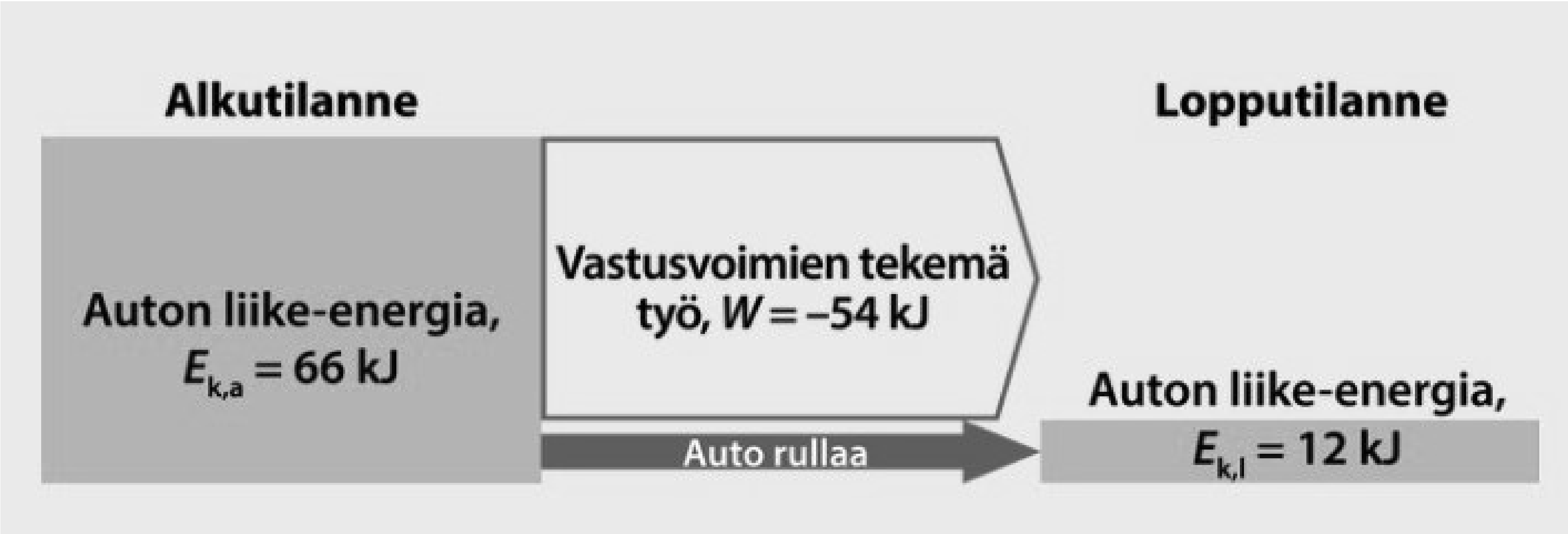
$$E_{k,a}+E_{p,a}+W=E_{k,l}+E_{p,l}.$$

Vaakasuoralla pinnalla potentiaalienergian termit voidaan normittaa nolliksi, joten

$E_{k,a}+0+W=E_{k,l}+0,$ josta saadaan työksi

$$W=E_{k,l}-E_{k,a}=12152{,}8\,\mathrm{J}-66165{,}1\,\mathrm{J}$$
$$=-54012{,}3\,\mathrm{J}\approx-54\,\mathrm{kJ}.$$

# c) Energiakaavio:



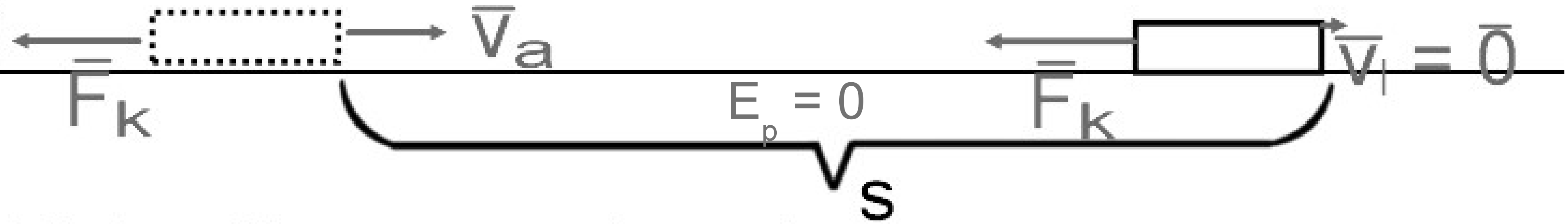
14.4

a) $E_k = \frac{1}{2}mv^2 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}17\,kg \cdot \left(\frac{85}{3{,}6}\right)^2 \frac{m^2}{s^2}$$

$$\approx 47{,}38\,\frac{kgm^2}{s^2} \approx 47\,J$$

b)




Mekaniikan energiaperiaate:

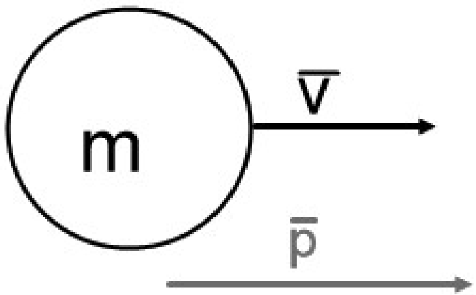
$$\underbrace{\cancel{E_{p,a}}}_{0} + E_{k,a} + W = \underbrace{\cancel{E_{p,l}}}_{0} + \underbrace{\cancel{E_{k,l}}}_{0}, \text{ ts.}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_a^2 - F_k \cdot s = 0$$

$$F_k = \frac{\tfrac{1}{2}mv_a^2}{s} = \frac{\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}170\,\mathrm{kg}\cdot(85/3{,}6)\,\frac{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}{\mathrm{s}^2}}{250\,\cancel{\mathrm{m}}}$$

$$\approx 0{,}189544\ \mathrm{N} \approx 0{,}19\ \mathrm{N}.$$

# 15 Impulssi ja liikemäärä




Kappaleen
LIIKEMÄÄRÄ

$$\boxed{\bar{p} = m\bar{v}}$$

Liikemäärän yksikkö:

$$[p] = [m][v] = 1\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{m/s} = 1\frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}}$$

# Impulssi

Voima aiheuttaa liiketilan muutoksen:

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = m\frac{(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)}{\Delta t} = \frac{m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1}{\Delta t}$$

$$= \frac{\bar{p}_2 - \bar{p}_1}{\Delta t} = \underline{\frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t}}$$

Siis $\boxed{\bar{F} = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t}}$

# Määritellään VOIMAN IMPULSSI

$\bar{I} = \bar{F}\Delta t$ (Vektorisuure)

Silloin $\bar{F} \cdot \Delta t = \underline{\Delta \bar{p} = \bar{I}}$

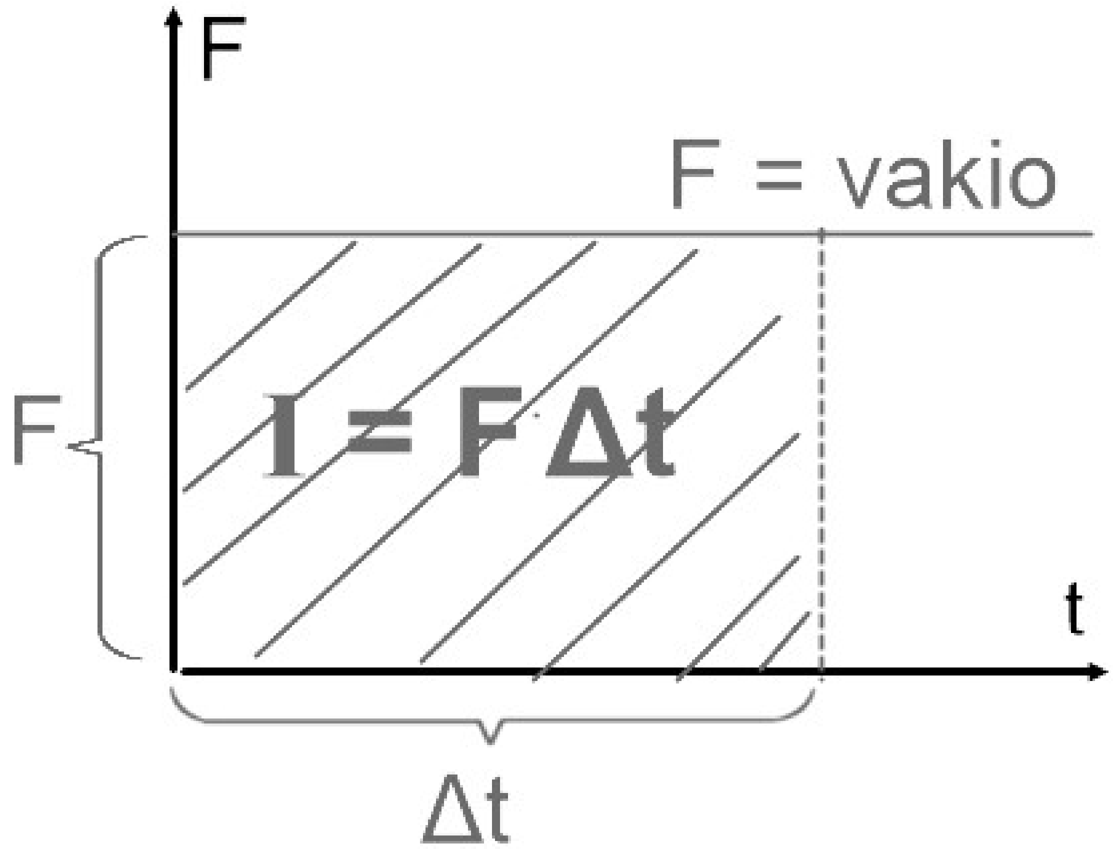
$$[I] = [F][\Delta t] = 1\ \mathrm{N} \cdot 1\ \mathrm{s} = 1\ \mathrm{Ns}$$

$$= 1\ \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\mathrm{s}} = 1\ \frac{\mathrm{kgm}}{\mathrm{s}} = [p]$$

Oleellista:

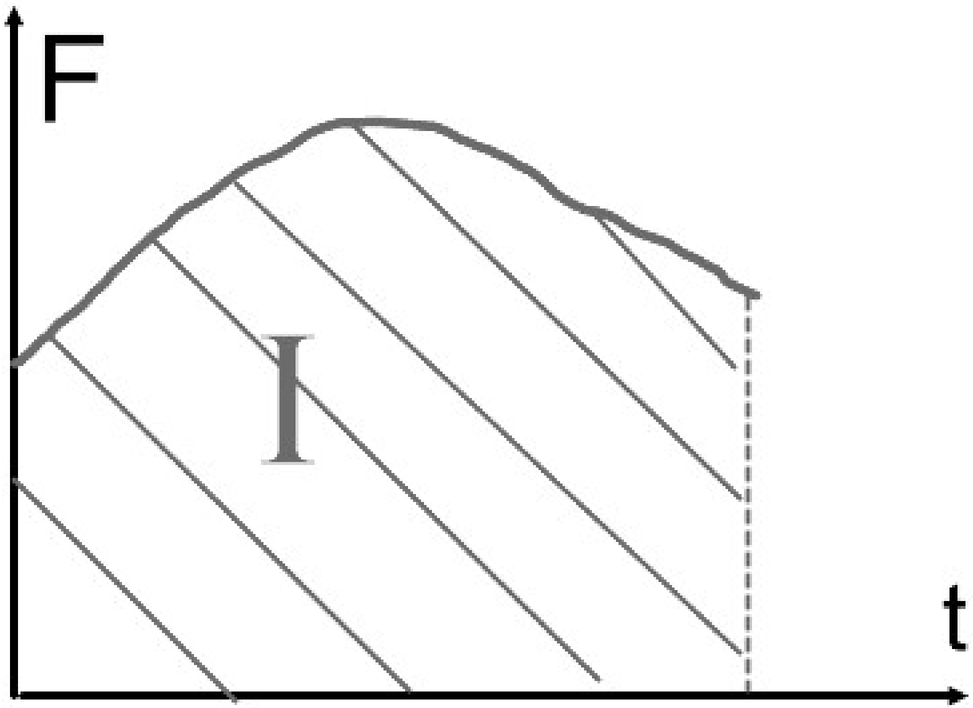
IMPULSSI = LIIKEMÄÄRÄN MUUTOS

# Vakiovoiman impulssi:



# Muuttuvan voiman impulssi

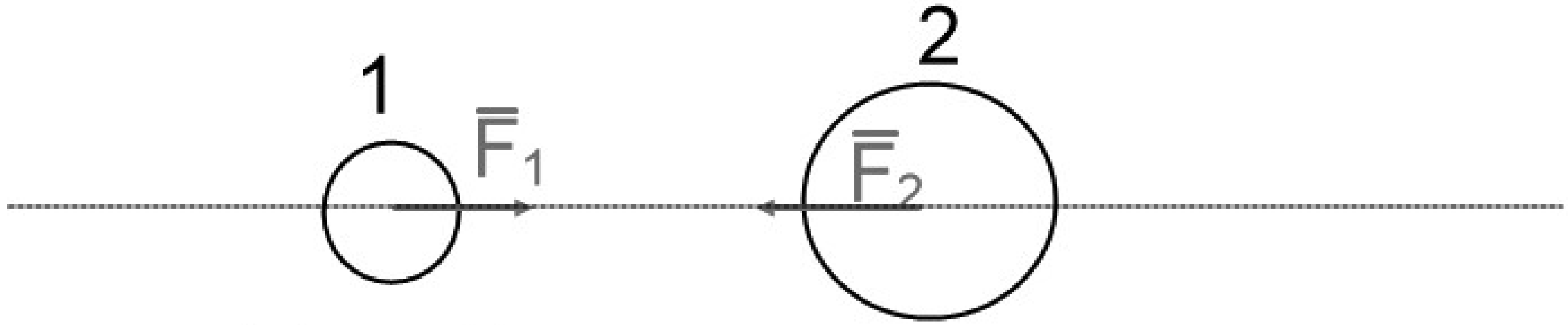
Pinta-alatulkinta:



# 16 Liikemäärän säilyminen

Eristetyn systeemin (= ei vuorovaikutusta ympäristön kanssa eli EI ULKOISIA VOIMIA) <u>kokonaisliikemäärä säilyy.</u>

Perustelu:



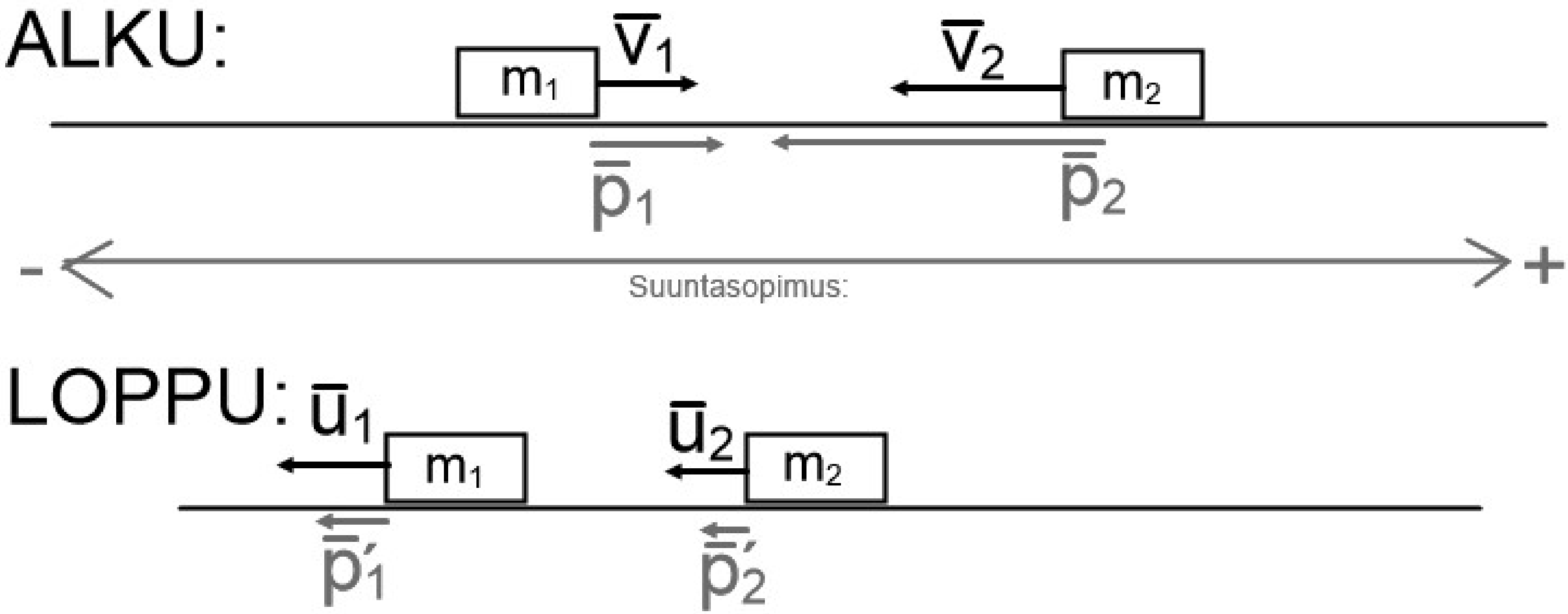

$$\text{NIII: } \overline{F}_2 = -\overline{F}_1 \;|\cdot \Delta t$$

$$\underbrace{\overline{F}_2 \cdot \Delta t}_{\overline{I}_2 = \Delta\overline{p}_2} = -\underbrace{\overline{F}_1 \cdot \Delta t}_{\overline{I}_1 = \Delta\overline{p}_1}$$

Kappaleiden väliset voimat eivät voi muuttaa systeemin kokonaisliikemäärää.

$\Delta\overline{p}_2 = -\,\Delta\overline{p}_1$ eli $\Delta\overline{p}_1 + \Delta\overline{p}_2 = \overline{0}$

# Liikemäärän säilymislaki kahden kappaleen vuorovaikutuksessa:



Liikemäärän säilymislaki vektorimuodossa:

$\Sigma\bar{p}_{alku} = \Sigma\bar{p}_{loppu}$ ,    ts. $\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$

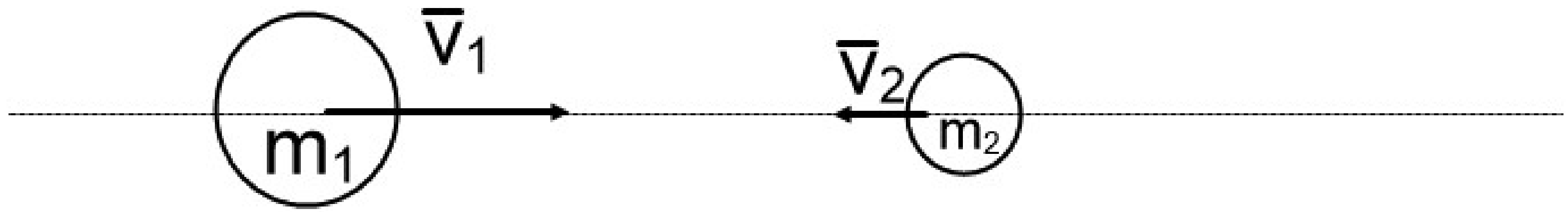
Skalaariyhtälössä on otettava huomioon suuntasopimus:

$p_1 - p_2 = - p_1' - p_2'$ , ts.

$m_1v_1 - m_2v_2 = - m_1u_1 - m_2u_2$

## Törmäykset

Suora ja keskeinen törmäys:




- kappaleet liikkuvat niiden painopisteiden kautta kulkevaa suoraa pitkin
- törmäyspiste on samalla suoralla

Systeemin KOKONAISLIIKEMÄÄRÄ säilyy törmäyksissä AINA.

Kokonaisliike-energia säilyy, jos törmäys ei johda pysyviin muodon-muutoksiin (törmäys on silloin täysin kimmoisa).

Törmäys voi olla täysin kimmoton, jolloin kappaleet tarttuvat toisiinsa kiinni. Tällöin syntyy pysyviä muodon-muutoksia ja liike-energia ei säily.

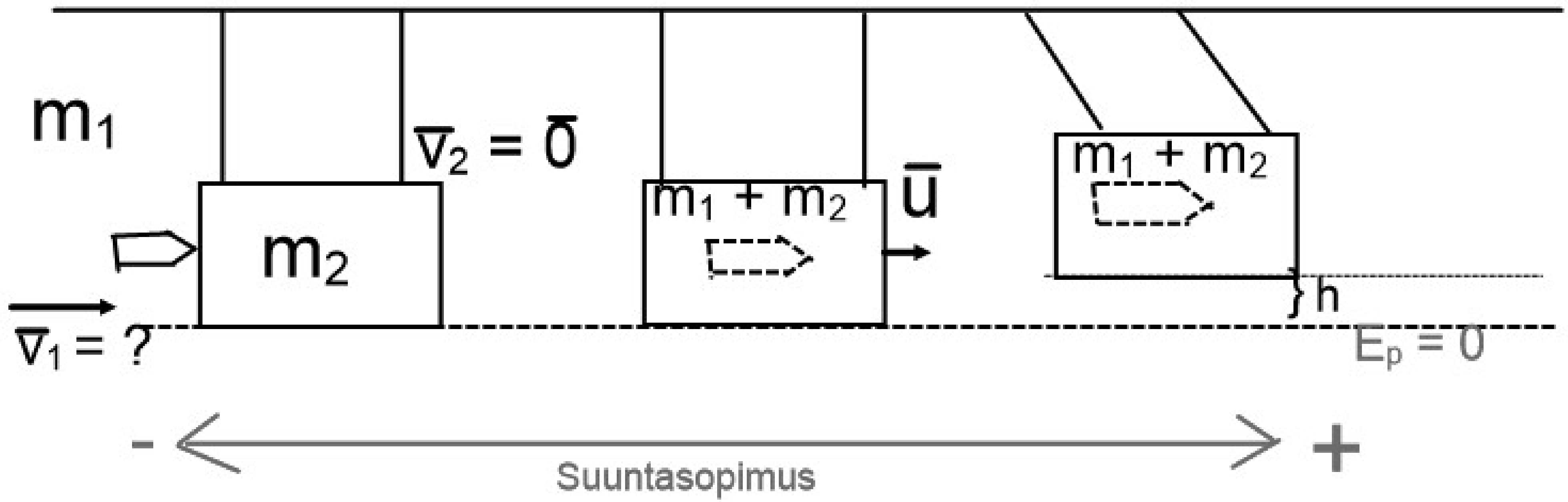
# ESIMERKKI
## Jääkiekko + maalivahti

$u = ?$


Liikemäärän säilymislaki + suuntasopimus:

$$m_1 v_1 + \cancel{m_2 \underbrace{v_2}_{=0}} = (m_1 + m_2)u \quad |:(m_1 + m_2)$$

# Tehtävä 16.12: Ballistinen heiluri



Liikemäärän säilymislaki:
$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u$, josta

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2)u}{m_1} \ .$$

Pölkyn ja luodin yhteinen liike-energia muuttuu potentiaalienergiaksi:

$$\tfrac{1}{2}\cancel{(m_1 + m_2)}u^2 = \cancel{(m_1 + m_2)}gh \quad |:(m_1 + m_2)| \cdot 2$$

$$u^2 = 2gh \quad \text{eli} \quad u = \sqrt{2gh}$$

Ratkaistaan luodin nopeus $v_1$:

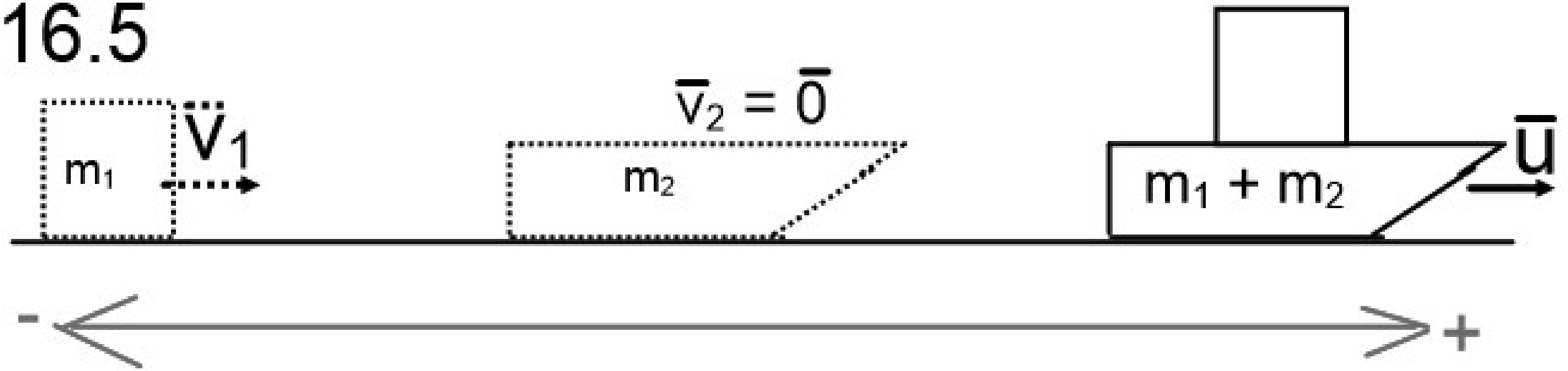
$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u \quad |u = \sqrt{2gh}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{m_1} \cdot \sqrt{2gh}$$

$$= \frac{0{,}010\text{kg} + 3{,}5\text{kg}}{0{,}010\text{kg}} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81\text{m/s}^2 \cdot 0{,}25\text{m}}$$

$$\approx 776{,}97\text{m/s} \approx \underline{780\text{m/s}}.$$

16.5




Liikemäärän säilymislaki:

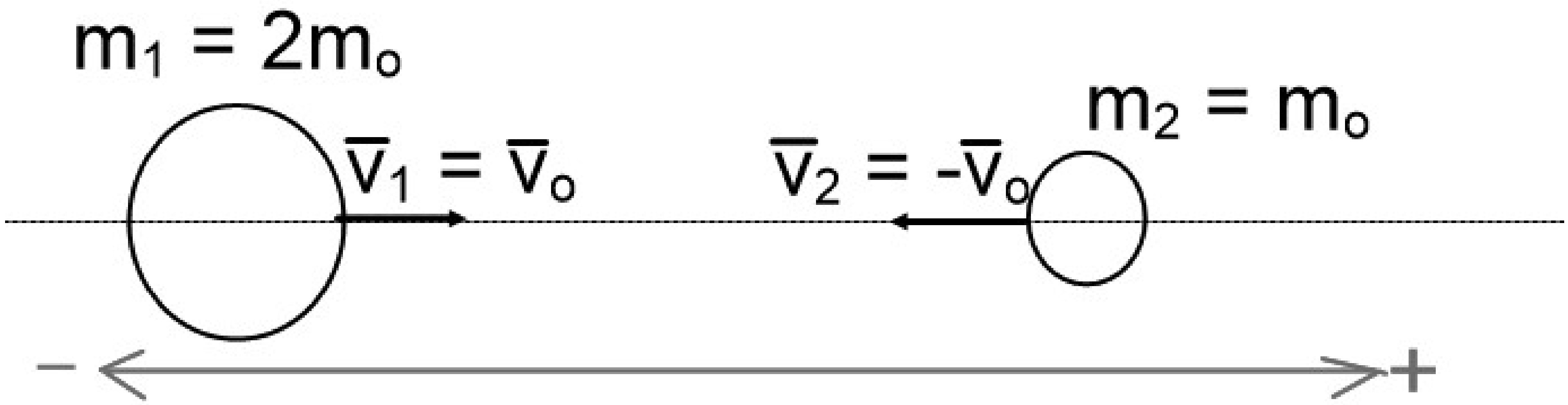
$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u \quad \text{eli} \quad m_1v_1 = m_1u + m_2u$$

$$m_1v_1 - m_1u = m_2u \qquad m_1(v_1 - u) = m_2u$$

$$m_1 = \frac{m_2u}{v_1 - u} = \frac{34\text{kg}\cdot 1{,}5\cancel{\text{m/s}}}{2{,}5\cancel{\text{m/s}} - 1{,}5\cancel{\text{m/s}}} = 51\ \text{kg}.$$

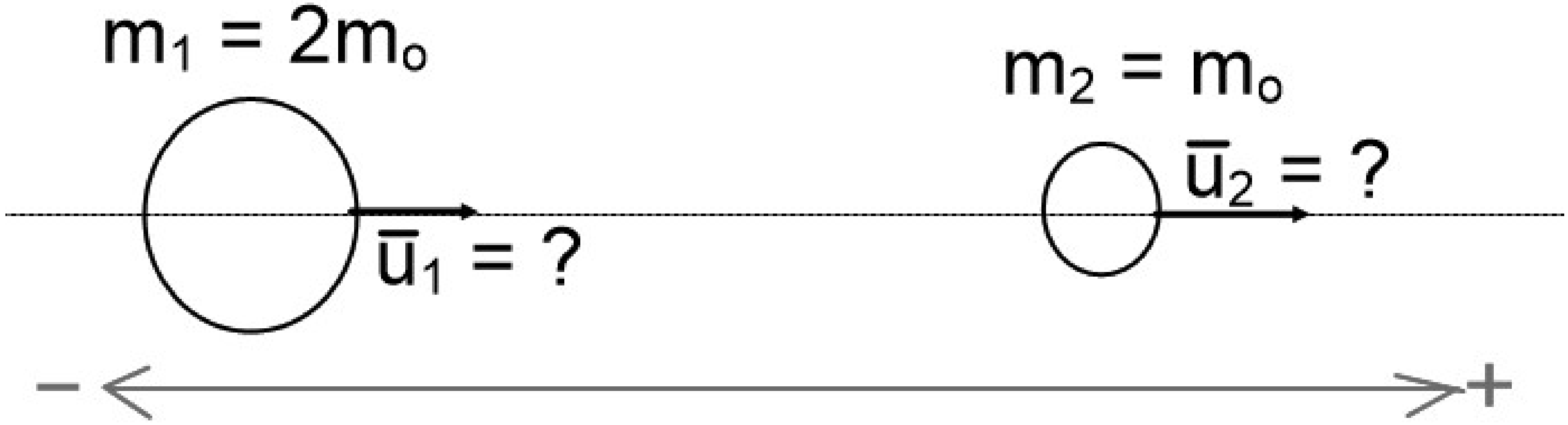
# Kimmoisa törmäys

## Ennen törmäystä:




Laske kappaleiden loppunopeudet täysin kimmoisan törmäyksen jälkeen.

Törmäyksen jälkeen:




Liikemäärän säilymislaki + merkkisopimus:

$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$

Merk. $m_1 = 2m_o$ , $m_2 = m_o$, $v_1 = v_2 = v_o$.

Silloin $2\cancel{m}_o v_o - \cancel{m}_o v_o = 2\cancel{m}_o u_1 + \cancel{m}_o u_2 \quad |:m_o$

$2v_o - v_o = 2u_1 + u_2$ eli $v_o = 2u_1 + u_2$

Ratkaistaan $u_2 = v_o - 2u_1$.

Liike-energia säilyy:

$$\tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 \quad |\cdot 2$$

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \quad | \; m_1 = 2m_o,\ m_2 = m_o,\ v_1 = v_2 = v_o$$

$$2\cancel{m_o}v_o^2 + \cancel{m_o}v_o^2 = 2\cancel{m_o}u_1^2 + \cancel{m_o}u_2^2 \quad |:m_o$$

$$\underbrace{v_o^2 + 2v_o^2}_{3v_o^2} = 2u_1^2 + u_2^2$$

$$\underline{\text{eli } 2u_1^2 + u_2^2 = 3v_o^2}$$

Tiedetään, että $u_2 = v_o - 2u_1$, jolloin

$$u_2^2 = v_o^2 - 4v_o u_1 + 4u_1^2$$

Muodostetaan yhtälö $u_1$:lle:

$$2u_1^2 + v_o^2 - 4v_o u_1 + 4u_1^2 = 3v_o^2$$

$$6u_1^2 - 4v_o u_1 - 2v_o^2 = 0 \quad |:2$$

$$\underline{3u_1^2 - 2v_o u_1 - v_o^2 = 0}$$

Käytetään toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa

$$u_1 = \frac{2v_o \pm \sqrt{4v_o^2 + 4 \cdot 3 \cdot v_o^2}}{2 \cdot 3}$$

$$= \frac{2v_o \pm \sqrt{16v_o^2}}{6} = \frac{2v_o \pm 4v_o}{6}$$

eli $u_1 = v_o$ tai $u_1 = -1/3v_o$ .

Lisäksi $u_2 = v_o - 2u_1$.

Ratkaisut:

$u_1 = v_o$   ja   $u_2 = v_o - 2u_1 = v_o - 2v_o = -v_o$

TAI  $u_1 = -1/3v_o$  ja  $u_2 = v_o - 2u_1$

$$= v_o - 2(-1/3v_o) = 5/3v_o$$

eli

$u_1 = v_o$
$u_2 = -v_o$

Alkuehto, ei käy!

TAI

$u_1 = -v_o$
$u_2 = 5/3v_o$

OK, kelpaa!